Kallenrode, www.sotere.uos.de

Übungsaufgaben Gewöhnliche Differentialgleichungen

1. Überprüfen Sie, ob die folgenden Funktionen Lösungen der links daneben stehenden Differentialgleichungen sind. Klassifizieren Sie die DGLs.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{x}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{2}{x} &= 0\,, &\qquad y = c_1 + 2x + c_2x^2 \\
x\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy &= 0\,, &\qquad xy = 2\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{-x} \\
\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + 4s &= 0\,, &\qquad s = c_1\,\cos(2t + c_2)\,.
\end{aligned}$$

Lösung: Ableitungen der Funktionen bilden und in die Differentialgleichung einsetzen. Die erste Gleichung ist eine gewöhnliche lineare inhomogene DGL zweiter Ordnung mit der Inhomogenität $2/x$ (der Term enthält nur die unabhängige, nicht aber die abhängige Variable). Sie hat die Ableitungen

$$y = c_1 + 2x + c_2x^2\,, \qquad y' = 2 + 2c_2x\,, \qquad y'' = 2c_2\,.$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$2c_2 - \frac{1}{x}\,(2 + 2c_2x) + \frac{2}{x} = 0\,,$$

d.h. die Funktion ist Lösung der DGL.
Für die zweite Gleichung (gewöhnlich, linear, homogen, zweite Ordnung) erhalten wir (wofern ich mich nicht mehrfach verrechnet habe) entsprechend

$$\begin{aligned}
y &= \frac{2\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{-x}}{x^{-1}} \\
y' &= \frac{x(2\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{-x}) - (2\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{-x})}{x^2} = \frac{2x\mathrm{e}^x + 3x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{-x}}{x^2} \\
y'' &= \frac{x^2(2x\mathrm{e}^x - 3x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{-x}) - (2x\mathrm{e}^x + 3x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{-x})\cdot 2x}{x^4} \\
&= \frac{2x^2\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^{-x} - 4x\mathrm{e}^x - 6x\mathrm{e}^{-x} + 4\mathrm{e}^x - 4\mathrm{e}^{-x}}{x^3}\,.
\end{aligned}$$

und nach Einsetzen in die DGL

$$x\,\frac{2x^2\mathrm{e}^x - 3x^2\mathrm{e}^{-x} - 4x\mathrm{e}^x - 6x\mathrm{e}^{-x} + 4\mathrm{e}^x - 6\mathrm{e}^{-x}}{x^3} + 2\,\frac{2x\mathrm{e}^x + 3x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^x + 3\mathrm{e}^{-x}}{x^2} - 2\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^{-x} = 0\,,$$

d.h. die vorgeschlagenen Lösung ist eine Lösung der DGL.
Die dritte Gleichung (Schwingungsgleichung, gewöhnlich, linear, homogen, zweite Ordnung) liefert für die Ableitungen

$$s = c_1\,\cos(2t + c_2)\,, \qquad s' = -2c_1\,\sin(2t + c_3)\,, \qquad s'' = -4c_1\,\cos(2t + c_3)$$

und nach Einsetzen in die DGL

$$-4c_1\,\cos(2t + c_3) + 4c_1\,\cos(2t + c_3) = 0\,.$$

2. Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen 1. Ordnung durch Variation der Konstanten:

$$\begin{aligned}
y' + xy &= 4x \\
y &= ay' + \cos\omega t \\
xy' - y &= x^2 + 4
\end{aligned}$$

$$y' - 3y = x e^x$$

Hinweis: die zweite DGL ist etwas mühsam zu integrieren – das Verfahren sollte aus Vorlesung/Skript/Übungen bekannt sein.

Lösung: Die erste Differentialgleichung läßt sich zerlegen in eine homogene DGL $y' + xy = 0$ und eine Inhomogenität $4x$. Lösung der homogenen DGL durch Separationsansatz:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -xy \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= -x\,\mathrm{d}x \\
\ln y &= -\frac{x^2}{2} + c' \\
y &= c\,\mathrm{e}^{-x^2/2} .
\end{aligned}$$

Variation der Integrationskonstante c liefert den Ansatz

$$y = c(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2} .$$

Ableiten (unter Berücksichtigung der Produktregel) liefert

$$y' = c'(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2} - x\,c(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

und nach Einsetzen in die DGL

$$c'(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2} - x\,c(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2} + x\,c(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2} = 4x$$

und damit als Bestimmungsgleichung für die Funktion $c(x)$:

$$\begin{aligned}
c'(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2} &= 4x \\
c'(x) &= 4x\,\mathrm{e}^{x^2/2} .
\end{aligned}$$

Integration (entweder sieht man es oder man substituiert $u = x^2/2$) liefert

$$c(x) = 4\,\mathrm{e}^{x^2/2} + C$$

und damit nach Einsetzen in die Lösung der homogenen DGL als Lösung für die inhomogene DGL:

$$y = \left(4\,\mathrm{e}^{x^2/2} + C\right)\,\mathrm{e}^{-x^2/2} = 4 + C\,\mathrm{e}^{x^2/2}$$

Die zweite Differentialgleichung läßt sich zerlegen in einen homogene Differentialgleichung $y = ay'$ und eine Inhomogenität $\cos\omega t$. Die homogene DGL wird mit Separationsansatz gelöst:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{\mathrm{d}t}{a} \\
\ln y &= \frac{t}{a} + c' \\
y &= c\,\mathrm{e}^{t/a} .
\end{aligned}$$

Jetzt ist die Integrationskonstante c zu variieren, d.h. wir machen den Ansatz

$$y = c(t)\,\mathrm{e}^{t/a} .$$

Ableiten des Ansatz (Produktregel) liefert

$$y' = c'\,\mathrm{e}^{t/a} + \frac{c}{a}\,\mathrm{e}^{t/a}$$

und eingesetzt in die DGL

$$
\begin{aligned}
c\,\mathrm{e}^{t/a} &= a\left(c'\,\mathrm{e}^{t/a} + \frac{c}{a}\,\mathrm{e}^{t/a}\right) + \cos\omega t \\
ac'\,\mathrm{e}^{t/a} &= -\cos\omega t \\
c' &= \frac{1}{a}\,\cos\omega t\,\mathrm{e}^{-t/a}\ .
\end{aligned}
$$

Integration erfordert doppelte partielle Integration:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{a}\,\cos\omega t\,\mathrm{e}^{-t/a}\,\mathrm{d}x \qquad \text{mit} \quad u=\cos\omega t\ , \quad u'=-\omega\sin\omega t\ , \quad v'=\mathrm{e}^{-t/a}\ , \quad v=-\mathrm{e}^{-t/a} \\
&= -\cos\omega t\,\mathrm{e}^{-t/a} - \int(-\omega\sin\omega t)\,(-\mathrm{e}^{-t/a})\,\mathrm{d}x \qquad \text{mit} \quad u=\omega\sin\omega t\ , \quad u'=\omega^2\cos\omega t \\
&= -\cos\omega t\,\mathrm{e}^{-t/a} - \left(-\omega^2\cos\omega t\,\mathrm{e}^{-t/a} - \int\omega^2\cos\omega t\,(-\mathrm{e}^{-t/a})\right)\mathrm{d}x \\
&= -\cos\omega t\,\mathrm{e}^{-t/a} + \omega^2\sin\omega t\,\mathrm{e}^{-t/a} - \int\omega^2\sin\omega t\,\mathrm{e}^{-t/a}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Als Ergebnis der partiellen Integration erhalten wir damit

$$
c(t) = \mathrm{e}^{-t/a}\frac{1}{\omega^2a^2+1}(\cos(\omega t) - \omega a\sin(\omega t)) + C
$$

und damit als Lösung der inhomogenen DGL

$$
y(t) = \frac{1}{\omega^2a^2+1}(\cos(\omega t) - \omega a\sin(\omega t)) + C\mathrm{e}^{t/a}
$$

Die dritte Differentialgleichung kann in die homogene Differentialgleichung $xy' - y = 0$ und die Inhomogenität x^2+4 zerlegt werden. Die homogene DGL wird wieder durch Separation gelöst:

$$
\begin{aligned}
x\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= y \\
\frac{\mathrm{d}y}{y} &= \frac{\mathrm{d}x}{x} \\
\ln y &= \ln x + c' \\
y &= cx\ .
\end{aligned}
$$

Durch Variation der Konstanten ergibt sich der Ansatz

$$
y = c(x)\,x
$$

mit der Ableitung

$$
y' = c'(x)\,x + c(x)\ .
$$

Einsetzen in die DGL liefert

$$
x\,(c'(x)\,x + c(x)) - c(x)\,x = x^2 + 4
$$

und damit als Bestimmungsgleichung für $c(x)$

$$
c'(x)\,x^2 = x^2 + 4 \qquad \text{oder} \qquad c'(x) = 1 + \frac{4}{x^2}\ .
$$

Integration liefert

$$
c(x) = x - \frac{4}{x^1} + C
$$

und damit als Lösung für die inhomogene DGL

$$
y = \left(x - \frac{4}{x^1} + C\right)\,x = x^2 - 4 + Cx\ .
$$

Die vierte Differentialgleichung kann in eine homogene Differentialgleichung $y' - 3y = 0$ und die Inhomogenität $x\,\mathrm{e}^x$ zerlegt werden. Die homogene DGL kann gelöst werden gemäß

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{dx}} &= 3y \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= 3\mathrm{d}x \\ \ln y &= 3x + c' \\ y &= c\,\mathrm{e}^{3x} \ . \end{aligned}$$

Durch Variation der Konstanten erhalten wir den Ansatz

$$y = c(x)\,\mathrm{e}^{3x} \ .$$

Ableiten liefert

$$y' = c'(x)\,\mathrm{e}^{3x} + 3c(x)\,\mathrm{e}^{3x}$$

und eingesetzte in die DGL

$$c'(x)\,\mathrm{e}^{3x} + 3c(x)\,\mathrm{e}^{3x} - 3c(x)\,\mathrm{e}^{3x} = x\,\mathrm{e}^x \qquad \text{bzw.} \qquad c'(x) = x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{-3x} = x\,\mathrm{e}^{-2x} \ .$$

Integration durch Substitution und Einsetzen in die Lösung der homogenen DGL liefert

$$y = -\frac{1}{4}\,(2x+1)\,\mathrm{e}^x + C\,\mathrm{e}^{3x} \ .$$

3. Lösen Sie die folgenden inhomogenen linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten durch Aufsuchen einer partikulären Lösung:

$$\begin{aligned} y' &= 2x - y \\ y' + y &= \mathrm{e}^{-x} \\ y' - 4y &= 5\sin x \ . \end{aligned}$$

Lösung: Die erste Differentialgleichung kann in den homogenen Teil $y' = -y$ und die Inhomogenität $2x$ zerlegt werden. Für die homogene DGL ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -y \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\mathrm{d}x \\ \ln y &= -x + c' \\ y &= c\,\mathrm{e}^{-x} \ . \end{aligned}$$

Der Ansatz für die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung soll der Inhomogenität möglichst ähnlich sein. Die Inhomogenität hat die Form $ax + b$, d.h. wir machen für die spezielle Lösung den Ansatz

$$y_s = ax + b \ .$$

Ableiten ergibt $y_s' = a$ und damit nach Einsetzen in die DGL

$$a = 2x - ax - b \ .$$

Hier müssen die Glieder mit x jeweils die gleichen Vorfaktoren haben (sonst kann die Gleichung nicht für beliebige x erfüllt sein), d.h. wir haben $a = 2$. Einsetzen liefert dann $b = -2$ und damit für die spezielle Lösung

$$y_s = 2x - 2 \ .$$

Die Lösung der inhomogenen DGL ergibt sich als die Summe aus der Lösung der homogenen DGL und der speziellen Lösung der inhomogenen DGL zu

$$y = c\,\mathrm{e}^{-x} + 2x - 2 \ .$$

Die zweite Differentialgleichung zerfällt in eine homogene DGL der Form $y' - y = 0$, die wie im voran gegangenen Beispiel die Lösung $y = c\,\mathrm{e}^{-x}$ hat, und die Inhomogenität e^{-x}. Für die spezielle Lösung der inhomogenen DGL machen wir einen Ansatz, der der Inhomogenität ähnlich ist, d.h. $y_s = Ax\,\mathrm{e}^{-x}$. Ableiten ergibt $y_s' = A(\mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x})$. Einsetzen in die inhomogene DGL liefert

$$A(\mathrm{e}^{-x} - x\,\mathrm{e}^{-x}) + Ax\,\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$$

und damit $A = 1$, d.h. die spezielle Lösung der inhomogenen DGL ist

$$y_s = x\,\mathrm{e}^{-x} \ .$$

Damit wird die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL zu

$$y = c\,\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x} = (c + x)\,\mathrm{e}^{-x} \ .$$

Die dritte Differentialgleichung zerfällt in eine homogene DGL der Form $y' = 4y$ und eine Inhomogenität $5\,\sin x$. Die Lösung der homogenen DGL ist

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= 4y \\ \frac{\mathrm{d}y}{y} &= 4\,\mathrm{d}x \\ \ln y &= 4x + c' \\ y &= c\,\mathrm{e}^{4x} \ . \end{aligned}$$

Für die spezielle Lösung der inhomogenen DGL benötigen wir wieder einen der Inhomogenität ähnlichen Ansatz, d.h. in diesem Fall $y_s = A\,\sin x + B\,\cos x$. Ableiten ergibt $y_s' = A\,\cos x - B\sin x$. Einsetzen in die inhomogene DGL liefert

$$A\,\cos x - B\sin x - 4\,(A\,\sin x + B\,\cos x) = 5\,\sin x$$

oder

$$(A - 4B)\,\cos x = (5 + B + 4A)\,\sin x \ .$$

Diese Gleichung ist nur dann für beliebige x erfüllt, wenn die Vorfaktoren vor dem Sinus- und Kosinusterm verschwinden, d.h. wenn $A = 4B$ und $5 + B + 4A = 0$. Einsetzen des Ersteren in das Zweite liefert $5 + B + 16B = 0$ bzw. $B = -5/17$ und damit $A = -20/17$. Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL ist damit

$$y_s = \frac{-20}{17}\,\sin x - \frac{5}{17}\,\cos x \ .$$

Zusammen mit der Lösung der homogenen DGL erhalten wir die Lösung der inhomogenen DGL zu

$$y = c\,\mathrm{e}^{4x} - \frac{20}{17}\,\sin x - \frac{5}{17}\,\cos x \ .$$

4. Die DGL

$$(1 - x^2)\dot{x} = \frac{t-1}{t^2 - 2t + 5}$$

ist eine nicht-lineare DGL erster Ordnung, da sie (a) eine Potenz der gesuchten Funktion x enthält und (b) ein Produkt aus der gesuchten Funktion und ihrer Ableitung. Betrachten Sie die Struktur der Gleichung genau und wenden Sie ein geeignetes, Ihnen von linearen Gleichungen bekanntes Lösungsverfahren an. (Hinweis: die Lösung einer DGL ist immer eine Funktion, allerdings nicht zwingend in expliziter Darstellung!)

Lösung: eine DGL der Form

$$\dot{x} = \frac{f(t)}{g(x)}$$

ist separabel als

$$g(x)\,\mathrm{d}x = f(t)\,\mathrm{d}t$$

mit der Lösung

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

Die in der Aufgabenstellung gegebene DGL können wir schreiben als

$$g(x)\,\dot{x} = f(t)$$

mit $g(x) = 1-x^2$ und $f(t) = (t-1)(t^2-2t+5)$. Damit ist die DGL separabel mit der Lösung

$$\int (1-x^2)\,\mathrm{d}x = \int \frac{t-1}{t^2-2t+5}\,\mathrm{d}t\ .$$

Die linke Seite kann direkt integriert werden, für die rechte substituieren wir $u = t^2 - 2t + 5$ und damit $\dot{u} = 2(t-1)$ und $\mathrm{d}t = \mathrm{d}u/((2(t-1))$:

$$x - \frac{x^3}{3} + c_1 = \int \frac{t-1}{u}\,\frac{\mathrm{d}u}{2(t-1)} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\ln(t^2-2t+5) + c_2\ .$$

Die gesuchte Funktion $x(t)$ lässt sich nicht in expliziter Form darstellen sondern nur implizit als

$$x - \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2}\ln(t^2-2t+5) + c = 0\ .$$

Die Integrationskonstante ist aus der Anfangsbedingung zu bestimmen.

Das andere Standardlösungsverfahren, der Exponentialansatz, liefert mit $x \sim \mathrm{e}^{\lambda t}$ und $\dot{x} \sim \lambda\mathrm{e}^{\lambda t}$ eine Gleichung der Form

$$(1-\mathrm{e}^{2\lambda t})\mathrm{e}^{\lambda t} = \frac{t-1}{t^2-2t+5}\ .$$

Das lässt sich aber nicht nach λ auflösen.