

Übungsaufgaben Partielle Differentialgleichung – Wellengleichung

1. Ein an einer Seite eingespannter Stab soll als schwingende Saite mit einem offenen Ende angenähert werden. Lösen Sie die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} . \quad (1)$$

(Wie) unterscheidet sich die Lösung von der für die schwingende Saite?

2. Eine elektromagnetische Welle im Vakuum wird durch die Wellengleichung

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (2)$$

beschrieben. Zeigen Sie, dass die harmonische Welle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp \left\{ -i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \right\} \quad (3)$$

mit \vec{k} als dem Wellenvektor Lösung der Wellengleichung ist. (Hinweis: der Betrag des Wellenvektors ist das Reziproke der Wellenlänge, es gilt $\omega^2 = k^2 c^2$.)

3. Als Beispiel für die Lösung der zweidimensionalen Wellengleichung haben wir bisher die schwingende Rechteckmembran betrachtet: eine Membran (oder Platte), die an allen Außenseiten eingespannt ist. Aus der Einführung der Experimentalphysik sind Ihnen die Chladni'schen Klangfiguren bekannt: die Knotenlinien, die sich ergeben bei einer Platte, die an den Außenkanten frei schwingen kann aber in der Mitte eingespannt ist.