

Komplexe Übungsaufgabe Differentialgleichung

Die Rahmenhandlung

Sie werden von der Kripo um Hilfe gebeten: an einem kalten Wintermorgen wurde um 7 Uhr ein Toter gefunden, seine Körpertemperatur betrug zu diesem Zeitpunkt 20°C . Nach einer Stunde ist diese auf 15° abgesunken. Wann starb die Person (Körpertemperatur zum Zeitpunkt des Todes 37°)?

Die Kripo bittet um eine genaue Zeitangabe, da am gleichen Tag um 5:15 aus einem sehr nahe dem Tatort gelegenen Gefängnis ein Mörder entlassen wurde. Ihre Antwort kann diese Person ent- oder belasten, seien Sie sich also Ihrer Verantwortung für eine korrekte Lösung bewusst.

Als Physiker verstehen Sie sofort, dass es sich bei diesem Problem um ein einfaches Wärmeabgabeproblem handelt, beschrieben durch Newton's Abkühlungsgesetz

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - U(t)) \quad (1)$$

mit k als einem Wärmeabgabekoeffizienten, $T(t)$ als der Temperatur T in Abhängigkeit von der Zeit t und $U(t)$ als der Umgebungstemperatur. Also rufen Sie beim Wetterdienst an und erhalten für den Temperaturverlauf des betreffenden Tages

$$U(t) = 3^\circ\text{C} - 5^\circ\text{C} \cos(\omega(t - 2 \text{ h})) \quad (2)$$

mit $\omega = \pi/12 \text{ h}^{-1}$. Unter Vernachlässigung der Einheiten, also bei Angabe der Zeit in Stunden und der Temperatur in $^\circ\text{C}$, lässt sich dieser Verlauf abkürzen als

$$U(t) = 3 - 5 \cos(\omega(t - 2)) .$$

Die Aufgabe – in einzelne Schritte zerlegt

1. Beginnen Sie mit einem ‘quick and dirty approach’ und nehmen die Umgebungstemperatur als konstant an. Die DGL (1) wird dann

$$\frac{dT}{dt} = -k(T(t) - U_0) .$$

- (a) Klassifizieren Sie die DGL. Welche Lösungsverfahren fallen Ihnen für diesen Typ von DGL ein.
- (b) Lösen Sie diese DGL allgemein. Beschreiben Sie Ihr Lösungsverfahren.
- (c) Verifizieren Sie die Lösung durch Einsetzen in die DGL.
- (d) Wenden Sie die Lösung auf Ihr Problem an. Hinweis: Sie kennen zwar k nicht, kennen aber die Temperatur zu zwei verschiedenen Zeitpunkten.
- (e) Sie trauen den vor Ort arbeitenden Kriminaltechnikern das Ablesen eines Thermometers nicht zu und nehmen einen Fehler von $\pm 0.5^\circ\text{C}$ in der Temperaturmessung an. Bestimmen Sie mit diesen Annahmen den frühesten und spätesten möglichen Todeszeitpunkt (Variante 1 gibt 20.5°C für 7 Uhr und 14.5°C für 8 Uhr, Variante 2 gibt 19.5°C für 7 Uhr und 15.5°C für 8 Uhr – beide Varianten mit 37°C zur Zeit t_0).

Bearbeitungshinweise:

Sie sollen bei der Bearbeitung dieses Übungszettels nicht nur zeigen, dass Sie die DGL lösen können sondern Sie sollen auch darstellen, dass Sie mit den zugehörigen Grundbegriffen umgehen können. Daher sollen Sie Ihre Verfahren erläutern sowie Lösungen durch auf andere Weise gefundene Lösungen überprüfen – so, wie ein Gutachter seine Ergebnisse aufarbeiten müsste, damit sie von anderen Fachleuten in einem (Gerichts-)Verfahren bewertet werden können. Bei den iterativen Verfahren bitte die MATLAB-Skripte mit angeben.