Kallenrode, www.sotere.uos.de

Komplexe Übungsaufgabe Differetialgleichung

Die Rahmenhandlung

Sie werden von der Kripo um Hilfe gebeten: an einem kalten Wintermorgen wurde um 7 Uhr ein Toter gefunden, seine Körpertemperatur betrug zu diesem Zeitpunkt 20°C. Nach einer Stunde ist diese auf 15° abgesunken. Wann starb die Person (Körpertemperatur zum Zeitpunkt des Todes 37°)?

Die Kripo bittet um eine genaue Zeitangabe, da am gleichen Tag um 5:15 aus einem sehr nahe dem Tatort gelegenen Gefängnis ein Mörder entlassen wurde. Ihre Antwort kann diese Person ent- oder belasten, seien Sie sich also Ihrer Verantwortung für eine korrekte Lösung bewusst.

Als Physiker verstehen Sie sofort, dass es sich bei diesem Problem um ein einfaches Wärmeabgabeproblem handelt, beschrieben durch Newton's Abkühlungsgesetz

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T(t) - U(t)) \tag{1}$$

mit k als einem Wärmeabgabekoeffizienten, $T(t)$ als der Temperatur T in Abhängigkeit von der Zeit t und $U(t)$ als der Umgebungstemperatur. Also rufen Sie beim Wetterdienst an und erhalten für den Temperaturverlauf des betreffenden Tages

$$U(t) = 3°\mathrm{C} - 5°\mathrm{C}\cos(\omega(t - 2\ \mathrm{h})) \tag{2}$$

mit $\omega = \pi/12\ \mathrm{h}^{-1}$. Unter Vernachlässigung der Einheiten, also bei Angabe der Zeit in Stunden und der Temperatur in °C, lässt sich dieser Verlauf abkürzen als

$$U(t) = 3 - 5\cos(\omega(t - 2))\ .$$

Die Aufgabe – in einzelne Schritte zerlegt

1. Beginnen Sie mit einem 'quick and dirty approach' und nehmen die Umgebungstemperatur als konstant an. Die DGL (1) wird dann

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T(t) - U_0)\ .$$

   (a) Klassifizieren Sie die DGL. Welche Lösungsverfahren fallen Ihnen für diesen Typ von DGL ein.

   (b) Lösen Sie diese DGL allgemein. Beschreiben Sie Ihr Lösungsverfahren.

   (c) Verifizieren Sie die Lösung durch Einsetzen in die DGL.

   (d) Wenden Sie die Lösung auf Ihr Problem an. Hinweis: Sie kennen zwar k nicht, kennen aber die Temperatur zu zwei verschiedenen Zeitpunkten.

   (e) Sie trauen den vor Ort arbeitenden Kriminaltechnikern das Ablesen eines Thermometers nicht zu und nehmen einen Fehler von ±0.5°C in der Temperaturmessung an. Bestimmen Sie mit diesen Annahmen den frühesten und spätesten möglichen Todeszeitpunkt (Variante 1 gibt 20.5°C für 7 Uhr und 14.5°C für 8 Uhr, Variante 2 gibt 19.5°C für 7 Uhr und 15.5°C für 8 Uhr – beide Varianten mit 37°C zur Zeit t_0).

   Lösung:

   (a) Mathematisch ist die Differentialgleichung eine lineare inhomogene DGL erster Ordnung. Da die Inhomogenität jedoch eine Konstante ist, lässt sich selbst die inhomogene DGL durch einen Separationsansatz lösen. Sie wird daher zumindest von Physikern auch als lineare homogene DGL erster Ordnung mit konstantem Summanden klassifiziert. Der Koeffizient k ist konstant.
   Zur Lösung stehen die folgenden Verfahren zu Verfügung:

- bei Interpretation als homogene DGL mit konstantem Summanden kann der Separationsansatz direkt angewendet werden und mit Hilfe einer Substitution integriert werden.
- bei Interpretation als inhomogene DGL muss gemäß Superpositionsprinzip zuerst die homogene DGL $\dot{T} = -kT$ gelöst werden und anschließend eine spezielle Lösung für die inhomogene DGL gefunden werden.
  Für die homogene DGL kann einer der folgenden Ansätze verwendet werden:
  - Separation der Variablen,
  - Exponentialansatz,
  - Lösung durch eine Potenzreihe.

  Die inhomogene Gleichung kann gelöst werden durch
  - Variation der Konstanten oder
  - Aufsuchen einer partikulären Lösung mit Hilfe eines Ansatzes, der der Inhomogenität ähnlich ist.

Außerdem könnten wir als Vergleichsverfahren auch eine numerische Lösung versuchen (das werden Sie auf Übungszettel 10 nachholen).

(b) Arbeiten wir nacheinander die obigen Lösungsverfahren ab.

- Interpretation als homogene DGL mit konstantem Summanden. Separation liefert

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - U_0) \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}T}{T - U_0} = -k\,\mathrm{d}T\ .$$

  Da wir die allgemeine Lösung suchen, können wir keine Integrationsgrenzen angeben sondern bilden links und rechts das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}T}{T - U_0} = -\int k\,\mathrm{d}t \qquad \overset{u=T-U_0\ \ \mathrm{d}u=\mathrm{d}t}{\Rightarrow} \qquad \ln(T - U_0) = -kt + c_1\ .$$

  Durch Anwenden der Exponentialfunktion lässt sich nach $T(t)$ auflösen:

$$T - U_0 = c\mathrm{e}^{-kt} \qquad \Rightarrow \qquad T(t) = c\,\mathrm{e}^{-kt} + U_0\ . \tag{3}$$

  Plausibilitätsbetrachtung: für große Zeiten verschwindet die abfallende Exponentialfunktion und die Temperatur nähert sich der Umgebungstemperatur U_0 an – was physikalisch sinnvoll ist.
  Überprüfung durch Einsetzen in die DGL: mit $\dot{T} = -kc\,\mathrm{e}^{-kt}$ ergibt sich

$$-kc\,\mathrm{e}^{-kt} = -k(c\,\mathrm{e}^{-kt} + U_0 - U_0) \qquad \Rightarrow \qquad 1 = 1\ ,$$

  was mathematisch korrekt ist.
- Bei Interpretation als inhomogene DGL lösen wir zuerst die homogene DGL $\dot{T} = -kT$:
  - Separation der Variablen liefert

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -kT \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}T}{T} = -k\mathrm{d}t\ .$$

    Der Ausdruck kann direkt integriert und nach T aufgelöst werden:

$$\int \frac{\mathrm{d}T}{T} = -\int k\mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad \ln T = -kt + c_1 \qquad \Rightarrow T(t) = c\,\mathrm{e}^{-kt}\ . \tag{4}$$

    Überprüfen der Lösung durch Ableiten ($\dot{T} = -kc\mathrm{e}^{-kt}$) und Einsetzen in die homogene DGL: der Ausdruck $-kc\mathrm{e}^{-kt} = -kc\mathrm{e}^{-kt}$ ist sinnvoll.

– Exponentialansatz: zur Lösung der DGL machen wir den Ansatz $T = c\,\mathrm{e}^{\lambda t}$. Ableiten und Einsetzen in die homogene DGL liefert

$$\lambda c\,\mathrm{e}^{\lambda t} = -kc\,\mathrm{e}^{\lambda t} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = -k\,,$$

d.h. die Lösung der homogenen DGL ist $T = c\,\mathrm{e}^{-kt}$. Überprüfen durch Einsetzen (s.o.).

– Potenzreihenansatz: zur Lösung machen wir einen Ansatz

$$T = \sum_{i=0\infty} a_i t^i \qquad \text{mit} \qquad \dot{T} = \sum_{i=1\infty} i a_i t^{i-1} = \sum_{i=0\infty} (i+1) a_{i+1} t^i \;.$$

Einsetzen in die homogene DGL liefert

$$\sum_{i=0\infty} (i+1) a_{i+1} t^i = -k \sum_{i=0\infty} a_i t^i \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{i=0\infty} \left((i+1) a_{i+1} + k a_i\right) t^i = 0\;.$$

Damit die Potenzreihe verschwindet, muss jeder der Koeffizienten verschwinden, d.h. es ist

$$(i+1) a_{i+1} + k a_i = 0 \qquad \text{und damit} \qquad a_{i+1} = -\frac{k}{i+1} a_i = \frac{(-k)^i}{i!} a_0\;.$$

Damit ergibt sich als Lösung der homogenen DGL

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-kt)^i}{i!} a_0 = a_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-kt)^i}{i!} = a_0\,\mathrm{e}^{-kt}\,,$$

wie bereits mit den anderen beiden Verfahren bestimmt.

Zur Lösung der inhomogene Gleichung haben wir zwei Möglichkeiten.

– die Variation der Konstanten ist ein einfaches schematisches Verfahren, bei dem die Integrationskonstante als Funktion der unabhängigen Variablen betrachten, d.h. $T = c(t)\,\mathrm{e}^{-kt}$. Ableiten und Einsetzen in die inhomogene DGL liefert

$$c'\,\mathrm{e}^{-kt} - ck\,\mathrm{e}^{-kt} = -k(c\,\mathrm{e}^{-kt} - U_0) \quad \Rightarrow \quad c' = kU_0\,\mathrm{e}^{kt} \quad \Rightarrow \quad c' = U_0\,\mathrm{e}^{kt} + C$$

mit C als neuer Integrationskonstanten. Einsetzen in den Ansatz liefert

$$T = c(t)\,\mathrm{e}^{-kt} = (U_0\,\mathrm{e}^{kt} + C)\,\mathrm{e}^{-kt} = C\,\mathrm{e}^{-kt} + U_0\;.$$

Das entspricht der allgemeinen Lösung in (3). Überprüfung wie dort.

– zum Aufsuchen der partikulären Lösung machen wir einen Ansatz, der der Inhomogenität ähnlich ist, d.h. wir wählen eine Konstante: $T_\mathrm{p}(t) = C$. Ableiten und Einsetzen in die inhomogene DGL liefert

$$0 = -k(C - U_0) \qquad \Rightarrow \qquad C = U_0\,,$$

d.h. die partikuläre Lösung wird $T_\mathrm{p} = U_0$. Zusammen mit der allgemeinen Lösung (4) der homogenen DGL ergibt sich die bereits bekannte Lösung

$$T(t) = T_\mathrm{h} + T_\mathrm{p} = c\,\mathrm{e}^{-kt} + U_0\;.$$

(c) haben wir gleich beim ersten Lösungsversuch in (b) bereits erledigt.

(d) hier heißt es etwas denken (und zwar sorgfältig, da dieser Ansatz auch in Aufgabenteil (3) benötigt wird): wir haben eine allgemeine Lösung mit einer nicht bestimmten Integrationskonstante sowie einem unbekannten Koeffizienten k. Dieser wird sich nicht in einer Formelsammlung finden lassen, da eine unbekleidete Leiche sicherlich schneller auskühlen wird als eine gut verpackte. Die Lösung der inhomogenen DGL ist also eine Gleichung mit zwei Unbekannten: der Integrationskonstante c und dem Koeffizienten k.

Außerdem fehlt uns der Zeitpunkt t_0 des Mordes: für diese Anfangsbedingung kennen wir zwar die Temperatur aber eben nicht den Zeitpunkt. Für diese drei Unbekannten haben wir drei Informationen:

$$T(t_0) = 37\,, \qquad T(7) = 20 \qquad \text{und} \qquad T(8) = 15\,. \tag{5}$$

Einsetzen in die allgemeine Lösung liefert das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcll} 20 = c\,E^{-7k} + U_0 & \Rightarrow & \ln(20 - U_0) = -7k + c_1\,, & \\ 15 = c\,E^{-8k} + U_0 & \Rightarrow & \ln(15 - U_0) = -8k + c_1 \qquad \text{und} & \\ 37 = c\,E^{-kt_0} + U_0 & \Rightarrow & \ln(37 - U_0) = -t_0 k + c_1 & \Rightarrow \qquad t_0 = [c_1 - \ln(37 - U_0)]\,/k\,. \end{array}$$

Die letzte Gleichung ist die Bestimmungsgleichung für die gesuchte Größe t_0, die Unbekannten k und c_1 lassen sich aus den ersten beiden Gleichungen bestimmen. Ihre Differenz ergibt

$$\ln(20 - U_0) - \ln(15 - U_0) = k \qquad \Rightarrow \qquad k = \ln\frac{20 - U_0}{15 - U_0} \tag{6}$$

und nach Einsetzen dieses Ausdrucks in die erste Gleichung

$$\ln(20 - U_0) = -7\ln\frac{20 - U_0}{15 - U_0} + c_1 \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = \ln(20 - U_0) + 7\ln\frac{20 - U_0}{15 - U_0}$$

Mit der (als konstant angenommenen) Umgebungstemperatur $U_0 = 3 - 5\cos(5\omega) = 3 - 5\cos(5\pi/12) \approx 1.7$ erhalten wir

$$k = \ln\frac{20 - 1.7}{15 - 1.7} = \ln 18.3/13.3 \approx 0.319 \qquad \text{und} \qquad c_1 = \ln 18.3 + 7\ln 18.3/13.3 \approx 5.141\,.$$

Einsetzen in die letzte Gleichung des Gleichungssystems ergibt

$$t_0 = [5.141 - \ln 35.3]\,/0.319 \approx 4.94\,, \tag{7}$$

d.h. der Todeszeitpunkt liegt um 4:57. Da wir auf Grund der als konstant angenommenen Umgebungstemperatur U_0 nur eine grobe Näherung vorgenommen haben, ist diese Angabe nicht ausreichend, den verdächtigten Haftentlassenen zu be- oder entlasten. Wir müssen also genauer rechnen.

Anmerkung: Die etwas mühsame Diskussion zeigt, dass wir das Problem auch auf eine ganz andere Weise hätten anpacken können. Gehen wir dazu auf das Verfahren der Separation der Variablen für die vollständige DGL zurück und führen die Integration für die beiden bekannten Temperaturen aus:

$$\int\limits_{37}^{20} \frac{\mathrm{d}T}{T - U_0} = -\int\limits_{t_0}^{7} k\,\mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad \ln\frac{(20 - U_0)}{(37 - U_0)} = -k(7 - t_0) = -7k + kt_0$$

und

$$\int\limits_{37}^{15} \frac{\mathrm{d}T}{T - U_0} = -\int\limits_{t_0}^{8} k\,\mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad \ln\frac{(15 - U_0)}{(37 - U_0)} = -k(8 - t_0) = -8k + kt_0\,.$$

Subtraktion der beiden Gleichungen liefert

$$\ln\frac{(20 - U_0)}{(37 - U_0)} - \ln\frac{(15 - U_0)}{(37 - U_0)} = k \qquad \Rightarrow \qquad k = \ln\frac{\frac{(20-U_0)}{(37-U_0)}}{\frac{(15-U_0)}{(37-U_0)}} = \ln\frac{(20 - U_0)}{(15 - U_0)}\,,$$

wir erhalten also auch auf diesem Weg das bereits aus (6) bekannte Ergebnis. Durch Einsetzen in eine der beiden Gleichungen ergibt sich t_0 zu

$$\ln\frac{(20 - U_0)}{(37 - U_0)} = -7k + kt_0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = \ln\frac{(20 - U_0)}{(37 - U_0)}\Big/\ln\frac{(20 - U_0)}{(15 - U_0)} - 7 = \frac{\ln 18.3/35.3}{\ln 18.3/13.3} + 7 \approx 4.94\,,$$

was das Ergebnis aus (7) bestätigt. Bitte beachten Sie, dass dieses Verfahren nur deshalb funktioniert, weil wir die im mathematischen Sinne inhomogene DGL separieren und direkt integrieren können ohne eine Trennung in den homogenen und den inhomogenen Anteil vornehmen zu müssen.

(e) Zur Fehlerabschätzung betrachten wir die beiden ungünstigsten Fälle:

i. um 7 Uhr wurde eine zu hohe und um 8 Uhr eine zu niedrige Temperatur gemessen, d.h. die Leiche kühlt deutlich schneller ab als oben bestimmt. Dann erhalten wir statt (5)

$$T(t_0) = 37\,, \qquad T(7) = 20.5 \qquad \text{und} \qquad T(8) = 14.5\;.$$

Damit erhalten wir

$$k = \ln \frac{20.5 - U_0}{14.5 - U_0} \approx 0.384 \qquad \text{und} \qquad t_0 = \frac{\ln 18.8/35.3}{\ln 18.8/12.8} + 7 \approx 5.36\;.$$

Das ist plausibel, da eine schnellere Abkühlung den Todeszeitpunkt dichter an den Zeitpunkt des Auffindens verlagern würde. Dieser Zeitpunkt liegt auch nach der Entlassung des Strafgefangenen.

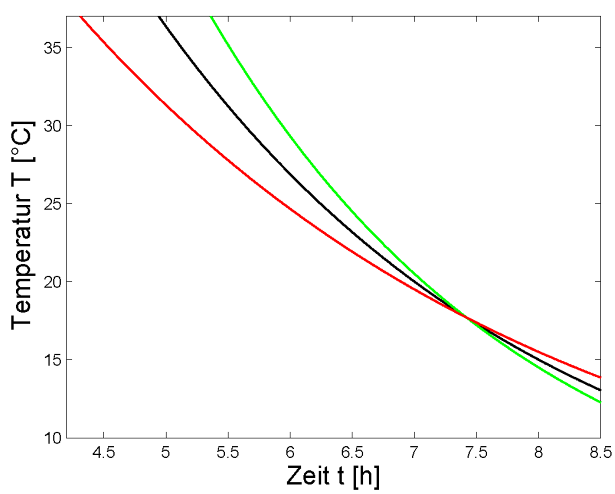
ii. um 7 Uhr wurde eine zu niedrige und um 8 Uhr eine zu hohe Temperatur gemessen, d.h. die Leiche kühlt langsamer ab und wir erwarten einen früheren Todeszeitpunkt. Statt (5) erhalten wir

$$T(t_0) = 37\,, \qquad T(7) = 19.5 \qquad \text{und} \qquad T(8) = 15.5$$

und damit

$$k = \ln \frac{19.5 - U_0}{15.5 - U_0} \approx 0.255 \qquad \text{und} \qquad t_0 = \frac{\ln 17.5/35}{\ln 17.5/13.5} + 7 \approx 4.29\;.$$

Die Temperaturverläufe für alle drei Fälle sind in der folgenden Abbildung gegeben:



Die schwarze Kurve gibt die Lösung für die gegebenen Werte, die rote und grüne Kurve geben jeweils die 'worst case' Szenarien bei Berücksichtigung der Fehler. Der Todeszeitpunkt liegt irgendwo zwischen den Schnittstellen der roten und der grünen Kurve mit der oberen horizontalen Achse.

2. Wenden Sie sich nun der allgemeinen DGL (1) zu, d.h. betrachten Sie

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T(t) - U(t)) \qquad \text{mit} \qquad U(t) = \mu + \lambda \cos(\omega(t - \varphi))\;.$$

(a) Klassifizieren Sie die DGL.

(b) Beschreiben Sie das Lösungsverfahren für eine derartige DGL.

(c) Lösen Sie diese DGL allgemein.

(d) Verifizieren Sie die allgemeine Lösung.

Lösung:

(a) in diesem Fall handelt es sich eindeutig um eine inhomogene DGL. Die homogene DGL ist, wie bereits ausführlich in Aufgabeteil 1 diskutiert, $\dot{T} = -kT$, die Inhomogenität ist $U(t) = k(\mu + \lambda \cos(\omega(t - \varphi)))$.

(b) Der Lösungsverfahren wurde in Aufgabenteil 1, Unterpunkt (a) bereits ausführlich diskutiert: zuerst wird die homogene DGL gelöst (kann von dort direkt übernommen werden), anschließend muss eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL gefunden werden – entweder durch Variation der Konstanten oder durch einen Ansatz, der der Inhomogenität ähnlich ist.

(c) Die Lösung der homogenen DGL ist aus Aufgabenteil 1, Unterpunkt (b) bekannt als

$$T_{\mathrm{h}} = c\,\mathrm{e}^{-kt}\ .$$

- zur Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten ersetzen wir darin die Integrationskonstante c durch eine Funktion $c(t)$ der unabhängigen Variablen, leiten ab und setzen in die DGL ein:

  $$c'\,\mathrm{e}^{-kt} - ck\,\mathrm{e}^{-kt} = -k\left(c\,\mathrm{e}^{-kt} - \mu - \lambda\,\cos(\omega(t - \varphi))\right)\ .$$

  Auflösen nach c' liefert als DGL für die Funktion $c(t)$:

  $$c' = (k\mu + k\lambda\,\cos(\omega(t - \varphi)))\,\mathrm{e}^{kt}\ .$$

  Der Ausdruck lässt sich direkt integrieren, wobei der zweite Summand im Integranden wieder ein Produkt aus einer Winkelfunktion und der Exponentialfunktion ist. Da wir ein derartiges Integral sowohl durch doppelte partielle Integration als auch im Komplexen bereits mehrfach betrachtet haben, können wir das Ergebnis ausnahmsweise mal aus den Aufzeichnungen/von alten Übungszetteln abschreiben:

  $$\int \mathrm{e}^{ax}\,\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2}\,(a\,\cos(bx) + b\,\sin(bx))\ .$$

  Damit erhalten wir

  $$c(t) = \mu\mathrm{e}^{kt} + k\lambda\frac{\mathrm{e}^{kt}}{k^2 + \omega^2}\,(k\cos(\omega(t - \varphi)) + \omega\,\sin(\omega(t - \varphi))) + C\ .$$

  Einsetzen in die Lösung der homogenen DGL liefert als Gesamtlösung für die inhomogene DGL

  $$\begin{aligned} T(t) &= \left[\mu\mathrm{e}^{kt} + k\lambda\frac{\mathrm{e}^{kt}}{k^2 + \omega^2}\,(k\cos(\omega(t - \varphi)) + \omega\,\sin(\omega(t - \varphi))) + C\right]\,\mathrm{e}^{-kt} \\ &= \mu + \frac{k\lambda}{k^2 + \omega^2}\,(k\cos(\omega(t - \varphi)) + \omega\,\sin(\omega(t - \varphi))) + C\mathrm{e}^{-kt}\ . \end{aligned} \tag{8}$$

- als alternatives Lösungsverfahren suchen wir eine partikuläre Lösung T_{p} der inhomogenen DGL. Dazu müssen wir einen Ansatz machen, der der Inhomogenität ähnlich ist. In diesem Fall besteht die Inhomogenität aus einer Summe aus einer konstanten Funktion μ und einer Winkelfunktion (Kosinus). Der Ansatz muss daher eine Summe aus den Standardansätzen für diese beiden Arten von Funktionen sein: eine Konstante plus eine Linearkombination aus den Winkelfunktionen Sinus und Kosinus:

  $$T = A + B\sin(\omega(t - \varphi)) + C\cos(\omega(t - \varphi))$$

mit der Ableitung

$$\dot{T} = \omega B \cos(\omega(t-\varphi)) - \omega C \sin(\omega(t-\varphi)) \ .$$

Einsetzen in die inhomogene DGL liefert

$$\omega B \cos(\omega(t-\varphi)) - \omega C \sin(\omega(t-\varphi)) =$$
$$= -k \left[A + B\sin(\omega(t-\varphi)) + C\cos(\omega(t-\varphi)) - \mu - \lambda\cos(\omega(t-\varphi))\right] \ .$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$kA = k\mu \,, \qquad \omega B = -kC + k\lambda \qquad \text{und} \qquad -\omega C = -kB$$

und damit

$$A = \mu \,, \qquad B = \frac{\lambda k \omega}{\omega^2 + k^2} \qquad \text{und} \qquad C = \frac{k}{\omega} \frac{\lambda k \omega}{\omega^2 + k^2} = \frac{\lambda k^2}{\omega^2 + k^2} \ .$$

Die partikuläre Lösung lässt sich damit schreiben als

$$T_\mathrm{p} = \mu + \frac{k\lambda}{k^2 + \omega^2} \left(k\cos(\omega(t-\varphi)) + \omega\ \sin(\omega(t-\varphi))\right) \ ,$$

die Gesamtlösung ergibt sich daraus zu

$$T(t) = \mu + \frac{k\lambda}{k^2 + \omega^2} \left(k\cos(\omega(t-\varphi)) + \omega\ \sin(\omega(t-\varphi))\right) + c\,\mathrm{e}^{-kt} \ .$$

Das ist identisch mit (8).

(d) zur Überprüfung der Lösung ableiten und in die inhomogene DGL einsetzen. Es war

$$T(t) = \mu + \frac{k\lambda}{k^2 + \omega^2} \left(k\cos(\omega(t-\varphi)) + \omega\ \sin(\omega(t-\varphi))\right) + C\mathrm{e}^{-kt}$$

und damit

$$\dot{T} = \frac{k\lambda}{k^2 + \omega^2} \left(-k\omega\sin(\omega(t-\varphi)) + \omega^2\ \cos(\omega(t-\varphi))\right) - kC\mathrm{e}^{-kt} \ .$$

Einsetzen in die inhomogene DGL liefert

$$\frac{k\lambda}{k^2 + \omega^2} \left(-k\omega\sin(\omega(t-\varphi)) + \omega^2\ \cos(\omega(t-\varphi))\right) - kC\mathrm{e}^{-kt} =$$
$$-k\left[\mu + \frac{k\lambda}{k^2 + \omega^2} \left(k\cos(\omega(t-\varphi)) + \omega\ \sin(\omega(t-\varphi))\right) + C\mathrm{e}^{-kt} - \mu - \lambda\cos(\omega(t-\varphi))\right] \ .$$

Die μ in der eckigen Klammer heben sich weg, ebenso die Terme $-kC\mathrm{e}^{-kt}$ auf beiden Seiten der Gleichung und die Terme '$-k\omega \sin$ mal Bruch' auf beiden Seiten der Gleichung. Der verbleibende Rest ist

$$\frac{k\lambda}{k^2 + \omega^2}\omega^2\ \cos(\omega(t-\varphi)) = -\frac{k\lambda}{k^2 + \omega^2}k^2\ \cos(\omega(t-\varphi)) + k\lambda\ \cos(\omega(t-\varphi)) \ .$$

Den ersten Term rechts auf die linke Seite bringen und diese zusammen fassen liefert

$$k\lambda\ \cos(\omega(t-\varphi)) = k\lambda\cos(\omega(t-\varphi)) \qquad \Rightarrow \qquad 1 = 1 \ .$$

(8) ist also Lösung der inhomogenen DGL und kann in Aufgabenteil 3 als solche verwendet werden.

3. Wenden Sie jetzt die unter Pkt. (2) gefundene Lösung auf den in (2) gegebenen Temperaturgang an.

(a) Zeigen Sie, dass sich aus den zu den beiden Zeiten gemessenen Temperaturen ergibt

$$k = -\ln\left[\frac{12(k^2+\omega^2)+5k(k\,\cos(6\omega)+\omega\,\sin(6\omega))}{17(k^2+\omega^2)+5k(k\cos(5\omega)+\omega\sin(5\omega))}\right]\ . \tag{9}$$

(b) Gleichung (9) lässt sich zwar auf beliebig viele Weisen umschreiben, allerdings nicht nach k auflösen. Daher versuchen Sie ein iteratives Verfahren: Setzen Sie auf der rechten Seite eine Schätzung für k ein (z.B. den Wert aus dem 'quick and dirty approach') und bestimmen Sie daraus eine neue Schätzung für k. Wiederholen Sie dieses Verfahren, bis sich Ihre Annahmen für k stabilisieren – von Hand oder besser noch in MatLab. Dann haben Sie die gesuchte Lösung für k gefunden. Können Sie erkennen, warum? (Hinweis: Sie sollten $k \approx 0.334$ erhalten.)

(c) Die Körpertemeratur zum Zeitpunkt t_0 des Todes betrug 37°. Ferner ist $t(7) = 20$. Zeigen Sie, dass sich für t_0 ergibt

$$t_0 = 7 + \frac{1}{k}\ \ln\left[\frac{17(k^2+\omega^2)+5k(k\,\cos(5\omega)+\omega\,\sin(5\omega))}{34(k^2+\omega^2)+5k(k\,\cos(\omega(t_0-2))+\omega\,\sin(\omega(t_0-2)))}\right]\ .$$

(d) Schätzen Sie den Todeszeitpunkt ab (verwenden Sie z.B. wieder das Ergebnis aus Pkt. (1) der Aufgabe) und führen Sie wieder eine iterative Prozedur durch (wie in (3.b)). Versuchen Sie auch hier, die Iteration mit einem MatLab-Skript vorzunehmen. (Hinweis: Sie sollten $t \approx 5.26$ oder 5:15.6 erhalten.)

Lösung: das Hauptproblem im Lösungsverfahren haben wir uns bereits in Aufgabenteil (1) klar gemacht: wir besitzen keine Anfangsbedingung, aus der sich die Integrationskonstante bestimmen lässt sondern wir haben die Unbekannten Größen c, j und t_0, die durch Verwendung der drei Gleichungen (5) aus dem such dabei ergebenden Gleichungssystem bestimmt werden können. Da die kurze Variante des Einsetzens der Bedingungen als Integrationsgrenzen hier nicht durchführbar ist, muss die langsame Variante übernommen werden (das entspricht auch der Struktur der Fragen).

(a) zur Bestimmung von k werden die letzten beiden Bedingungen aus (5) benötigt. Einsetzen in die allemeine Lösung (8) der DGL liefert die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 20 &= 3 - \frac{5k}{k^2+\omega^2}\ (k\cos(5\omega)+\omega\,\sin(5\omega)) + C\mathrm{e}^{-7k} \qquad \text{und} \\ 15 &= 3 - \frac{5k}{k^2+\omega^2}\ (k\cos(6\omega)+\omega\,\sin(6\omega)) + C\mathrm{e}^{-8k} \end{aligned}$$

Das folgende Umschreiben der Gleichungen lehnt sich an Aufgabenteil 1 an: Exponentialfunktion auf eine Seite bringen, anschließend logarithmieren:

$$\begin{aligned} -7k + c &= \ln\left(17 + \frac{5k}{k^2+\omega^2}\ (k\cos(5\omega)+\omega\,\sin(5\omega))\right) \qquad \text{und} \\ -8k + c &= \ln\left(12 + \frac{5k}{k^2+\omega^2}\ (k\cos(6\omega)+\omega\,\sin(6\omega))\right)\ . \end{aligned}$$

Die Differenz der beiden Gleichungen liefert einen Ausdruck, auf dessen linker Seite ein k steht, dessen rechte Seite allerdings weiterhin von k abhängt:

$$\begin{aligned} k &= \ln\left(17 + \frac{5k}{k^2+\omega^2}\ (k\cos(5\omega)+\omega\,\sin(5\omega))\right) - \ln\left(12 + \frac{5k}{k^2+\omega^2}\ (k\cos(6\omega)+\omega\,\sin(6\omega))\right) \\ &= -\ln\left[\frac{12 + \frac{5k}{k^2+\omega^2}\ (k\cos(6\omega)+\omega\,\sin(6\omega))}{17 + \frac{5k}{k^2+\omega^2}\ (k\cos(5\omega)+\omega\,\sin(5\omega))}\right] \\ &= -\ln\left[\frac{12(k^2+\omega^2)+5k(k\,\cos(6\omega)+\omega\,\sin(6\omega))}{17(k^2+\omega^2)+5k(k\cos(5\omega)+\omega\sin(5\omega))}\right]\ . \end{aligned}$$

Das entspricht der Vorgabe in (9).

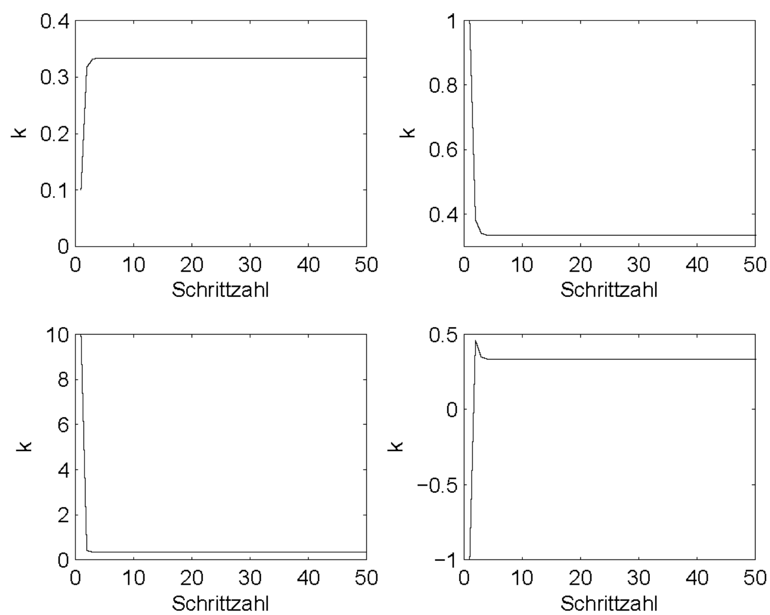
(b) das in der Aufgabenstellung vorgeschlagene Verfahren interpretiert (9) derart, dass k als eine Folge dargestellt wird, rekursiv definiert als

$$k_{i+1} = -\ln\left[\frac{12(k_i^2+\omega^2)+5k_i(k_i\,\cos(6\omega)+\omega\,\sin(6\omega))}{17(k_i^2+\omega^2)+5k_i(k_i\cos(5\omega)+\omega\sin(5\omega))}\right] \;.$$

Konvergiert diese Folge, so erhalten wir automatisch eine Lösung für k.
Als MatLab-Skript können Sie z.B. das folgende Fragment verwenden:

```
Anzahl=100;n=[1:1:Anzahl];a=zeros(Anzahl,1);kk(1)=0.1; om=pi/12;
for k=1:length(n)
zaehl(k+1)=12*((kk(k))^2+om^2)+5*kk(k)*(kk(k)*cos(6*om)+om*sin(6*om));
nenn(k+1)=17*((kk(k))^2+om^2)+5*kk(k)*(kk(k)*cos(5*om)+om*sin(5*om));
kk(k+1) = - log(zaehl(k+1)/nenn(k+1));
end
plot(kk)
```

Mit dem aus Aufgabenteil 1 bestimmten Wert für k konvergiert die reihe sehr schnell, etwas Spielen mit den Startwerten zeigt, dass die Folge für beliebige Startwerte schnell (d.h. innerhalb von wenigen Schritten) gegen den in der Aufgabenstellung gegebenen Wert 0.364 konvergiert:



(c) Den Todeszeitpunkt t_0 können wir nun aus der allgemeinen Lösung (8) mit Hilfe der ersten Bedingung in (5) bestimmen. Einsetzen liefert

$$37 = 3 - \frac{5k}{k^2+\omega^2}\;(k\cos(5\omega)+\omega\;\sin(5\omega)) + C\mathrm{e}^{-kt_0}$$

und damit nach Umformen:

$$t_0 = -\frac{1}{k}\ln\left(34+\frac{5k}{k^2+\omega^2}(k\;\cos(\omega(t_0-2))+\omega\;\sin(\omega(t_0-2)))\right)\;.$$

Auf Grund des Hinweises in der Aufgabenstellung verwenden wir als zweite Gleichung das bereits bekannte

$$-7 = \frac{1}{k}\ln\left(17+\frac{5k}{k^2+\omega^2}\;(k\cos(5\omega)+\omega\;\sin(5\omega))\right)\;.$$

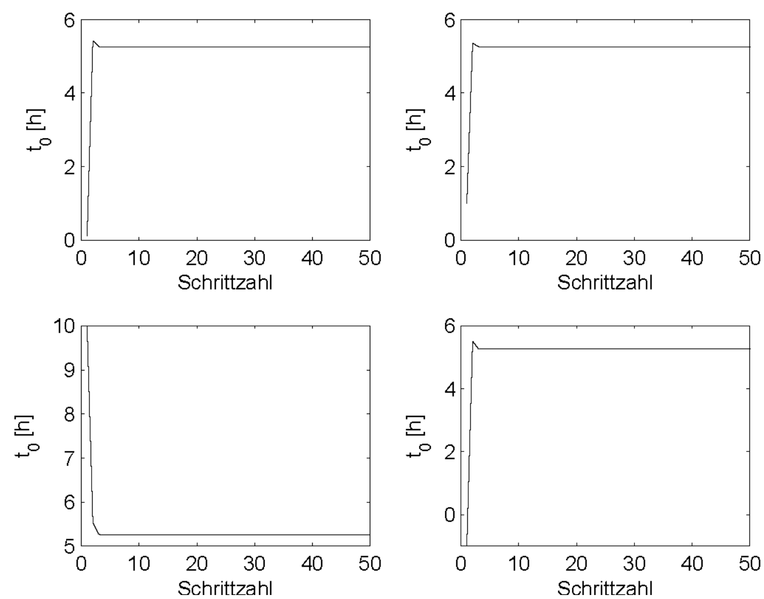
Addition der beiden Gleichungen liefert dann den in der Aufgabenstellung gegebenen Ausdruck:

$$\begin{aligned}
t_0 &= 7 + \frac{1}{k} \ln \left(17 + \frac{5k}{k^2+\omega^2} \, (k \cos(5\omega) + \omega \, \sin(5\omega)) \right) \\
&\quad - \frac{1}{k} \ln \left(34 + \frac{5k}{k^2+\omega^2} (k \, \cos(\omega(t_0-2)) + \omega \, \sin(\omega(t_0-2))) \right) \\
&= 7 + \frac{1}{k} \ln \left[\frac{\left(17 + \frac{5k}{k^2+\omega^2} \, (k \cos(5\omega) + \omega \, \sin(5\omega)) \right)}{\left(34 + \frac{5k}{k^2+\omega^2} (k \, \cos(\omega(t_0-2)) + \omega \, \sin(\omega(t_0-2))) \right)} \right] \\
&= 7 + \frac{1}{k} \, \ln \left[\frac{17(k^2+\omega^2) + 5k(k \, \cos(5\omega) + \omega \, \sin(5\omega))}{34(k^2+\omega^2) + 5k(k \, \cos(\omega(t_0-2)) + \omega \, \sin(\omega(t_0-2)))} \right] \, .
\end{aligned}$$

(d) Die Idee zur Bestimmung von t_0 folgt der bereits in Teil (b) für k skizzierten, d.h. wir interpretieren den für t_0 gewonnen Ausdruck wieder als eine Rekursionsformel für eine (hoffentlich genauso schnell) konvergierende Folge:

$$t_{0,i+1} = 7 + \frac{1}{k} \, \ln \left[\frac{17(k^2+\omega^2) + 5k(k \, \cos(5\omega) + \omega \, \sin(5\omega))}{34(k^2+\omega^2) + 5k(k \, \cos(\omega(t_{0,i}-2)) + \omega \, \sin(\omega(t_{0,i}-2)))} \right] \, .$$

Die Behandlung in MatLab erfolgt daher ähnlich der in Aufgabenteil (b). Spielen mit verschiedenen (auch sinnlosen) Startwerten zeigt, dass auch diese Folge schnell konvergiert (und zwar gegen den Wert 5.26, entsprechend 5:15.6):



Der spätere Todeszeitpunkt im Vergleich zu der einfachen Abschätzung in Aufgabenteil 1 ist sinnvoll: in Aufgabeteil 1 haben wir durchgängig die relativ hohe Umgebungstemperatur von 7 Uhr angenommen. dann ist die Differenz $T - U$ relativ klein, so dass auch der Wärmeverlust gering ist. Der reale Temperaturverlauf ist jedoch derart, dass die Temperaturen vor dem Auffinden der Leiche geringer waren als zum Auffindezeitpunkt, so dass der Wärmeverlust entsprechend größer war und der Todeszeitpunkt daher näher am Zeitpunkt des Auffindens liegen muss als durch die Abschätzung in Aufgabenteil 1 nahe gelegt.

Diese kurze Diskussion zeigt auch, warum Sie sich in Aufgabeteil 4 Gedanken über die Robustheit Ihres Verfahrens machen sollen – einfache Annahmen (wie eine falsche Temperatur) und ungenaue Messungen (wie im letzten Teil von Aufgabenteil 1 andiskutiert) führen zu sehr unterschiedlichen Ergebnissen. Sie sollen aus Ihrer Ratlosigkeit, was denn hier schon wieder gefragt sein könnte, selbst die Erfahrung machen, dass die Anwendung von Physik auf reale Probleme etwas anderes ist als Ihnen in den normalen Übungsaufgaben suggeriert wird.

4. Sie wissen aus leidiger Erfahrung, dass in einem Gerichtsverfahren immer nach möglichen Fehlerquellen in den Gutachten gesucht wird. Daher Stellen Sie die allgemeine Lösung aus Pkt. (2) für den in (2) gegebenen Temperaturverlauf und verschiedene Werte von k im Bereich [0.1,0.5] graphisch dar. Suchen Sie sich (in der Datei oder im Graphen) für die einzelnen Kurven jeweils die Stellen, an denen die Temperatur innerhalb einer Stunde von 20°C auf 15° absinkt und bestimmen Sie daraus die Werte für t_0, die sich für die verschiedenen k ergeben.

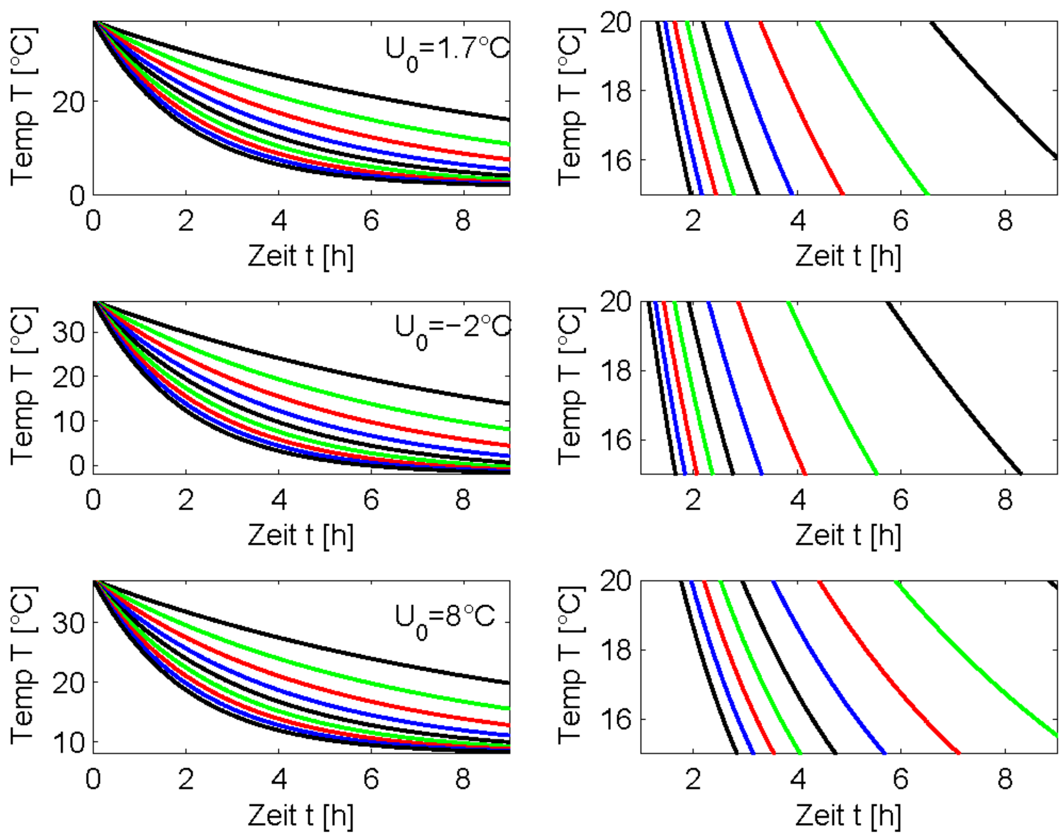
   Lösung: beginnen wir mit einer Vorbetrachtung und nehmen wie in Aufgabenteil 1 an, dass die Umgebungstemperatur konstant ist. Dann lässt sich der Temperaturverlauf $T(t)$ bestimmen als

$$\int_{37}^{T(t)} \frac{\mathrm{d}T}{T - U_0} = -k \int_{t_0}^{t} k \,\mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad \ln \frac{T - U_0}{37 - U_0} = -k(t - t_0)$$

   bzw. nach Auflösen nach T:

$$T(t) = (37 - U_0)\,\mathrm{e}^{-k(t-t_o)} + U_0 \;.$$

   Zumindest für konstantes U_0 lässt sich damit der Einfluss des Parameters k auf den Temperaturverlauf untersuchen. Dazu verwenden wir einmal als Umgebungstemperatur $U_0 = 1.7$°C (wie in Aufgabenteil 1), zum anderen die sich aus dem Temperaturverlauf (2) ergeben Extrema von -2°C und 8°C. Mit $t_0 = 0$ als dem Startzeitpunkt der Abkühlung erhalten wir für diese drei Umgebungstemperaturen die unten gezeigten Verläufe; im rechten Teil ist jeweils nur der Temperaturbereich zwischen 15 und 20°C betrachtet: nur die Kurven können sinnvolle Lösungen des Problems sein, bei denen die Temperaturänderung zwischen diesen beiden Werten in ungefähr einer Stunde erfolgt. Der Parameter an den einzelnen Kurven ist k im Bereich von 0.1 bis 0.5 in Schritten von 0.05.



Da die mittlere Steigung innerhalb des Intervalls von 15 und 20°C bei konstanter Umgebungstemperatur nur durch k bestimmt ist, findet sich in jedem Kurvensatz (d.h. für jede Umgebungstemperatur) nur ein Wert von k, für den die Beobachtungen erfüllt sind. Allerdings ergibt sich für jede der drei Umgebungstemperaturen ein anderer Wert von k.

Was können wir daraus für eine variable Umgebungstemperatur lernen: selbst bei konstantem k ergeben sich unterschiedliche Temperaturverläufe in Abhängigkeit von der Startzeit t_0. Inder allgemeinen Lösung (8) der DGL können wir die Integrationskonstante in Abhängigkeit von der Startzeit bestimmen aus $T(t_0) = 37$:

$$37 = \mu + \frac{k\lambda}{k^2+\omega^2}\left[k\cos(\omega(t_0-\varphi)) + \omega\sin(\omega(t_0-\varphi))\right] + c\,\mathrm{e}^{-kt_0}$$

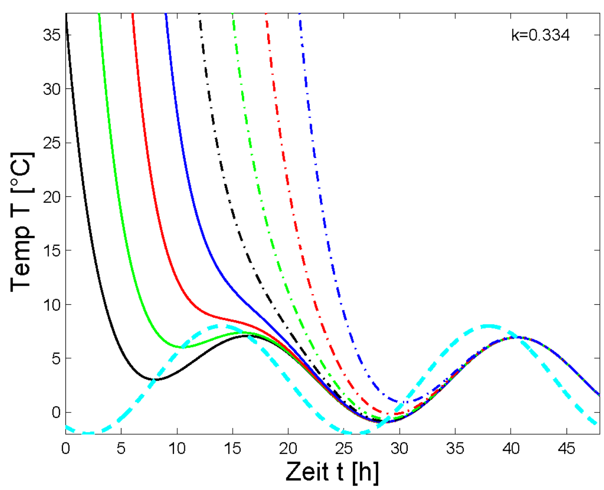
liefert nach Umformen

$$c = \mathrm{e}^{kt_0}\left\{37 - \mu - \frac{k\lambda}{k^2+\omega^2}\left[k\,\cos(\omega(t_0-\varphi)) + \omega\,\sin(\omega(t_0-\varphi))\right]\right\}\,.$$

Einsetzen in (8) liefert als allgemeine Lösung der DGL (in Abhängigkeit von t_0):

$$\begin{aligned} T(t) &= \mu + \frac{k\lambda}{k^2+\omega^2}\left[k\cos(\omega(t-\varphi)) + \omega\sin(\omega(t-\varphi))\right] \\ &\quad + \left\{37 - \mu - \frac{k\lambda}{k^2+\omega^2}\left[k\,\cos(\omega(t_0-\varphi)) + \omega\,\sin(\omega(t_0-\varphi))\right]\right\}\mathrm{e}^{-k(t-t_0)}\,. \end{aligned}$$

Diese Lösung können wir als erstes für festes k (z.B. den Wert aus Aufgabenteil 3, Unterpunkt (b)) und verschiedene Startzeiten $t_0 = 3n$ ($n = 0, ...7$) untersuchen:

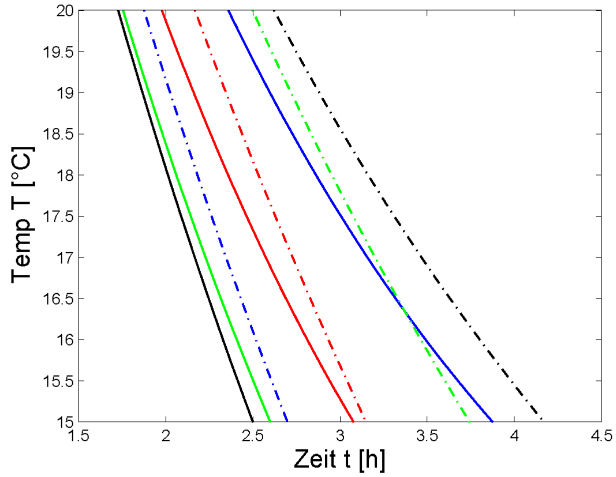


Untersuchen wir zuerst, ob die Lösung überhaupt physikalisch sinnvoll ist. Die Ausgangsgleichung $\dot{T} = -k(T - U(t)$ beschreibt uns die Änderung von T in Abhängigkeit vom Temperaturunterschied zwischen dem Körper und der Umgebung. Dabei treten drei Fälle auf:

- ist der Körper wärmer als seine Umgebung, $T > U(t)$, so ist $\dot{T} < 0$, d.h. die Temperatur des Körpers verringert sich durch Wärmeabgabe an die Umgebung.
- haben Körper und Umgebung identische Temperatur, $T = U(t)$, so ist $\dot{T} = 0$ und die Temperatur bleibt konstant.
- ist der Körper kühler als seine Umgebung, $T < U(t)$, so ist $\dot{T} > 0$, d.h. die Temperatur des Körpers erhöht sich.

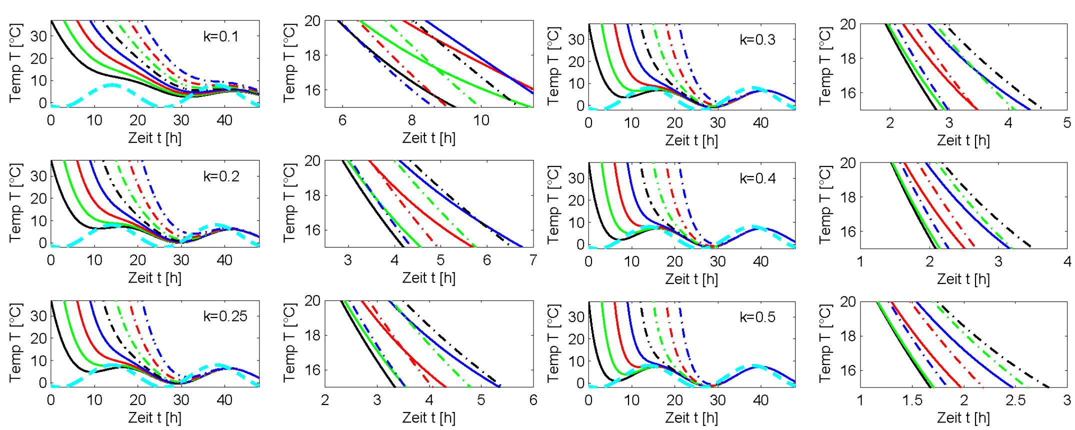
Alle drei Fälle lassen sich in der obigen Abbildung erkennen: die gestrichelte Kurve gibt die Umgebungstemperatur, die anderen Kurven jeweils die Temperatur des Körpers für verschiedenen Zeiten t_0. Die lokalen Extrema des Temperaturverlaufs fallen entsprechend immer mit den Schnittpunkten zwischen $T(t)$ und $U(t)$ zusammen. Außerdem ist es physikalisch sinnvoll, dass die Kurven für späte Zeiten identisch sind: dann ist der Startzeitpunkt t_0 egal und die Temperatur T wird nur noch durch die Umgebungstemperatur bestimmt.

Die Unterschiede in den Temperaturverläufen sind offensichtlich: bei einem nächtlichen Mord (durchgezogene schwarze und grüne Kurven) sinken die Temperaturen auf Grund der geringen Umgebungstemperatur sehr schnell während die höheren Temperaturen um die Mittagszeit mit einem langsameren Absinken der Temperatur verbunden sind.



Die voran gegangene Abbildung betrachtet nur den Temperaturbereich von 15 bis 20°, die Kurven für die verschiedenen t_0 sind alle so verschoben, dass der t_0 in der graphischen Darstellung auf $t = 0$ fällt. Dadurch lassen sich die mittleren Steigungen in diesem Temperaturbereich besser vergleichen: die Temperaturabnahme von 20 auf 15°C erfolgt trotz des konstanten k je nach Startzeitpunkt t_0 innerhalb von ca. 1/2 Stunden bis hin zu ca. 3/2 Stunden. Lassen wir (entsprechend der Messfehler) einen etwas größeren Bereich von Temperaturen (von 14.5 bis 20.5°C zu, so werden die Unterschiede noch größer.

Die Unsicherheit im Verfahren entsteht dadurch, dass es auf zwei (fehlerbehafteten) Messungen beruht, aus denen zwei Parameter, der Wärmeabgabekoeffizient k und der Todeszeitpunkt t_0, zu bestimmen sind. Da die beiden Temperaturen mit Fehlern behaftet sind, ist bereits k fehlerhaft. Dieser Fehler setzt sich (zusammen mit dem Fehler der Temperatuemessungen) in die Bestimmung von t_0 fort. Formale Verfahren zur Fehlerrechnung kennen wir noch nicht, daher schätzen wir die Einflüsse möglicher Fehler einfach durch Variation der Parameter ab. Stellen wir also die Temperaturveröäufe wie in den beiden voran gegangenen Abbildungen für verschiedenen Werte von k dar.



Kleine Werte von k entsprechen einer guten Isolation: so unterscheiden sich die Temperaturkurven für $k = 0.1$ selbst nach einem Tag noch in Abhängigkeit von t_0. Außerdem findet sich hier kein Absinken von $20°$ auf $15°$ innerhalb von weniger als zwei Stunden, d.h. unabhängig von t_0 lassen sich (selbst bei Annahme eines Fehlers), die Beobachtungen mit einer so guten Isolation nicht reproduzieren. Auch für $k = 0.2$ ist die mittlere Temperaturabnahme unabhängig von t_0 in der Regel zu groß, lediglich bei einem Mord kurz vor Mitternacht würde auf Grund der großen Differenz zwischen T und der Umgebungstemperatur eine (mit einer fehlerbehafteten Messung vereinbare) Temperaturabnahme auftreten – allerdings wäre die Temperatur dann entgegen den Beobachtungen bereits kurz nach Mitternacht auf 20°C abgesunken und nicht erst beim Auffinden der Leiche um 7 Uhr.

Auf diese Weise können wir uns weiter durch die Abbildung hangeln und den Bereich möglicher sinnvoller Kombinationen von k und t_0 eingrenzen. Entsprechend der Argumentation bei $k = 0.1$ gilt für schlechte Isolierung ($k \geq 0.4$): hier erfolgt die Temperaturabnahme von 20 auf 15°C unabhängig von t_0 zu schnell, d.h. diese Werte können wir ausschließen.

Bearbeitungshinweise:

Sie sollen bei der Bearbeitung dieses Übungszettels nicht nur zeigen, dass Sie die DGL lösen können sondern Sie sollen auch darstellen, dass Sie mit den zugehörigen Grundbegriffen umgehen können. Daher sollen Sie Ihre Verfahren erläutern sowie Lösungen durch auf andere Weise gefundene Lösungen überprüfen – so, wie ein Gutachter seine Ergebnisse aufarbeiten müsste, damit sie von anderen Fachleuten in einem (Gerichts-)Verfahren bewertet werden können. Bei den iterativen Verfahren bitte die MatLab-Skripte mit angeben.