

Übungsaufgaben Gekoppelte Differentialgleichungen

1. Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 3x = 0$$

mit Hilfe einer Potenzreihe.

Lösung: als Ansatz wird eine Potenzreihe der Form

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

mit den Ableitungen

$$\dot{x} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} \quad \text{und} \quad \ddot{x} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2}$$

gewählt und in die DGL eingesetzt:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n t^{n-2} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n t^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0.$$

Als erstes verschieben wir die Indizes so, dass wir die Summen zusammen fassen können

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} t^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3(n+1) a_n t^n = 0$$

und erhalten

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + 3(n+1) a_n] t^n = 0.$$

Diese Gleichung muss für alle t erfüllt sein, d.h. es muss gelten

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1) a_{n+2} + 3(n+1) a_n] = 0.$$

Damit erhalten wir als Rekursionsformel für die a_n :

$$a_{n+2} = -\frac{3}{n+2} a_n.$$

Jeder Koeffizient ergibt sich also aus dem vorletzten Koeffizienten der Reihe d.h. wir müssen gerade und ungerade Koeffizienten getrennt betrachten. Für die geraden Koeffizienten beginnen wir mit $n = 0$ und erhalten

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{3}{2} a_0, \\ a_4 &= -\frac{3}{4} a_2 = -\frac{3^2}{4 \cdot 2}, \\ a_6 &= -\frac{3}{6} a_4 = -\frac{3^3}{6 \cdot 4 \cdot 2} = -\frac{3^3}{2^3 \cdot 3!} a_0. \end{aligned}$$

Das Verfahren lässt sich fortsetzen und wir erhalten als allgemeine Formel für die geraden Koeffizienten

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n 3^n}{2^n n!} a_0.$$

Für die ungeraden Koeffizienten beginnen wir mit $n = 1$ und erhalten

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{3}{3} a_1, \\ a_5 &= -\frac{3}{5} a_3 = \frac{3}{5} a_1, \\ a_7 &= -\frac{3}{7} a_5 = -\frac{3^2}{7 \cdot 5} a_1 = -\frac{3^3}{7 \cdot 5 \cdot 3} a_1 \end{aligned}$$

und damit als allgemeine Formel für die ungeraden Koeffizienten

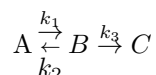
$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)(2n-1)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1} a_1 = \frac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)!!} a_1$$

mit $(2n+1)!! = (2n+1) \cdot (2n-1) \cdot \dots \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$. Für die Gesamtlösung ergibt sich damit

$$x(t) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{2^n n!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^n}{(2n+1)!!} x^{2n+1}.$$

Die Koeffizienten a_0 und a_1 sind, falls diese gegeben sind, aus den Anfangswerten zu bestimmen.

2. Die Ratengleichungen für eine chemische Reaktion



sind gegeben durch

$$\frac{dA}{dt} = -k_1 A + k_2 B, \quad \frac{dB}{dt} = k_1 A - (k_2 + k_3) B \quad \text{und} \quad \frac{dC}{dt} = k_3 B.$$

Lösen Sie dieses System gekoppelter DGLs für den Spezialfall $k_1 = k_3 = 2$ und $k_2 = 1$ mit den Anfangsbedingungen $A(0) = A_0$ und $B(0) = C(0) = 0$. Nebenbemerkung: die Summe der Gleichungen ergibt $d(A + B + C)/dt = 0$. Was bedeutet das physikalisch?

Lösung: mit einem Vektor

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix}$$

der Konzentrationen der Substanzen A , B und C lassen sich die Ratengleichungen in Matrixform schreiben als

$$\dot{\vec{c}} = \begin{pmatrix} \dot{A} \\ \dot{B} \\ \dot{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 & k_2 & 0 \\ k_1 & -(k_2 + k_3) & 0 \\ 0 & k_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \mathbf{R} \vec{c}.$$

Zur Lösung des Systems linearer Differentialgleichungen müssen wir die Eigenwerte der Matrix \mathbf{R} bestimmen, d.h. die Gleichung

$$|\mathbf{D} - \lambda \mathbf{E}| = \begin{vmatrix} -k_1 - \lambda & k_2 & 0 \\ k_1 & -(k_2 + k_3) - \lambda & 0 \\ 0 & k_3 & -\lambda \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

muss gelöst werden. Für die in der Aufgabenstellung gegebenen k_i erhalten wir

$$\begin{aligned} |\mathbf{D} - \lambda \mathbf{E}| &= \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 & 0 \\ 2 & -3 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-2 - \lambda)(-3 - \lambda)(-\lambda) - 2(-\lambda) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [(-2 - \lambda)(-3 - \lambda) - 2]\lambda \\
&= [6 + 5\lambda + \lambda^2 - 2]\lambda \\
&= [\lambda^2 + 5\lambda + 4]\lambda \\
&= (1 + \lambda)(4 + \lambda)\lambda \stackrel{!}{=} 0
\end{aligned}$$

und damit für die Eigenwerte

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = -4 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 0.$$

Der Eigenvektor zu λ_3 bestimmt sich aus

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{31} \\ u_{32} \\ u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2u_{31} + u_{32} \\ 2u_{31} - 3u_{32} \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0.$$

Damit ist $u_{31} = u_{32} = 0$ und u_{33} beliebig, d.h. der Eigenvektor \vec{u}_3 zu λ_3 ist

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Eigenvektor zu λ_1 bestimmt sich aus

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} \\ u_{12} \\ u_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_{11} + u_{12} \\ 2u_{11} - 2u_{12} \\ 2u_{12} + u_{13} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

Damit ist $u_{13} = -2u_{12}$ und $u_{11} = u_{12}$, d.h. der Eigenvektor zu λ_1 ist

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Auf eine Normierung haben wir verzichtet – das holen wir bei der Bestimmung der Integrationskonstante automatisch nach.

Der Einheitsvektor zu λ_2 ergibt sich aus

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{21} \\ u_{22} \\ u_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{21} + u_{22} \\ 2u_{21} + u_{22} \\ 2u_{22} + 4u_{23} \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 0.$$

Damit ist $u_{22} = -2u_{21}$ und $u_{23} = u_{21}$ und der Einheitsvektor zu λ_2 ist

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung wird damit

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} = \sum_i d_i \vec{u}_i e^{\lambda_i} = d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + d_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-4t} + d_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei die Integrationskonstanten d_i aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen sind:

$$\begin{pmatrix} A_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = d_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + d_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + d_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder

$$A_0 = d_1 - d_2, \quad 0 = d_1 + 2d_2 \quad \text{und} \quad d_3 = A_0.$$

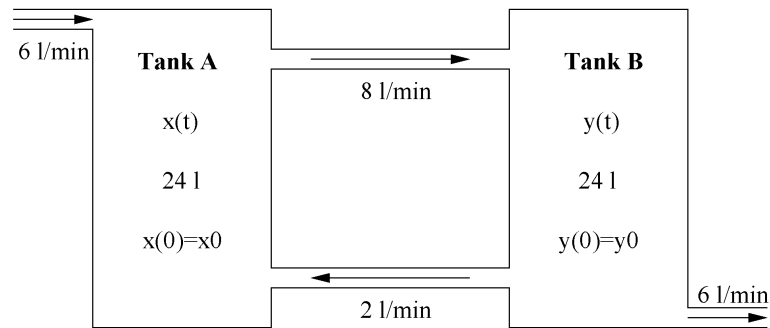
Damit ist $d_1 = 2A_0/3$ und $d_2 = -A_0/3$.

$$\vec{c}(t) = \frac{A_0}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + \frac{2A_0}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} + A_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Physikalisch bedeutet $d(A + B + C)/dt = 0$ nur, dass sich die Summe der Reaktionspartner mit der Zeit nicht ändert. Das ist nur eine spezielle Formulierung einer Kontinuitätsgleichung.

3. System gewöhnlicher DGLs:

Zwei Tanks, die jeweils 24 l Flüssigkeit enthalten, sind durch zwei Rohre miteinander verbunden:



Durch diese fließt Flüssigkeit von A nach B mit einer Rate von 8 l/min, von B nach A mit einer Rate von 2 l/min. Innerhalb jedes Tanks ist die Flüssigkeit gut durchmischt. In Tank A fließt zusätzlich reines Wasser mit einer Rate von 6 l/min, die Mischung wird aus Tank B entnommen, ebenfalls mit einer Rate von 6 l/min. Zur Zeit $t = 0$ enthält Tank A x_0 Salz, Tank B y_0 kg. Das zugehörige Gleichungssystem auf für die Masse des Salzes in Tanks A ($x(t)$) und B ($y(t)$) ist

$$\dot{x} = \frac{2}{24}y - \frac{8}{24}x = \frac{y}{12} - \frac{x}{3} \quad \text{und} \quad \dot{y} = \frac{8}{24}x - \frac{2}{24}y = \frac{x}{3} - \frac{y}{3}.$$

Lösen Sie das Gleichungssystem Welche Lösung erhalten Sie für $t \rightarrow \infty$?

Lösung:

$$x(t) = -\left(\frac{y_0 - 2x_0}{4}\right) e^{-t/2} + \left(\frac{y_0 + 2x_0}{4}\right) e^{-t/6}$$

$$y(t) = \left(\frac{y_0 - 2x_0}{2}\right) e^{-t/2} + \left(\frac{y_0 - 2x_0}{2}\right) e^{-t/6}$$

4. Der harmonische Oszillator $\ddot{x} + kx = 0$ wird durch eine DGL zweiter Ordnung beschrieben. Zerlegen Sie diese DGL in ein System von gekoppelten DGLs erster Ordnung und lösen Sie dieses Eigenwertproblem.

Lösung: Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung sind wohl erprobt und optimiert; Differentialgleichungen höherer Ordnung kann man mit diesen Verfahren lösen, wenn man die DGL n ter Ordnung in ein System von n DGLs erster Ordnung überführt. Bei der Schwingungsgleichung verwenden wir dazu den gleichen Trick wie beim Fall mit Reibung: wir ersetzen \dot{x} durch eine neue variable v . Dann ergeben sich die DGLs

$$\dot{v} = -\omega_0^2 x = \quad \text{und} \quad \dot{x} = v.$$

In Matrixschreibweise ist der Vektor der gesuchten Größen $\vec{c} = (v, x)$ und damit das Gleichungssystem in Matrixschreibweise:

$$\dot{\vec{c}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{c}.$$

Exponentialansatz $\vec{c} \sim \vec{c}_0 e^{\lambda t}$ liefert als Eigenwertgleichung $|\mathbf{D} - \lambda \mathbf{E}| = 0$, d.h.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\omega_0^2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \omega_0^2 \stackrel{!}{=} 0$$

mit den wohlbekannten Lösungen $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_0$. Damit ergibt sich als (komplexe) Lösung des Gleichungssystems

$$\vec{c} = \vec{a} e^{i\omega_0 t} + \vec{b} e^{-i\omega_0 t} =$$

mit den aus den Anfangsbedingungen zu bestimmenden komplexen Integrationskonstanten \vec{a} und \vec{b} . Beschränkung auf den Realteil wieder mit Hilfe der Euler-Gleichung $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ liefert das bekannte Ergebnis

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} v(t) \\ x(t) \end{pmatrix} = \vec{a}_0 \cos(\omega_0 t) + \vec{b}_0 \sin(\omega_0 t)$$

mit \vec{a}_0 und \vec{b}_0 als reellen Integrationskonstanten.

5. Gekoppelte Fadenpendel: zwei Fadenpendel der Länge l und der Masse m schwingen in einer Ebene und sind durch eine Feder mit der Federkonstante k verbunden. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie sie.

Lösung: wir beschränken uns auf kleine Auslenkungen $x = l\varphi$. Die rücktreibende Kraft ist jeweils die Komponente der Gravitationskraft senkrecht zum Faden, d.h. $F_R = mg \sin \varphi$. Taylor-Entwicklung des Sinus erlaubt es, diesen für kleine Auslenkungen durch den Winkel zu ersetzen, d.h. die Bewegungsgleichung für ein Fadenpendel ist

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Diese Gleichung gilt für jedes der Fadenpendel, d.h. für zwei nicht gekoppelte Fadenpendel ist das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 &= 0, \\ \ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Die Feder koppelt die beiden Pendel (und damit auch die beiden Bewegungsgleichungen). Da wir ohnehin nur kleine Auslenkungen betrachten, ist $l\varphi_i$ jeweils die Auslenkung der i ten Masse und damit $kl(\varphi_1 - \varphi_2)$ die Kopplung zwischen den beiden Pendeln. Die Bewegungsgleichungen sind damit

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 + \omega_0^2(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\ \ddot{\varphi}_2 + \omega_0^2 \varphi_2 &= \omega_0^2(\varphi_2 - \varphi_1) = 0 \end{aligned}$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\ddot{\vec{\varphi}} = \mathbf{A} \vec{\varphi} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir zwar andere Buchstaben aber formal die gleiche DGL wie beim Federpendel – und können die Lösung von dort übernehmen.

Exponentialansatz $\vec{\varphi} = \vec{u} e^{\lambda t}$ liefert

$$\lambda^2 \vec{u} e^{\lambda t} = \mathbf{A} \vec{u} e^{\lambda t}$$

und damit als Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte

$$\begin{vmatrix} -2\omega_0^2 - \lambda^2 & \omega_0^2 \\ \omega_0^2 & -2\omega_0^2 - \lambda^2 \end{vmatrix} \stackrel{!}{=} 0$$

oder

$$(2\omega_0^2 - \lambda^2)(2\omega_0^2 - \lambda^2) - \omega_0^4 \stackrel{!}{=} 0.$$

Diese Gleichung ist erfüllt für $\lambda_1^2 = -\omega_0^2$ und $\lambda_2^2 = -3\omega_0^2$, d.h. wir erhalten $\lambda_1 = i\omega_0$ und $\lambda_2 = i\sqrt{3}\omega_0$. Die allgemeine komplexe Lösung ist daher

$$\vec{z}(t) = \vec{A}_1 e^{i\omega_0 t} + \vec{A}_2 e^{-i\omega_0 t} + \vec{A}_3 e^{i\sqrt{3}\omega_0 t} + \vec{A}_4 e^{-i\sqrt{3}\omega_0 t}$$

mit den aus den Anfangsbedingungen zu bestimmenden komplexen Integrationskonstanten \vec{A}_i .

Die Lösung λ_1 entspricht der für den harmonischen Oszillator. In diesem Fall schwingen beide Massen in Phase, verhalten sich also wie eine einzige Masse (es ist egal, ob sie durch die mittlere Feder gekoppelt sind oder nicht) und die Lösung ist für Anfangsbedingungen maximale Auslenkung $\vec{x}_0 = (x_0, x_0)$ und verschwindende Geschwindigkeit $\dot{\vec{x}}_0 = 0$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0 \cos(\omega_0 t).$$

Die Lösung λ_2 entspricht der Situation, dass beide Massen genau entgegengesetzt schwingen.