Übungsaufgaben Vektoren

1. Gegeben sind die Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten
$$\vec{e}_\varrho = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
und Kugelkoordinaten:
$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\, \cos\varphi \\ \sin\vartheta\, \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} , \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta\, \cos\varphi \\ \cos\vartheta\, \sin\varphi \\ -\sin\vartheta \end{pmatrix} .$$
Zeigen Sie für beide Sätze von Einheitsvektoren, dass diese ein Orthonormalsystem bilden.

2. Auf Grund des Lärms in der Vorlesung haben Sie von den Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten nur $\vec{e}_r$ und $\vec{e}_\varphi$ (wie in Aufg. 1 gegeben) mitbekommen. Sie wissen, dass Kugelkoordinaten ein Orthonormalsystem bilden. Also bestimmen Sie aus dieser Kenntnis $\vec{e}_\vartheta$

   Hinweis zum Weiterdenken: im 3D haben wir das Kreuzprodukt für den senkrecht stehenden Vektor – in anderen Dimensionen funktioniert dies nicht. Heißt das, dass man in höheren Dimensionen nicht in der Lage ist, einen auf anderen Vektoren senkrecht stehenden Vektor zu finden?

3. Ein Vektor $\vec{r}_1$ wird in Kugelkoordinaten durch $\varphi_1 = \pi/4$, $\vartheta_1 = \pi/4$ und $r_1 = \sqrt{3}$ beschrieben. Geben Sie ihn in kartesischen Koordinaten an – Finger weg von Rechnern, Formelsammlung o.ä.. Ein zweiter Vektor $\vec{r}_2$ wird durch $\varphi_2 = 7\pi/4$, $\vartheta_2 = 3\pi/4$ und $r_2 = \sqrt{12}$ beschrieben. Überprüfen Sie, ob die beiden Vektoren orthogonal sind. Bestimmen Sie einen Vektor, der senkrecht auf den beiden steht.

4. Überprüfen sie die Gültigkeit der bac-cab-Regel
$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) .$$

5. In einer etwas verschrobenen Welt bewegt sich ein Bergsteiger entlang eines Weges $\vec{s} = (200, 6300, 2100)$ m gegen eine Gravitationskraft von $\vec{F} = (100, -200, 1000)$ N.
   (a) Welche Arbeit verrichtet er dabei?
   (b) Wie groß ist der Winkel zwischen Kraft und Weg?
   (c) Bestimmen Sie die Projektionen der Kraft auf den Weg und des Weges auf die Kraft.
   (d) Wie viele Tafeln Schokolade (500 kJ pro Tafel) darf er sich am Ende zum Ausgleich gönnen?

6. Die Vektoren
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} , \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 9 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix}$$
spannen ein Parallelepiped auf. Bestimmen Sie
   (a) den von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossenen Winkel,
   (b) den Flächeninhalt des von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms,
   (c) den Mittelpunkt der Diagonalen dieses Parallelograms,

(d) einen auf dem Parallelogramm senkrecht stehenden Einheitsvektor, und

(e) das Volumen des von allen drei Vektoren auf gespannten Parallelepipeds.

7. Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren eine Basis für den $\mathbb{R}^3$ bilden: (1,0,-2), (1,0,-1) und (0,2,-1). Wenn ja, handelt es sich um ein Orthonormalsystem?

8. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (3, -2, 0, 4)$, $\vec{b} = (5, 0, 0, 1)$, $\vec{c} = (-6, 1, 0, 1)$ und $\vec{d} = (2, 0, 0, 3)$.
(a) Überprüfen Sie, ob die Vektoren linear unabhängig sind.
(b) Überprüfen Sie ferner, ob Vektoren paarweise orthogonal sind.
(c) Bestimmen Sie einen Vektor, der auf $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ senkrecht steht.

9. Gegeben sind zwei von Null verschiedene Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aus dem $\mathbb{R}^3$ mit $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. Zeigen Sie, dass sich ein Vektor $\vec{y}$ finden lässt mit $\vec{b} = a \times \vec{y}$ und $\vec{a} \cdot \vec{y} = 0$. Zeigen Sie damit, dass sich jeder Vektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ eindeutig darstellen lässt in der Form

$$\vec{r} = \lambda\vec{a} + \vec{a} \times \vec{y} \qquad \lambda \in \mathbb{R}\ .$$

10. Überprüfen Sie, ob die folgenden mathematischen Objekte der Definition eines Vektorraums genüge tun: (a) die Menge $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen; (b) die Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen; (c) die Menge $\mathbb{E}$ der Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^2$; (d) die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.