Spickzettel Folgen und Reihen

- **Definition Konvergenz:** Eine Folge (a_n) heißt *konvergent*, wenn sie einen Grenzwert A hat, d.h. wenn es ein $\varepsilon > 0$ gibt derart, dass für alle $n > n_\varepsilon$ gilt $|a_n - A| < \varepsilon$.
- **Allgemeines Konvergenzprinzip (Cauchy-Kriterium)** Eine Folge (a_n) ist *konvergent* genau dann, wenn es ein zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $n, m > n_\varepsilon$ gilt $|a_n - a_m| < \varepsilon$.
- **Konvergenztest Reihen:**
  – Vergleichstest: Gegeben sind zwei Folgen (a_n) und (b_n) mit $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle n. Konvergiert die Reihe $\sum b_n$, so konvergiert auch die Reihe $\sum a_n$. Ist dagegen $\sum a_n$ divergent, so ist es auch $\sum b_n$.
  – Leibnitz-Kriterium: Für eine Nullfolge (a_n) mit ausschließlich positiven Gliedern, d.h. $a_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, gilt, dass die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\inf}(-1)^n a_n$ immer konvergiert.
  – Quotienten-Kriterium:

$$\sum_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \begin{cases} < 1 & S \text{ konvergiert} \\ > 1 & S \text{ divergiert} \end{cases} .$$

- **Taylor-Reihe**

$$f(x+h) = \sum_{i=0}^{n} \frac{h^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n} = f(x) + \frac{h}{1!} f'(x) + ... + \frac{h^n}{n!} f^n(x) + R_n .$$

$$\text{Entwicklung um } a: \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \cdot (x-a)^n$$

- **McLaurin Reihe**

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n$$

- **Häufige Reihen**

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... + \frac{1}{n!}x^n + ... \qquad \mathrm{e} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

$$\text{geometrische Reihe} \qquad \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$$

$$\text{logarithmische Reihe} \qquad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\text{binomische Reihe} \qquad (1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 - \ldots .$$