

# Spickzettel Integration (Mehrfachintegrale)

## Grundbegriffe

- Ist der Grenzwert  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \sum_{x_1}^{x_2} \sum_{y_1}^{y_2} f(x, y) \Delta x \Delta y$  vorhanden, so heißt er *Doppelintegral*:

$$\int f(x, y) dA = \iint f(x, y) dx dy .$$

- Das Doppelintegral gibt anschaulich das Volumen zwischen der  $xy$ -Ebene und der Funktionsfläche.
- Für  $f(x, y) = 1$  wird das Doppelintegral in kartesischen Koordinaten  $\int \int dx dy$  und gibt den Flächeninhalt der durch die Integrationsgrenzen spezifizierten Figur.
- Für  $f = 1$  gibt das Doppelintegral  $\int dA$  ebenfalls den Flächeninhalt:
  - In kartesischen Koordinaten ist  $dA = dx dy$ ,
  - in Polarkoordinaten ist  $dA = r dr d\varphi$ .
- Ist der Grenzwert  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{x_1}^{x_2} \sum_{y_1}^{y_2} \sum_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) \Delta x \Delta y \Delta z$  vorhanden, so heißt er *Dreifachintegral*:

$$\int f(x, y, z) dV = \iiint f(x, y, z) dx dy dz .$$

- Für  $f(x, y, z) \neq 1$  gibt es keine anschauliche Interpretation mehr.
- Für  $f = 1$  gibt das Integral  $\int dV$  das Volumen des durch die Integrationsgrenzen beschriebenen Körpers:
  - kartesisch:  $dV = dx dy dz$ ,
  - Zylinderkoordinaten:  $dV = r dr d\varphi dz$ ,
  - Kugelkoordinaten:  $dV = r^2 dr \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$ .
- Mathematisch ist es egal, welches Koordinatensystem Sie verwenden, so lange Sie Funktion und Flächen-/Volumenelement mit den gleichen Variablen beschreiben. Versuche wir  $\int f(x, y) r dr d\varphi$  sind sinnlos, da  $x$  und  $y$  von  $r$  und  $\varphi$  abhängen (und umgekehrt). **Merke: niemals Koordinatensysteme mischen!**

## Technik

- Die Integrationen nach den einzelnen Variablen werden wie gewöhnliche Integrationen ausgeführt.
- Sind die Integrationsgrenzen konstant, so ist die Reihenfolge der Integration beliebig.
- Hängt eine (oder mehrere) der Integrationsgrenzen von einer der Variablen ab, so kann über diese letztere Variable erst dann integriert werden, wenn die Integrationsgrenze durch Ausführung der Integration über die erste Variable in den Integranden gekommen ist.