Spickzettel numerische Integration

Idee

- Numerische Integration folgt der anschaulichen Definition des bestimmten Integrals: es werden sehr kleine (allerdings nicht infinitesimal kleine) Flächenstückchen aufaddiert.
- Numerische Integration kann daher nur auf bestimmte Integrale angewendet werden.

Verfahren

- Gesucht:
$$I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\ .$$
Unabhängig vom Verfahren wird das Integrationsintervall $[a, b]$ kann in M Schritte der Länge Δx eingeteilt: $\Delta x = (b - a)/M$.
- bei der *Mittelpunktsformel* wird jeweils der Funktionswert in der Intervallmitte zur bestimmung des Flächenelements verwendet:
$$I_{\mathrm{MP}} = \sum_{k=1}^{M} f(x_{\mathrm{m}k})\,\Delta x = \sum_{k=1}^{M} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)\,\Delta x\ .$$
- bei der *Trapezformel* wird das Flächenstück als durch die Funktionswerte an den Intervallgrenzen bestimmtes Trapez angenähert:
$$I_{\mathrm{T}} = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{2}(f(x_k) + f(x_{\mathrm{k}-1}))\,\Delta x\ .$$
- beim *Simpson-Verfahren* wird die Funktion durch ein Polynom angenähert, so dass sich für das Flächenstück ergibt
$$I_{\mathrm{Simpson}} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{M}(f(x_{k-1}) + 4f(x_{\mathrm{m}k}) + f(x_k))\Delta x\ .$$
- die *Monte Carlo Integration* basiert auf Zufallszahlen (oder einem stark streuenden Maschinengewehr): malen Sie die Zielfläche auf eine Referenzfläche bekannter Größe, schießen Sie hinreichend oft auf diese Fläche und bilden Sie das Verhältnis aus Treffern in Zielfläche zu Treffern insgesamt. Das gibt das Verhältnis von Zielfläche zu Referenzfläche.