Spickzettel Komplexe Zahlen

Idee

- Erweiterung des Zahlenraums, um auch Ausdrücke der Form $x^2 = -25$ bearbeiten zu können.
- Einführung der *imaginären Einheit* i mit $\mathrm{i}^2 = -1$ (oder mathematisch unsauber $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$). Damit lässt sich $\sqrt{-25}$ schreiben als $\sqrt{-25} = \sqrt{25}\sqrt{-1} = 5\mathrm{i}$. Imaginäre Zahlen werden auf einem eigenen Zahlenstrahl dargestellt.
- Eine *komplexe Zahl* $z = a + b\mathrm{i}$ ist die Summe aus einer reellen Zahl a und einer imaginären Zahl $b\mathrm{i}$. Der *Realteil* von z ist $\Re(z) = a$, der *Imaginärteil* ist $\Im(z) = b$. Komplexe Zahlen lassen sich in der Gauß'schen Zahlenebene als Zeiger darstellen.
- konjugiert komplexe Zahl: $z^* = \overline{z} = a - \mathrm{i}b$; entsteht durch Spiegelung an der reellen Achse!
- Betrag einer komplexen Zahl: $|z| = \sqrt{zz^*}$.

Darstellungsformen

- kartesische Darstellung mit Real- und Imaginärteil: $z = a + b\mathrm{i}$.
- trigonometrische Darstellung mit Betrag $|z|$ und Argument φ: $z = |z|(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$ mit $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\varphi = \arg z = \arctan b/a$.
- Polarform: $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

Euler-Formel

- Euler-Formel:
$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi\ .$$
- Spezialfall $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} + 1 = 0$.
- Anwendung zur Darstellung der trigonometrischen Funktionen mit Hilfe der Exponentialfunktion:
$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2} \qquad \text{und} \qquad \sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}\ .$$

Rechentechnik

- Addition/Subtraktion: in kartesischer Darstellung, komponentenweise:
$$(a + \mathrm{i}b) \pm (c + \mathrm{i}d) = (a \pm c) + \mathrm{i}(b \pm d)\ .$$
- Multiplikation/Division:
  - kartesisch
  $$(a+\mathrm{i}b)(c+\mathrm{i}d) = (ac-bd)+\mathrm{i}(ad+bc) \qquad \text{und} \qquad \frac{a+\mathrm{i}b}{c+\mathrm{i}d} = \frac{(a+\mathrm{i}b)(c-\mathrm{i}d)}{(c+\mathrm{i}d)(c-\mathrm{i}d)} = \frac{(a+\mathrm{i}b)(c-\mathrm{i}d)}{c^2+d^2}$$
  - Polarform (zeigt, dass Multiplikation anschaulich eine Kombination aus Drehung und Streckung bedeutet):
  $$z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1+\varphi_2)} \qquad \text{und} \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi_1-\varphi_2)}$$