Spickzettel Numerische Verfahren für gewöhnliche DGLs

Prinzip

- die numerische Integration von DGLs wird auf die numerische Integration von Funktionen zurück geführt (Separation der Variablen bei einer DGL erster Ordnung führt direkt auf die Integration):

$$\dot{x} = f(x(t)) \qquad \Rightarrow \qquad \int\limits_t^{t+\Delta t} \mathrm{d}x = \int\limits_t^{t+\Delta t} f(x(t))\,\mathrm{dt} \qquad \Rightarrow \qquad x(t+\Delta t) = x(t) + \int\limits_t^{t+\Delta t} f(x(t))\,\mathrm{dt}\ .$$

- für das numerische Verfahren wird die DGL diskretisiert: die Differentialgleichung wird in eine Differenzengleichung überführt.
- DGLs n^{ter} Ordnung werden durch Substitution in n DGLs erster Ordnung überführt (Sie werden später auch Verfahren kennen lernen, in denen die höheren Ableitungen diskretisiert werden können).

Numerische Verfahren

Da die numerische Lösung einer DGL auf die numerische Integration zurück geführt werden kann, erinnern die numerischen Verfahren an die von der Integration bekannten. Alternativ lässt sich eine DGL auch mit Monte Carlo Verfahren lösen.

1. Diskretisierung
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_n - x_{n-1}}{\Delta t} = f(x,t)\ .$$
2. Wahl der Schrittweite h und Einteilung des Integrationsintervalls $[a,b]$:
$$h = \Delta x = \frac{b-a}{M}$$
3. numerisches Schema:
   - Euler Vorwärts:
   $$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \Delta t\, f(t_i, x_i)\ .$$
   - Euler Rückwärts (mit Prädikator):
   $$x(t_{i+1}) = x(t_i) + \Delta t\, f(t_{i+1}, x^{\mathrm{P}}_{i+1}) \qquad \text{mit} \qquad x^{\mathrm{P}}(t_{i+1}) = x(t_i) + \Delta t\, f(t_i, x_i)\ .$$
   - Leapfrog (mit Zwischengitter in der Intervallmitte):
   $$\begin{aligned} x_{i+\frac{1}{2}} &= x_{i-\frac{1}{2}} + f(t_i, x_i)\Delta t \quad \text{mit} \quad x_{-\frac{1}{2}} = x_0 - \frac{1}{2} f(t_0, x_0)\Delta t \\ x_{i+1} &= x_i + f(t_{i+\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}})\Delta t \quad \text{mit} \quad x_0 = x_0\ . \end{aligned}$$
   - Runge–Kutta 4^{ter} Ordnung:
   $$x(t_i) = x_i = x_{i-1} + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$
   mit
   $$\begin{aligned} k_1 &= \Delta t\, f(t_{i-1}, x_{i-1})\ , & k_2 &= \Delta t\, f\left(t_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-1} + \tfrac{k_1}{2}\right)\ , \\ k_3 &= \Delta t\, f\left(t_{i-\frac{1}{2}}, x_{i-1} + \tfrac{k_2}{2}\right)\ , & k_4 &= \Delta t\, f(t_{i-1} + \Delta t, x_{i-1} + k_3)\ . \end{aligned}$$