Spickzettel Rotation

Grundbegriffe

- Die *Rotation* eines Vektorfeldes $\vec{A}(x,y,z) = (A_x, A_y, A_z)$ ist das Vektorfeld

$$\mathrm{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial A_z/\partial y - \partial A_y/\partial z \\ \partial A_x/\partial z - \partial A_z/\partial x \\ \partial A_y/\partial x - \partial A_x/\partial y \end{pmatrix} .$$

- in kartesischen Koordinaten ist die Rotation das Kreuzprodukt aus Nabla-Operator und Feld.
- wie Gradient und Divergenz ist die Rotation eine *lokale Größe*. Sie ordnet jedem Punkt $\vec{r}$ eines Vektorfeldes $\vec{A}(\vec{r})$ eine *Wirbelstärke* $\nabla \times \vec{A} = \mathrm{rot}\ \vec{A}$ zu.
- Die Rotation eines Gradientenfeldes verschwindet (Gradientenfelder sind wirbelfrei): $\nabla \times (\nabla U) = \mathrm{rot}\ (\mathrm{grad}\ U) = 0$.
- in einem konstanten Feld verschwindet die Rotation ebenfalls (trivial)

Koordinatensysteme

- Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\vec{A} &= \nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r\sin\vartheta}\left(\frac{\partial(\sin\vartheta\, A_\varphi)}{\partial\vartheta} - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_{\mathrm{r}} \\ &+ \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\vartheta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\vartheta)}{\partial r} - \frac{\partial A_{\mathrm{r}}}{\partial\vartheta}\right)\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

- Zylinderkoordinaten:

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\vec{A} &= \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\varrho + \left(\frac{\partial A_\varrho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\varrho}\right)\vec{e}_\varphi \\ &+ \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial(\varrho A_\varphi)}{\partial\varrho} - \frac{\partial A_\varrho}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_{\mathrm{z}} . \end{aligned}$$

Rechenregeln

- konstantes Feld $\vec{A} = \vec{c} = \mathrm{const}$

$$\nabla \times \vec{c} = 0 .$$

- Summenregel

$$\mathrm{rot}(\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times (\vec{A} + \vec{B}) = \nabla \times \vec{A} + \nabla \times \vec{B} ,$$

- Faktorregel

$$\nabla \times (\alpha\vec{A}) = \alpha\, \nabla \times \vec{A} .$$

- Produktregel für das Produkt aus einem Skalar- und einem Vektorfeld:

$$\nabla \times (A\vec{B}) = A\, \nabla \times \vec{B} + \nabla A \times \vec{B} = A\, \mathrm{rot}\ \vec{B} + \mathrm{grad}\, A \times \vec{B} .$$