Spickzettel Partielle Differentialgleichungen (Grundlagen)

Übersicht

- partielle Differentialgleichungen sind Bestimmungsgleichungen für Funktionen von mehreren Variablen. In der Physik handelt es sich dabei meist um Felder.
- neben den *Anfangsbedingungen* (Festlegung der Integrationskonstanten für die zeitliche Abhängigkeit) müssen zur Festlegung der Integrationskonstanten für die räumliche Abhängigkeit auch *Randbedingungen* gegeben sein.
- *Laplace Gleichung* $\Delta U = 0$: bestimmt das Potential im Ladungsfreien Raum bei vorgegebenen Randbedingungen. Auch Anwendbar für Temperaturverteilungen.
- *Poisson-Gleichung* bestimmt das elektrostatische Potential U einer Ladungsverteilung $\varrho(\vec{r})$: $\Delta U = -\varrho/\varepsilon_0$. Poisson- und Laplace-Gleichung enthalten keine zeitlichen Abhängigkeiten, sie beschreiben daher stationäre Felder. Entsprechend werden keine Anfangsbedingungen benötigt. Die Laplace-Gleichung ist die homogene Variante der Poisson-Gleichung.
- *Diffusions-* oder *Wärmeleitungsgleichung* beschreibt die zeitliche Entwicklung $\partial/\partial t$ eines Feldes
$$\Delta A = k\,\frac{\partial A}{\partial t}\ ,$$
- *Wellengleichung* enthält die zweite zeitliche Ableitung und beschreibt schnell veränderliche, in der Regel periodische Felder:
$$\Delta A = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\ .$$
- *Schrödinger-Gleichung* ist eine Art Wellengleichung
$$-\frac{h^2}{2m}\,\Delta\Psi(\vec{r},t) + V(\vec{r})\,\Psi = -\mathrm{i}h\frac{\partial\Psi}{\partial t}\ ,$$

Laplace-Operator

- der Laplace-Operator entsteht, wenn wir die Divergenz eines Gradientenfeldes bestimmen wollen, z.B. $\nabla\cdot\vec{E}\sim\varrho$ mit $\vec{E} = -\nabla U$ und damit $\nabla\cdot(\nabla U) = \Delta U \sim \varrho$.
- kartesisch:
$$\Delta = \nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\ .$$
- Kugelkoordinaten:
$$\Delta A = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial A}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin^2\vartheta}\,\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2}\ .$$
- Zylinderkoordinaten:
$$\Delta A = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial A}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 A}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}\ .$$