Spickzettel Partielle Differentialgleichungen (Wellengleichung)

Separationsansatz

- Allgemeine Form
$$\Delta A = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}\ .$$
- der Laplace-Operator muss der Dimension des Systems angepasst werden, ebenso der Geometrie (rechteckige Membran in kartesischen, Kreismembran in ebenen Zylinderkoordinaten).
- Grundprinzip *Separationsansatz*: räumlicher und zeitlicher Anteil als Produkt darstellbar (anschaulich: räumliche Abhängigkeit als Momentaufnahmen, zeitliche Abhängigkeit jeden Punkt einzeln als Schwingung betrachten)

Verschiedene Geometrien

- Schwingende Saite: 1D, Separationsansatz $A(x,t) = X(x)\,T(t)$, Separationskonstante $-\beta^2$, Abkürzung: $\omega = \beta c$
$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c} X''(x) + \beta^2 X(x) = 0 \\ T''(t) + \beta^2 c^2\, T(t) = 0 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c} X(x) = \gamma_1 \cos(\beta x) + \gamma_2 \sin(\beta x) \\ T(t) = \gamma_4 \cos(\omega t) + \gamma_3 \sin(\omega t) \end{array}$$
Randbedingung: Saite an den Enden eingespannt, d.h. $A(0,t) = A(l,t) = 0$, daher $\gamma_1 = 0$. Da nur Vielfache der halben Wellenlänge auftreten können, ist ferner $l\beta = n\pi$. Lösungen der einzelnen Schwingungsmoden A_n sind dann zu überlagern
$$A(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n\, \cos(\omega_n t + \varphi_n)\right)\, \sin\frac{n\pi x}{l}\ .$$
- Schwingende Rechteckmembran: 2D, Separationsansatz $A(x,y,t) = X(x)\,Y(y)\,T(t)$, Separationskonstante Raum und Zeit wieder $-\beta^2$, Separationskonstante X und Y $p^2 + q^2 = \beta^2$, Abkürzung: $\omega = \beta c$
$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c} X''(x) + p^2\, X(x) = 0 \\ Y''(y) + q^2\, Y(y) = 0 \\ T''(t) + c^2\beta^2 T(t) = 0 \end{array} \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c} X(x) = \gamma_1 \cos(qx) + \gamma_2 \sin(qx) \\ Y(y) = \gamma_3 \cos(py) + \gamma_4 \sin(py) \\ T(t) = \gamma_5 \cos(\beta ct) + \gamma_6 \sin(\beta ct) \end{array}$$
Randbedingung: Membran rundherum eingespannt, d.h. $Y(0) = Y(b) = X(0) = X(a) = 0$ liefert $\gamma_1 = \gamma_3 = 0$. Da nur Vielfache der halben Wellenlänge auftreten können, ist ferner $p_n = n\pi/a$ und $q_m = \frac{m\pi}{b}$. Lösungen der einzelnen Schwingungsmoden $A_{n,m}$ sind dann zu überlagern
$$A(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{mn}(x,y,z,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} (a_{mn}\cos(\omega_{nm} t + \varphi_{nm}))\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{b}\right)\ .$$
- Schwingende Kreismembran: 2D, Separationsansatz $A(r,t) = R(r)\,T(t)$, da Radialsymmetrisch (ebene Zylinderkoordinaten verwenden!). Separationskonstante $-\beta^2$
$$T(t)\left(R''(r) + \frac{1}{r}\,R'(r)\right) = \frac{1}{c^2}\,R(r)\,T''(t) \quad\Rightarrow\quad \begin{array}{c} 0 = T''(t) + \beta^2 c^2 T(t) \\ 0 = R''(r) + R'(r)/r + \beta^2 R \end{array}$$
Zeitabhängigkeit gewöhnliche Schwingungsgleichung, räumliche Abhängigkeit *Bessel-DGL* (Lösung durch Potenzreihenansatz führt auf Bessel-Funktionen).
- Schwingende Kugeloberfläche: 2D, Kugelkoordinaten, führt auf *Legendre-Polynome*