

Prof. Dr. May-Britt Kallenrode

Fachbereich Physik

Einführung in die Physik

**Vorlesungsskript mit zahlreichen
Aufgaben und Fragen**

Osnabrück, den 17. Juni 2004

Zu Risiken und Nebenwirkungen

Bei diesem Skript handelt es sich um die Notizen zur Vorlesung ‘Einführung in die Physik 1 & 2’. Diese Notizen können Ihnen behilflich sein, die Vorlesung nachzuarbeiten und die Übungsaufgaben zu bearbeiten – einen Blick in ein Lehrbuch können sie jedoch nicht ersetzen. Kommentierte Hinweise auf einige Lehrbücher finden Sie am Ende des ersten Kapitels, weitere Verweise finden Sie im Literaturverzeichnis. Die Vorlesung (und damit das Skript) folgen keinem dieser Bücher direkt, d.h. es ist egal, welches der Bücher Sie als Hilfsmittel verwenden. Stöbern Sie in verschiedenen und suchen sich das aus, welches Ihnen am besten gefällt und mit welchem Sie am effizientesten Arbeiten können. Das Skript kann Ihnen allerdings helfen die Grundbegriffe und Zusammenhänge zu erkennen, auf die ich im Rahmen dieser Vorlesung Wert lege – und damit zu identifizieren, welche Abschnitte oder Kapitel Sie in einem Lehrbuch besonders intensiv durcharbeiten sollten.

Zur Verfestigung des Stoffes finden Sie am Ende eines jeden Kapitels Verständnisfragen und Aufgaben. Beide helfen Ihnen, Ihr Wissen zu überprüfen und gegebenenfalls die Ihnen nicht so geläufigen Begriffe nachzuschlagen. Die Klausuren bauen auf diesen Aufgaben und Verständnisfragen auf. Ein Teil der Aufgaben und Fragen wird auch in den Übungen behandelt, scheuen Sie sich nicht, in den Übungen auch zu den anderen Fragen und Aufgaben nachfragen zu stellen. Zusätzlich erhalten Sie die Lösungen zu allen Aufgaben am Ende des Skripts – allerdings nur den Zahlenwert der Lösung, d.h. Sie können die Angabe nur verwenden, um Ihre Lösung zu überprüfen, nicht jedoch den Lösungsweg daran nachvollziehen. Ein großer Teil der Aufgaben und Fragen sind Standardaufgaben bzw. Abwandlungen von Standardaufgaben, Sie werden beim Studium von Büchern sicherlich auch viele Anregungen zur Lösung dieser Aufgaben finden.

Das Skript steht als Sammlung von PDF-Dateien sowie zusätzlich als vollständige PDF-Datei zur Verfügung. Alle Dateien enthalten anklickbare Querverweise – in den parallel zur Vorlesung bereit gestellten Dateien zu den einzelnen Kapiteln funktionieren natürlich nur die Verweise innerhalb des Kapitels, im Gesamtdokument funktionieren alle Verweise. Da Sie die Einzelkapitel im wesentlichen für die Arbeit parallel zur Vorlesung als Ausdruck verwenden, ist dies keine wesentliche Einschränkung, zur Wiederholung vor der Klausur sollte das vollständige Skript zur Verfügung stehen und damit die Funktion der Querverweise bei der Arbeit am Rechner vollständig nutzbar sein.

Zusätzlich zum Skript und zu den Übungsaufgaben finden Sie auch Kopien der in der Vorlesung verwendeten Präsentation als PDF-Files unter `stud.ip`.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Ziele der Vorlesung	1
1.2	Physik als quantitative Wissenschaft	2
1.2.1	Physik als Erfahrungswissenschaft	2
1.2.2	Physik (nicht nur) in natürlichen Systemen	3
1.3	Einheiten und Verwandtes	5
1.3.1	SI-Einheiten	5
1.3.2	Vorsilben	6
1.3.3	Rechnen mit Einheiten	7
1.3.4	Griechische Buchstaben	8
1.4	Literatur	8
1.5	Aufgaben	9
1.5.1	Verständnisfragen	9
1.5.2	Rechenaufgaben	10
2	Vektoren und andere mathematische Hilfsmittel	14
2.1	Rechnen mit Vektoren	14
2.1.1	Orts- und Verschiebungsvektor	14
2.1.2	Kartesische Koordinaten	15
2.1.3	Vektoralgebra in kartesische Koordinaten	16
2.1.4	Skalarprodukt	17
2.1.5	Kreuzprodukt	18
2.1.6	Spatprodukt	20
2.2	Binomische Formeln und quadratische Gleichung	21
2.2.1	Binomische Formeln	21
2.2.2	Quadratische Gleichung	22
2.3	Einfache Geometrie	23
2.4	Funktionen	24
2.4.1	Spezielle Funktionen	25
2.4.2	Differentiation	28
2.4.3	Integration	29
2.5	Aufgaben	30
2.5.1	Fragen	30
2.5.2	Aufgaben	31
3	Fehlerrechnung	35
3.1	Charakterisierung von Messdaten	36
3.2	Verteilung von Messwerten, Mittelwert und Varianz	37
3.2.1	(Normalverteilte) Messwerte	37
3.2.2	Ergänzung: ‘Zählen’ und Poisson-Verteilung	38
3.2.3	Mittelwert und Standardabweichung aus den Messwerten	40
3.2.4	Vertrauensbereich für den Mittelwert	41
3.3	Fehlerfortpflanzung	42

3.3.1	Summen oder Differenzen	43
3.3.2	Multiplikation mit einer Konstanten	43
3.3.3	Multiplikation oder Division	44
3.3.4	Potenzgesetz	44
3.4	Aufgaben	45
3.4.1	Fragen	45
3.4.2	Aufgaben	46
4	Kinematik: Beschreibung von Bewegungen	49
4.1	Grundbegriffe	49
4.1.1	Massenpunkt	49
4.1.2	Geschwindigkeit	50
4.1.3	Beschleunigung	52
4.1.4	Graphische Darstellung von Bewegungen	53
4.1.5	Grundgesetze	53
4.2	Spezielle Bewegungen	54
4.2.1	Übersicht	54
4.2.2	Gleichförmige gradlinige Bewegung	55
4.2.3	Gleichförmig beschleunigte gradlinige Bewegung	56
4.2.4	Zusammengesetzte Bewegung	56
4.3	Senkrechte und parallele Beschleunigung	56
4.4	Zusammenfassung	58
4.5	Aufgaben	59
4.5.1	Fragen	59
4.5.2	Aufgaben	60
5	Dynamik: Kräfte oder die Ursache von Bewegungen	65
5.1	Definition	65
5.1.1	Kraft	65
5.1.2	Impuls	66
5.1.3	Masse	66
5.2	Newton'sche Axiome	67
5.3	Erläuterungen zu den Newton'schen Gesetzen	68
5.3.1	Trägheitsgesetz	68
5.3.2	Aktionsgesetz	68
5.3.3	Wechselwirkungsgesetz	69
5.4	Aktionsprinzip als Bewegungsgleichung	72
5.5	Beispiele für Kräfte	73
5.5.1	Gewichtskraft	73
5.5.2	Federkraft – Hooke'sches Gesetz	73
5.5.3	Hangabtriebskraft	76
5.5.4	Normalkraft	77
5.5.5	Haft- und Gleitreibung	77
5.5.6	Andere Reibungsansätze	79
5.5.7	Eine Scheinkraft: Zentrifugalkraft	82
5.5.8	Allgemeines Gravitationsgesetz	83
5.6	Impulserhaltung	85
5.6.1	Rückstoßprinzip	85
5.6.2	Inelastischer Stoß	86
5.6.3	Elastischer Stoß	87
5.7	Aufgaben	87
5.7.1	Fragen	87
5.7.2	Aufgaben	92

6	Arbeit, Energie, Leistung	99
6.1	Definitionen	99
6.1.1	Arbeit	99
6.1.2	Energie	100
6.1.3	Leistung	100
6.2	Arbeit: Beispiele	100
6.2.1	Hubarbeit	100
6.2.2	Beschleunigungsarbeit	101
6.2.3	Arbeit beim Spannen einer Feder	102
6.2.4	Anwendungsbeispiele	102
6.2.5	Begriffliche Probleme	103
6.3	Energie	103
6.3.1	Potentielle Energie	104
6.3.2	Kinetische Energie	105
6.3.3	Weitere Energieformen	105
6.4	Energieerhaltung	106
6.4.1	Energieerhaltung beim Stoß	106
6.4.2	Ein Körper im Schwerfeld	107
6.4.3	Zusammenfassung Energieerhaltung	109
6.5	Leistung	110
6.6	Aufgaben	111
6.7	Arbeit, Energie, Leistung	111
6.7.1	Fragen	111
6.7.2	Aufgaben	114
7	Drehbewegung	119
7.1	Grundbegriffe	119
7.2	Kinematik (Beschreibung der Bewegung)	120
7.3	Dynamik: Ursache von Drehungen	122
7.3.1	Drehmoment	122
7.3.2	Drehimpuls	126
7.3.3	Trägheitsmoment	126
7.3.4	Drehmoment und Winkelbeschleunigung	127
7.4	Drehimpulserhaltung	127
7.5	Rotationsenergie	129
7.6	Energieerhaltung	130
7.7	Zusammenfassung	130
7.8	Aufgaben	130
7.8.1	Fragen	130
7.8.2	Aufgaben	132
8	Ein physikalischer Blick auf den Menschen	135
8.1	Massenmittelpunkt	135
8.1.1	Gleichgewicht und Stabilität	137
8.1.2	Bewegung des Massenmittelpunkts	137
8.2	Ein einfaches Modell des Menschen	139
8.2.1	Bestandteile des Körpers	139
8.2.2	Beispiel: Drehmoment am Arm	140
8.2.3	Muskelmännchen	141
8.3	Gulliver in Lilliput	142
8.4	Einfache Bewegungen, physikalisch beschrieben	144
8.4.1	Tetherball	144
8.4.2	Turmspringen	145
8.4.3	Laufen	146
8.4.4	Weit- und Hochsprung	147

8.5	Komplexe Bewegungen, physikalisch beschrieben	148
8.5.1	Skater's Bewegung	148
8.5.2	Fallende Katzen	149
8.6	Energiebilanz und -umsätze	150
8.7	Aufgaben	152
8.7.1	Fragen	152
8.7.2	Aufgaben	156
9	Hydrostatik: Kontinuierliche Medien in Ruhe	160
9.1	Grundgrößen	160
9.1.1	Massendichte	161
9.1.2	Druck	161
9.1.3	Pascal'sche Prinzip	161
9.2	Hydrostatische Grundgleichung	162
9.2.1	Hydrostatische Grundgleichung (Flüssigkeiten)	163
9.2.2	Barometrische Höhenformel	164
9.2.3	Druck und Partialdruck	165
9.2.4	Biologische Konsequenzen eines veränderten Druckes	166
9.2.5	Auftrieb	166
9.3	Benetzung	168
9.3.1	Oberflächenspannung	168
9.3.2	Kapillarität	169
9.4	Aufgaben	170
9.4.1	Fragen	170
9.4.2	Aufgaben	172
10	Hydrodynamik: Kontinuierliche Medien in Bewegung	173
10.1	Bezugssysteme	173
10.2	Stromlinien	174
10.3	Kontinuitätsgleichung	175
10.4	Bernoulli-Gleichung	178
10.4.1	Erweiterte Bernoulli Gleichung und Gesetz von Toricelli	179
10.4.2	Pitot-Rohre und Druckmessung	179
10.5	Hydrodynamischer Auftrieb	180
10.5.1	Lüftende Präriehunde	181
10.5.2	Fliegen	181
10.5.3	Am-Wind-Segeln	182
10.5.4	Windenergiekonverter (WEK)	183
10.6	Magnus-Effekt	187
10.6.1	Flettner-Rotor	188
10.6.2	Flugbahn eines Golfballs	188
10.6.3	Frisbee	189
10.7	Reale Flüssigkeiten	190
10.7.1	Newton'sches Reibungsgesetz	190
10.7.2	Laminare Rohrströmung: Hagen-Poiseuille	191
10.7.3	Umströmen von Körpern	193
10.7.4	Ähnlichkeitsgesetze und dimensionslose Größen	197
10.8	Anmerkung zum Vogelflug	199
10.9	Aufgaben	200
10.9.1	Fragen	200
10.9.2	Aufgaben	203

11 Ladungen, Ströme und elektromagnetische Felder	207
11.1 Grundbegriffe und Definitionen	207
11.1.1 Analogie zur Mechanik	209
11.2 Elektrostatik	209
11.2.1 Reibungselektrizität	209
11.2.2 Polarisierung und Influenz	211
11.2.3 Coulombkraft oder elektrostatische Kraft	212
11.2.4 Elektrisches Feld	213
11.2.5 Elektrisches Potential	214
11.2.6 Elektrisches Potential und Spannung	215
11.3 Einfache elektrische Stromkreise	215
11.3.1 Analogie	216
11.3.2 Gleichspannungsquellen	217
11.3.3 Widerstand	218
11.3.4 Exkurs: Supraleitung	219
11.3.5 Serien- und Parallelschaltung	220
11.3.6 Kondensator	222
11.3.7 Elektrische Leistung	224
11.3.8 Strom im Körper	224
11.4 Magnetfelder	225
11.4.1 Ströme und Magnetfelder	227
11.4.2 Elektromagnetische Induktion	230
11.4.3 Ergänzung: Maxwell'sche Gesetze	232
11.4.4 Elektromagnetische Wellen	233
11.5 Elektrische Ladungen in elektrischen und magnetischen Feldern	234
11.6 Aufgaben	235
12 Schwingungen, Wellen und Akustik	246
12.1 Schwingungen	246
12.1.1 Federpendel	248
12.1.2 Fadenpendel	250
12.1.3 Gedämpfte und ungedämpfte Schwingung	251
12.2 Wellen	251
12.2.1 Randbedingungen	253
12.2.2 Stehende Wellen	255
12.2.3 Schwingende Saiten und ähnliches	258
12.2.4 Erdbebenwellen	259
12.2.5 Besondere Phänomene bei Wellen	260
12.3 Akustik	261
12.3.1 Schwebung	261
12.3.2 Schallpegel	261
12.3.3 Ultraschall	262
12.4 Doppler-Effekt	263
12.4.1 Prinzip	263
12.4.2 Ruhender Sender und bewegter Empfänger	264
12.4.3 Bewegter Sender	265
12.4.4 Anwendung	265
12.4.5 Mach'scher Kegel	266
12.5 Aufgaben	266

13 Optik	273
13.1 Licht als elektromagnetische Welle	273
13.1.1 Elektromagnetische Wellen	273
13.1.2 Elektromagnetisches Spektrum	275
13.2 Ebene Wellen und Huyghen'sches Prinzip	276
13.3 Absorption	277
13.4 Reflektion	278
13.5 Brechung	279
13.5.1 Snell'sches Brechungsgesetz	279
13.5.2 Totalreflektion	280
13.5.3 Dispersion	282
13.6 Linsen	283
13.6.1 Abbildungsgesetze	284
13.6.2 Linsenfehler	285
13.7 Optische Instrumente	285
13.7.1 Bildkonstruktion bei Linsenabbildung	286
13.7.2 Lupe	286
13.7.3 Fernrohr	287
13.7.4 Mikroskop	288
13.8 Beugung	288
13.9 Interferenz	290
13.9.1 Doppelspalt	291
13.9.2 Beugungsgitter	292
13.9.3 Einfachspalt	293
13.9.4 Interferenz an dünnen Schichten	294
13.10Polarisation	295
13.11Anmerkungen natürliches Licht	298
13.12Holographie	298
13.13Aufgaben	300
14 Atomphysik	306
14.1 Rutherford'scher Streuversuch	306
14.2 Spektren	307
14.3 Wellen oder Teilchen?	307
14.3.1 Photoeffekt	308
14.3.2 Beugungsmuster mit wenigen Photonen	309
14.3.3 Beugung von Elektronen: Materiewellen	310
14.3.4 Welle-Teilchen-Dualismus	310
14.3.5 Heisenberg'sche Unschärferelation	310
14.4 Atombau und Periodensystem	310
14.4.1 Bohr'sches Atommodell	310
14.4.2 Schrödinger'sches Modell	313
14.4.3 Pauli'sches Ausschließungsprinzip	314
14.4.4 Periodensystem der Elemente	314
14.5 Aufgaben	315
15 Kernphysik	318
15.1 Radioaktiver Zerfall	318
15.1.1 α -Zerfall	318
15.1.2 β -Zerfall	320
15.1.3 γ -Zerfall	322
15.1.4 Zusammenfassung	323
15.2 Kerne und Isotope	323
15.3 Zerfallsgesetz	325
15.4 Wechselwirkung energiereicher Strahlung mit Materie	327

15.4.1	Elastische Streuung (Streuung ohne Energieabgabe)	327
15.4.2	Photoeffekt	327
15.4.3	Compton-Effekt	327
15.4.4	Paarerzeugung	329
15.4.5	Absorptionsgesetz	329
15.4.6	Ionisation durch energiereiche Teilchen	331
15.5	Dosisbegriffe und Einheiten	333
15.6	Messung energiereicher Strahlung	337
15.6.1	Gasgefüllte Teilchendetektoren	338
15.6.2	Dosimeter	339
15.7	Strahlenbelastung	340
15.8	Biologische Wirkung ionisierender Strahlung	341
15.8.1	Zeitlicher Ablauf der Strahlenwirkung	341
15.8.2	Strahlenempfindlichkeit und Zellzyklus	342
15.8.3	Strahlenempfindlichkeit und Gewebetypus	345
15.9	Anwendungen energiereicher Strahlung in der Medizin	346
15.9.1	Röntgendiagnostik	346
15.9.2	CT	348
15.9.3	PET und SPECT	350
15.10	Aufgaben	352
A	Anhang	354
A.1	Formelzeichen (mit ihren Einheiten)	354
A.2	Konstanten	355
A.3	Kurze Formelsammlung	356
A.4	Lösungen zu den Aufgaben	363
A.4.1	Kapitel 1	363
A.4.2	Kapitel 2	364
A.4.3	Kapitel 3	367
A.4.4	Kapitel 4	367
A.4.5	Kapitel 5	368
A.4.6	Kapitel 6	370
A.4.7	Kapitel 7	371
A.4.8	Kapitel 8	371
A.4.9	Kapitel 9	372
A.4.10	Kapitel 10	372
A.4.11	Kapitel 11	373

Kapitel 1

Einführung

1.1 Ziele der Vorlesung

Die Vorlesung soll Ihnen einen Einblick in die physikalischen Grundlagen vermitteln, die Sie zum Verständnis natürlicher (und insbesondere biologischer) Systeme benötigen. Auch sollen die physikalischen Prozesse eingeführt werden, die in Untersuchungsverfahren (z.B. Mikroskop, Elektronenstrahlmikroskop, Computer-Tomographie) Anwendung finden.

Der Stoff der Vorlesung umfasst daher die folgenden Bereiche:

- *Rechentchnische Vorbetrachtungen*: die Vorlesung beginnt mit einer kurzen Darstellung der für die Physik und insbesondere für die Praktika benötigten formalen Grundlagen. Dazu zählen die Fehlerrechnung (Kap. 3), der Umgang mit Vektoren (Kap. 2) sowie einige einfache Grundlagen (Winkelfunktionen, Umgang mit Logarithmen und der Exponentialfunktion, quadratische Gleichungen; ebenfalls Kap. 2).
- *Mechanik*: in der Mechanik werden nicht nur Bewegungen (Kap. 4) und deren Ursachen (Kap. 5) untersucht sondern auch wichtige physikalische Grundbegriffe wie Kraft, Arbeit, Energie und Leistung (Kap. 6) eingeführt. Diese Begriffe werden Ihnen in der Physik ebenso wie in der Biologie und der Chemie immer wieder begegnen, da die Energieumwandlung (oder biologischer der Stoffwechsel) Motor aller auf der Ebene der Zelle ablaufenden Prozesse ist. Außerdem begegnen Sie Erhaltungssätzen. Diese werden Ihnen ebenfalls immer wieder begegnen, in der Mechanik lassen sie sich jedoch auf die einfachste Weise einführen, da Sie sich die Vorgänge noch anschaulich vorstellen können. Diese Begriffe werden zuerst für Translationsbewegungen eingeführt; in Kap. 7 werden Sie auf Rotationsbewegungen erweitert. Dieser Teil der Vorlesung wird mit einem Kapitel über Biomechanik (Kap. 8) abgeschlossen, in dem die wichtigsten Aspekte der voran gegangenen Kapitel in einer Anwendung auf den Menschen zusammengefasst werden.
- *Hydromechanik* oder die Beschreibung bewegter Medien wie Luft und Wasser (Kap. 9 und 10). Dies ist für Biologen besonders interessant, da das Leben in bewegten kontinuierlichen Medien stattfindet und die Stoffwechselforgänge ebenfalls auf bewegten kontinuierlichen Medien beruhen (Kreislauf). Außerdem lässt sich gerade in diesem Bereich sehr gut zeigen, dass die Physik mit wenigen grundlegenden Konzepten sehr unterschiedliche Phänomene beschreiben kann. Hydrodynamik wird ebenso zum Verständnis der unbelebten Natur benötigt, da bewegte kontinuierliche Medien durch Erosion und Deposition unsere natürliche Umwelt formen.
- *Elektrodynamik (Kap. 11–13)*: Ströme und Magnetfelder sind für die lebende Natur ebenfalls unerlässlich, sei es zur Impulsleitung im Nervensystem oder bei einigen Tieren zur Orientierung. Außerdem werden wir in diesem Abschnitt die Grundlagen zum Verständnis elektromagnetischer Wellen herleiten. Letztere benötigen wir in der Optik

(Licht als elektromagnetische Welle), aber auch für das Verständnis der Spektroskopie und Atomphysik und insbesondere des Welle–Teilchen–Dualismus. Optik wird als ein Teilgebiet des Elektromagnetismus betrachtet, hier werden wir uns im wesentlichen auf Abbildungsverfahren (Lupe, Mikroskop, Fernglas) und die Ausbildung von Beugungs- und Interferenzmustern beschränken, da letzteres die Grundlagen für viele Untersuchungsmethoden legt (z.B. Röntgenstrukturanalyse).

- *Atomphysik (Kap. 14 und 14.3)*: die Atomphysik benötigen Sie in der Biologie im wesentlichen zum Verständnis moderner Untersuchungsverfahren. Dazu gehört als einfachstes Verfahren die Spektroskopie. Die Folgerungen aus der Atomphysik im Rahmen der Quantenphysik benötigen wir zum Beispiel, um zu verstehen, warum ein optisches Mikroskop nur begrenzt kleine Dinge darstellen kann und zur Abbildung noch feinerer Strukturen ein Elektronenstrahlmikroskop verwendet werden muss.
- *Kernphysik (Kap. 15)*: die Kernphysik beschäftigt sich mit dem Inneren der Atome, dem Atomkern und dessen (In-)Stabilität. Für den Biologen von Interesse ist insbesondere die Wechselwirkung der Produkte zerfallender Kerne (Radioaktivität) mit biologischer Materie. Dosimetrie und Strahlenschäden werden ebenso in diesem Teilabschnitt betrachtet wie moderne bildgebende Verfahren in der Medizin.

1.2 Physik als quantitative Wissenschaft

Die Vorlesung möchte Ihnen diese Inhalte auf zwei verschiedene Weisen vermitteln: zum einen durch das Verständnis von Grundprinzipien, zum anderen durch die formale Beschreibung mit Hilfe von physikalischen Gesetzen.

Das Verständnis der Grundprinzipien ist erforderlich, um die Anwendung einer physikalischen Idee auf sehr viele unterschiedliche Situationen zu ermöglichen. So kann das hydrodynamische Paradoxon (ein schnell strömendes Medium erzeugt einen Unterdruck) zum Verständnis so unterschiedlicher Phänomene wie lüftender Präriehunde, fliegender Vögel oder technischer Gegenstände wie Gierseilfähren verwendet werden – Phänomene, bei denen es nicht offensichtlich ist, dass sie alle durch das gleiche Prinzip erklärt werden können.

Aber das Verständnis von Prinzipien alleine reicht nicht aus – in komplexeren Situationen ist eine quantitative Beschreibung erforderlich. Wenn Sie mit einem Seil um den Bauch am Rande einer Klippe stehen und jemand zieht sehr kräftig an dem Seil, dann interessiert es Sie, in welche Richtung gezogen wird (auf die Klippe zu oder von ihr weg) und wie stark gezogen wird (kann ich mich bei Zug in Richtung auf die Klippe halten oder nicht). In der Situation möchten Sie das treffen, was Physik ausmacht: eine Vorhersage über die zukünftige Entwicklung des Systems. Vorhersage setzt aber eine Beschreibung quantitativer Zusammenhänge voraus. Das ist einer der Gründe, warum Physik eine quantitative Wissenschaft ist, die die Zusammenhänge zwischen verschiedenen physikalischen Größen in mathematischen Formulierungen ausdrückt.

1.2.1 Physik als Erfahrungswissenschaft

Physik ist eine Erfahrungswissenschaft: alltägliche Phänomene werden mit Hilfe von Modellen erklärt. Ein Beispiel: der Apfel fällt, da die Erdanziehungskraft/Gravitationskraft auf ihn wirkt. Modelle werden mathematisch formuliert, in diesem Fall als Gravitationsgesetz (vgl. (5.51)). Aus diesem quantitativen Zusammenhang lassen sich Vorhersagen ableiten, z.B. die Zeit, die der Apfel benötigt, bis er den Boden erreicht. Diese Vorhersage lässt sich in einem Experiment, d.h. an Hand einer Erfahrung, überprüfen. Ein Modell ist so lange gültig (bzw. sinnvoll), wie seine quantitativen und qualitativen Vorhersagen durch die Erfahrung bestätigt werden – ein Gegenbeispiel, und das Modell ist falsifiziert und muss entweder erweitert werden, um diese Situation korrekt zu berücksichtigen, oder es muss durch ein neues Modell ersetzt werden.

Modellbildung und Abgleich der Modelle mit der Erfahrung oder dem Experiment ist nicht nur eine Eigenart der Physik sondern tritt in allen experimentellen Wissenschaften auf. Sie kennen dies aus der Biologie ebenfalls, z.B. wenn Sie sich ansehen, wie sich die Vorstellungen von Evolution und Vererbung entwickelt haben und wie lange es gedauert hat von Mendelejews Vererbungslehre bis zur Entdeckung der DNA als Träger der Erbinformation zu gelangen.

1.2.2 Physik (nicht nur) in natürlichen Systemen

Physik definiert sich als Erfahrungswissenschaft über die Anwendung physikalischer Prinzipien auf die Umwelt. Ihr Ziel ist ein besseres Verständnis der physikalischen Umwelt: der Ozeane, der Atmosphäre, des festen Erdkörpers, deren Wechselwirkungen untereinander und mit der Anthroposphäre sowie ihrer natürlichen und durch menschliche Einflüsse bedingten Variabilität.

Physik ist eine konzeptuelle Wissenschaft: Phänomene werden auf (wenige) allgemeine Konzepte zurückgeführt. Diese können ihrerseits in vielen unterschiedlichen Bereichen angewendet werden. Eine Welle z.B. bildet sich auf der Oberfläche eines Teichs um die Einschlagstelle eines Steins oder brandet gegen das Meeresufer. Schall und Licht sind ebenfalls Wellen. Licht ist ein Spezialfall elektromagnetischer Wellen, zu denen auch Radio- und Mikrowellen gehören. Gemeinsamkeit dieser so verschiedenartigen Erscheinungen ist die periodische Änderung einer physikalischen Größe, verbunden mit einem Transport von Information und Energie. Beispiele für diese Größe sind die Wasserhöhe (Wasserwelle), der Druck (Schallwelle) oder das elektrische und magnetische Feld (elektromagnetischen Welle). Andere Wellen geben die Aufenthaltswahrscheinlichkeit eines Teilchens (Materiewelle, Schrödingergleichung) oder Ladungsdichten (Plasmawellen). Die formale Beschreibung dieser Wellen ist identisch:

$$f(t, \vec{r}) = f_o \cdot \exp\{\omega t - i\vec{k}\vec{r}\} \quad (1.1)$$

mit f als der betrachteten physikalischen Größe, f_o einem Wert dieser Größe zur Zeit $t = 0$, t als der Zeit, \vec{r} als dem Ort,¹ \vec{k} als dem Wellenvektor*, und ω als der Frequenz. Die Größe i ist die imaginäre Zahl: $i^2 = -1$.

Der konzeptuelle Ansatz wird auch hier verwendet: Grundkonzepte der Aero- bzw. Hydrodynamik werden eingeführt und mit Anwendungen aus den Bereichen Biologie/Ökologie, Medizin, Sport, Technik und Umweltschutz illustriert.

Wählt man einen alternativen Zugang zur Physik auf der Basis von Phänomenen oder Anwendungen, z.B. anthropogener Treibhauseffekt oder regenerative Energien, so müssen Grundlagen aus verschiedenen Teilbereichen der Physik in einem komplexen System zusammengeführt werden. Dieser Ansatz ist für die vorliegende Einführung nicht geeignet: zum einen müssten die Grundlagen vorausgesetzt werden, zum anderen wäre die Darstellung wesentlich formaler, da in einem komplexen System die Wechselwirkung der Komponenten untereinander zu berücksichtigen ist. Dies kann aber nur quantitativ erfolgen: wenn Sie mit vielen Seilen um den Bauch am Rand einer Klippe stehen (d.h. wenn viele verschiedene Einflüsse auf Sie einwirken), können Sie nur dann feststellen, ob Sie sicher sind oder abstürzen werden, wenn Sie (a) die Richtungen und Stärken der an den Seilen wirkenden Kräfte kennen und (b) diese „gegeneinander verrechnen“ können.

Physik ist eine quantitative Wissenschaft, d.h. es gibt (Mess-)Größen, zwischen denen ein formaler, sprich mathematischer Zusammenhang besteht. Dies erscheint Ihnen vielleicht als eine abschreckende Eigenschaft der Physik – umgekehrt ist der formale Aspekt jedoch gerade bei komplexen Phänomenen wichtig: die formale Darstellung zwingt, die Annahmen und Randbedingungen deutlich herauszustellen. Gerade bei (numerischen) Modellen, d.h. vereinfachten Abbildungen der Natur im Rechner, müssen die Vereinfachungen im Modell deutlich herausgestellt werden, da die Ergebnisse des Modells nur dann gelten, wenn die Annahmen erfüllt sind.

¹Das Symbol \vec{r} bezeichnet den Ortsvektor $\vec{r} = (x, y, z)$ vom Ursprung des Koordinatensystems zu einem Punkt $P(x, y, z)$.

Modelle sind die Reduktion eines komplexen Phänomens auf entscheidende Parameter. Reduktionismus ist ein oft gegen die Naturwissenschaften angeführter Vorwurf. Reduktion ist jedoch sinnvoll: ein Ball fällt runter, egal, ob er rot oder blau ist; der Parameter „Farbe“ ist unwesentlich. Reduktion ist überlebenswichtig: für den Naturwissenschaftler, um die wichtigen Parameter zu erkennen und die formale Beschreibung handhabbar zu machen. Für den Normalsterblichen ebenfalls; sie erfolgt meist sogar automatisch: das Gehirn filtert aus der Fülle von Schallwellen das relevante Signal heraus (Stimme des Partners in einer lauten Disco) und unterdrückt irrelevante Störungen (Rauschen auf gestörter Telefonleitung). Und sehe ich als Radfahrer ein Fahrzeug auf mich zu kommen, so sind ungefähre Geschwindigkeit und vielleicht Größe des Fahrzeugs wichtig, um eine Ausweichstrategie zu entwickeln. Die Farbe des Fahrzeugs ist dagegen unerheblich, obwohl sie in einem anderen Zusammenhang ein wichtiger Parameter sein kann, nämlich bei der ersten „Entdeckung“ des Fahrzeugs. Der Parameter Farbe definiert also eine Situation (Zeit des Entdeckens und damit Zeit bis zum Aufprall), ist bei der Bewertung/Lösung dieser Situation jedoch irrelevant. Auch in physikalischen Szenarien kann ein Parameter für eine bestimmte Fragestellung von Bedeutung sein, für eine andere dagegen unwichtig. Zur Beschreibung einzelner Aspekte eines Phänomens kann es daher unterschiedliche Modelle mit verschiedenen Annahmen geben. So gibt es verschiedene Atmosphärenmodelle, je nachdem ob die Wechselwirkung zwischen Atmosphäre und Ozean, die Ozonschicht, der anthropogene Treibhauseffekt oder natürliche Klimavariabilität untersucht werden sollen. Das entspricht der menschlichen Wahrnehmungsfähigkeit, im Umgang mit der (physikalischen) Umwelt ebenso wie in sozialer Interaktion: das Gehirn verarbeitet bewusst nur Teilaspekte und ist nur begrenzt in der Lage, mehrere davon in ein komplexeres Bild zu integrieren. Das gilt auch für das Bild, das sich ein Gehirn von seinem Gesprächspartner macht: es nimmt nur den Teilaspekt des Anderen wahr, der zu dem jeweiligen Gesprächskontext gehört. Von den meisten Menschen, mit denen man wechselwirkt, kennt man auch nur diesen Aspekt. Lediglich bei sehr engen „Bezugspersonen“ besteht überhaupt ein Bewusstsein über die vielen Teilaspekte – um den Preis, sich sehr intensiv mit dieser einen Person auseinander zu setzen. Reduktion auf Teilaspekte ist also eine Überlebensstrategie, um mit vertretbarem Aufwand mit der Umwelt in Wechselwirkung treten zu können. Die Reduktion, die die Physik macht, ist nichts anderes. Der einzige Unterschied besteht darin, dass sich ein Physiker die Reduktion und Annahmen bewusst macht und sie explizit darstellt. Der Ansatz zu reduzieren dagegen ist völlig natürlich und alltäglich. Dennoch wirkt er auf Nicht-Naturwissenschaftler häufig abschreckend: zum einen, da Reduktion darauf hinweist, dass das bereits komplexe und komplizierte Modell eine Vereinfachung einer noch komplexeren und noch schwerer fassbaren Realität ist, und zum anderen, da es häufig nicht offensichtlich ist, warum eine Annahme/Reduktion gerechtfertigt ist – insbesondere, wenn unmittelbar davor in einem anderen Modell gerade der hier vernachlässigte Parameter der entscheidende war. Das ist in Ordnung, so lange es unterschiedliche Fragen waren, die mit Hilfe der Modelle untersucht werden sollten.

Ich habe die Betrachtung zur Reduktion im Zusammenhang mit Modellen formuliert. Modelle können als mathematische Modelle (Computersimulation) verstanden werden oder als Labormodelle (Darstellung einer Situation unter bestimmten Bedingungen im Experiment, um Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Größen zu untersuchen; Laborexperiment). In der Umweltphysik gibt es beide Ansätze: das mathematische Modell für den Zusammenhang verschiedener Phänomene (die Atmosphäre und der Treibhauseffekt lassen sich nicht als Laborexperiment nachbauen), das Laborexperiment für Detailfragen (z.B. welche Wellenlänge wird wie stark von einem bestimmten Spurengas wie CO_2 absorbiert; wie fördert ein bestimmtes Aerosol die Bildung von Wassertropfchen als Vorstufe der Wolkenbildung). Laborexperimente liefern daher wichtige Details, die in die mathematischen Modelle Eingang finden und tragen gleichzeitig zu einem besseren Verständnis bzw. einer besseren formalen Beschreibung der grundlegenden physikalischen Prozesse bei.

Das Ergebnis eines physikalischen Modells alleine allerdings ist eine bedeutungslose Angabe. Sinnvoll wird die Aussage nur in der Form: „mein Modell liefert unter Annahmen a,b, c und d das Ergebnis e, das mit einem Fehler f behaftet ist.“ Idealerweise sollte auch ein

Hinweis enthalten sein, welche Bedeutung die Annahmen haben (ist die Vernachlässigung eines Parameters zulässig?, in welche Richtung werden die Ergebnisse dadurch beeinflusst?). Die Annahmen, die der Aussage zugrunde liegen, bestimmen gleichzeitig, in welchem Zusammenhang das Ergebnis angewendet werden kann.

1.3 Einheiten und Verwandtes

Der quantitative Vergleich mit der Erfahrung erfordert das Messen. Um Messungen mit einander vergleichbar zu machen, ist es notwendig, ein verbindliches System von Maßeinheiten festzulegen.

1.3.1 SI-Einheiten

Die in der Physik untersuchten Größen werden quantifiziert, durch Zahlenwerte beschrieben. Wollen Sie die Länge eines Tisches angeben, so ist der Zahlenwert alleine nicht ausreichend: der Zahlenwert kann für einen vorgegebenen Tisch z.B. 0.00125, 1.25, 12.5, 125, 1250 oder gar 1250 000 betragen. Alle diese Größenangaben sind korrekt, sie sind nur in unterschiedlichen Einheiten gemessen: Kilometer, Meter, Dezimeter, Zentimeter, Millimeter und Mikrometer. Die Angabe des Zahlenwertes alleine macht also keinen Sinn, stattdessen muss zusätzlich zum Zahlenwert die Maßeinheit angegeben werden.

Definition 1 Eine physikalische Größe besteht aus einer Maßzahl und einer Maßeinheit.

Im obigen Beispiel erhalten wir daher für die Länge l des Tisches $l = 1.25$ m oder $l = 1250$ mm oder $l = 0.00125$ km. Darin ist (für den ersten Fall) die 1.25 die Maßzahl und das m (für Meter) die Einheit. Wollen wir verdeutlichen, welche Einheit wir für die physikalische Größe erwarten, so können wir auch schreiben

$$l [\text{m}] \quad \text{oder} \quad l [\text{S}]. \quad (1.2)$$

Die Schreibweisen sagen aus, dass die physikalische Größe l die Einheit einer Länge oder Strecke haben soll (daher in der zweiten Formulierung das S) und damit in SI-Einheiten in m angegeben wird.

Messen entsteht durch den Vergleich eines Gegenstandes mit einer Maßeinheit. Am Beispiel des Tisches können Sie sich dies veranschaulichen. Als Grundmaß hat man früher einen stets verfügbaren Maßstab verwendet, z.B. die Elle (das ist der Abstand zwischen Fingerspitzen der ausgestreckten Hand und dem Ellenbogen). Durch wiederholtes Anlegen der Elle an den Tisch erhält man dessen Länge. Die Elle ist einerseits praktisch, da es ein stets zur Verfügung stehende Maßstab ist, andererseits jedoch unpraktisch, da der Maßstab vom Einzelnen abhängt: die Elle ist daher keine universelle Maßeinheit, die unabhängig vom Messenden an jedem Ort den gleichen Wert annimmt. Daher ist man dazu übergegangen, reproduzierbare Maßstäbe zu verwenden. Für die Längenmessung wurde dazu ein genau definierter Metallstab von exakt 1 m Länge, der Ur-Meter, zu Grunde gelegt. Heute werden bei der Definition der Basiseinheiten sogar noch universellere Verfahren verwendet.

In der Physik werden sehr viele unterschiedliche Größen betrachtet, wie z.B. Längen, Zeiten, Geschwindigkeiten, Kräfte, Energien, Ströme, elektrische und magnetische Felder und vieles andere mehr. Dennoch sind nur wenige fundamentale Einheiten ausreichend, um daraus alle anderen Einheiten her zu leiten. Diese grundlegenden Maßeinheiten sind die SI-Einheiten. Durch sie werden die sieben Grundgrößen oder Basiseinheiten definiert:

- **Zeit:** 1 Sekunde ist das 9 192 631 770 fache der Periodendauer aus dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustands von Atomen des Nuklids ^{133}Cs entsprechenden Strahlung.
- **Länge:** 1 Meter ist die Länge der Strecke, die Licht im Vakuum während der Dauer von $1/2999\,792\,458$ Sekunden durchläuft.

Zehnerpotenz	Vorsilbe	Kurzzeichen	Beispiel
10^{18}	Exa	E	Em
10^{15}	Peta	P	Pm
10^{12}	Tera	T	Tm
10^9	Giga	G	Gm
10^6	Mega	M	Mm
10^3	Kilo	k	km
10^2	Hekto	h	hPa
10	Deka	da	dam
10^{-1}	Dezi	d	dm
10^{-2}	Zenti	c	cm
10^{-3}	Milli	m	mm
10^{-6}	Mikro	μ	μm
10^{-9}	Nano	n	nm
10^{-12}	Piko	p	pm
10^{-15}	Femto	f	fm
10^{-18}	Atto	a	am

Tabelle 1.1: Vorsilben für Zehnerpotenzen bei Maßeinheiten

- **Masse:** 1 Kilogramm ist die Masse des internationalen Kilogrammprototyps.
- **Elektrische Stromstärke:** 1 Ampere ist die Stärke eines zeitlich unveränderlichen Stroms, der, durch zwei im Vakuum parallel im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter von vernachlässigbar kleinem kreisförmigen Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern je 1 Meter Leiterlänge die Kraft $2 \cdot 10^{-7}$ N hervorruft.
- **Temperatur:** 1 Kelvin ist der 273.16te Teil der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunktes des Wassers.
- **Lichtstärke:** 1 Candela ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz 540 THz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung $1/683$ W/sr beträgt.
- **Stoffmenge:** 1 Mol ist die Stoffmenge eines Systems, das aus ebenso vielen Einzelteilchen besteht, wie Atome in $12/1000$ Kilogramm des Kohlenstoffnuklids ^{12}C enthalten sind.

Diese Definitionen beziehen sich größtenteils (mit Ausnahme der Masse) auf fundamentale Größen (atomare Größen oder Naturkonstanten wie die Lichtgeschwindigkeit) und hängen nicht von den Umgebungsbedingungen ab. Sie sind daher, zumindest im Prinzip, zu jeder Zeit und an jedem Ort exakt reproduzierbar und sind nicht, wie z.B. das Urmeter, von der Umgebungstemperatur oder anderen Parametern abhängig.

1.3.2 Vorsilben

Die SI-Einheiten sind zwar das Basissystem, für einige Anwendungen sind sie jedoch unhandlich. Betrachten Sie den Amazonas als Ökosystem, so werden Sie Längenangaben eher in km als in m vornehmen, während Sie bei der Beschreibung von Strukturen einer Zelle eher mit nm als mit m arbeiten werden. Die hierbei verwendeten Vorsilben für bestimmte, im Rahmen des SI-Systems definierte Zehnerpotenzen sind in Tab. 1.1 aufgeführt.

Häufig gibt es Fragestellungen, bei denen man nicht an einer genauen Zahl interessiert ist sondern nur an der Größenordnung. So können Sie, auch ohne Kenntnis des Individuums sagen, dass die Körpergröße eines erwachsenen Menschen in der Größenordnung oder kurz

Ordnung von 1 m liegt; die benachbarten Größenordnungen von Dekameter bzw. Dezimeter wären sicherlich zu groß oder zu klein. Entsprechend geben Sie für die Größe von Viren an, dass diese im nm-Bereich liegt während der Abstand Flensburg–München im Megameter-Bereich liegt.

1.3.3 Rechnen mit Einheiten

Physikalische Größen werden in Gesetzen mit einander verknüpft. So ist z.B. die Geschwindigkeit v der Quotient aus der zurückgelegten Strecke s und der dazu benötigten Zeit t :

$$v = \frac{s}{t} . \quad (1.3)$$

Aus den SI-Einheiten wissen wir, dass die Strecke in Metern und die Zeit in Sekunden anzugeben ist, oder in formaler Schreibweise s [m] und t [s]. Wenn wir dies in (1.3) einsetzen, so erhalten wir automatisch die Einheiten für die Geschwindigkeit

$$v \left[\frac{\text{S}}{\text{T}} \right] = \frac{s \left[\text{m} \right]}{t \left[\text{s} \right]} = v \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] , \quad (1.4)$$

d.h. die Geschwindigkeit hat die Dimension einer Strecke pro Zeit (das ist das [S/T] im linken Teil) oder ausgedrückt in SI-Einheiten wird die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde angegeben.

Die Benutzung der Einheiten in Gleichungen ist aus zwei Gründen wichtig. Jede Gleichung muss dimensionsrichtig sein, d.h. auch die Einheiten müssen stimmen. Wenn Sie also die Einheiten bei der Rechnung berücksichtigen und plötzlich für eine Strecke eine Einheit von Sekunden erhalten, wissen Sie, dass in der Rechnung ein Fehler unterlaufen sein muss. Zum anderen sollten Sie die Einheiten grundsätzlich mit in der Gleichung verwenden, da sich zwar bei einem Bruch die die Einheiten der Längen in Zähler und Nenner kürzen, Sie aber beim Kürzen von km gegen m noch einen Faktor 1000 übrig behalten.

Beim Umrechnen von Einheiten können Sie sich mit etwas Schreibaufwand einige zusätzliche Sicherheit verschaffen. Wenn Sie die Aufgabe haben, die Geschwindigkeit von m/s in km/h umzuwandeln, so können Sie wie folgt vorgehen. Die Ausgangsgleichung ist

$$v = \frac{s}{t} = \frac{10 \text{ m}}{5 \text{ s}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} . \quad (1.5)$$

In diesem Bruch stehen die Einheiten m und s. Für die Umwandlung wissen Sie, dass gilt

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} \quad \text{oder} \quad 1 = \frac{1 \text{ km}}{1000 \text{ m}} \quad (1.6)$$

und entsprechend für die Zeit

$$1 \text{ h} = 3600 \text{ s} \quad \text{oder} \quad 1 = \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} . \quad (1.7)$$

Die ‘1’ aus (1.6) können wir im Zähler des Bruchs (1.5) einfach dazu schreiben (Multiplikation mit 1 ändert ja am Wert nichts), die ‘1’ aus (1.7) im Nenner und erhalten

$$v = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2 \frac{\text{m} \frac{\text{km}}{1000 \text{ m}}}{\text{s} \frac{\text{h}}{3600 \text{ s}}} . \quad (1.8)$$

Werfen wir einen Blick auf die Einheiten, so erkennen wir, dass sich im Zähler des großen Bruchs die m kürzen und nur die gewünschten km stehen bleiben; entsprechend kürzen sich im Nenner die s und nur die h bleibt stehen. Dann müssen wir nur noch die Zahlen dieses Doppelbruchs verzerren und erhalten als Endergebnis

$$v = 2 \frac{\frac{1}{3600} \text{ km}}{\frac{1}{1000} \text{ h}} = 2 \frac{3600 \text{ km}}{1000 \text{ h}} = 2 \cdot 3.6 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 7.2 \frac{\text{km}}{\text{h}} . \quad (1.9)$$

Die Umrechnung einer Geschwindigkeit von m/s auf km/h bringt neben den neuen Einheiten also einen zusätzlichen Faktor von 3.6.

α	Alpha	β	Beta	γ, Γ	Gamma	δ, Δ	Delta
ϵ, ε	Epsilon	ζ	Zeta	η	Eta	$\theta, \vartheta, \Theta$	Teta
ι	Iota	κ	Kappa	λ, Λ	Lambda	μ	Mü
ν	Nü	ξ, Ξ	Xi	\omicron	Omnikron	π, Π	Pi
ρ, ϱ	Rho	σ, Σ	Sigma	τ	Tau	υ, Υ	Upsilon
ϕ, φ, Φ	Phi	χ	Chi	ψ, Ψ	Psi	ω, Ω	Omega

Tabelle 1.2: Griechische Buchstaben

1.3.4 Griechische Buchstaben

Physikalische Größen sind nur mit einem Buchstaben bezeichnet. Beispiele sind die Länge l , die Masse m oder die Geschwindigkeit v .² Auf Grund dieser Einschränkung lassen sich mit dem lateinischen Alphabet nicht allzu viele physikalische Größen bezeichnen. Daher werden häufig griechische Buchstaben zur Hilfe genommen, die wichtigsten in der Physik verwendeten sind in Tab. 1.2 zusammengefasst; dabei wurden nicht alle Großbuchstaben berücksichtigt, auch sind für einige Kleinbuchstaben zwei Schreibweisen angegeben.

1.4 Literatur

Im Rahmen der Vorlesung sollen die Anwendungen von Physik in der Umwelt, der Erfahrungswelt und natürlich in der Biologie deutlich gemacht werden. Dafür gibt es meines Wissens kein geeignetes Lehrbuch, das an dieser Stelle empfohlen werden kann. Umgekehrt sind die physikalischen Grundlagen jedoch von der Anwendung unabhängig, d.h. die Grundlagen können im Prinzip in jedem Physikbuch nachgeschlagen werden. In den meisten Lehrbüchern etwas vernachlässigt ist der Aspekt der Hydrodynamik, der in der Vorlesung einen relativ breiten Raum einnimmt. Hier ist der Vogel [48] sehr zu empfehlen, ansonsten müssen Sie sich an Hand der Notizen zur Vorlesung behelfen.

Im folgenden sind einige Bücher mit kurzen Kommentaren bezüglich ihrer Brauchbarkeit aufgelistet:

- Hewitt, P.G., 1998: *Conceptual Physics*, Addison Wesley, Reading NY
Das Buch legt sehr viel Wert auf das Verständnis physikalischer Begriffe und erklärt sehr anschaulich, allerdings kommt der formale Aspekt der Physik an vielen Stellen zu kurz. Ist daher sehr gut geeignet für Leute, die Physik wirklich verstehen wollen – und für Leute, die bereit sind, ein wenig Spaß an Physik zu haben. Wenn Sie jedoch nur ein Buch benötigen, um Aufgaben zu lösen oder über die Klausur zu kommen, ist dieses alleine nicht geeignet.
- Grehn, J., and Krause, J., 1998: *Metzler Physik*, Schroedel, Hannover
Standard-Oberstufenbuch für den Leistungskurs. Die Vorlesung wird inhaltlich an vielen Stellen nicht über das hinausgehen, auch der formale Rahmen entspricht ungefähr dem der Vorlesung. Allerdings werden einige für die Biologie interessante Themen nur recht sparsam behandelt. Wer das Buch aus der Schulzeit noch hat, kann damit erst einmal weiter arbeiten.
- Pitka, R., S. Bohrmann, H. Stöcker, und G. Terlecki, 2001: *Physik – der Grundkurs*, Harri Deutsch, Frankfurt/M.
Recht gutes und anspruchsvolles Physikbuch für Nebenfächler, in dem allerdings auch Vektoren und Integrale auftreten. Hat ungefähr das Niveau, was für die Vorlesung wünschenswert wäre (aber leider nicht immer erreicht wird). Auch als Vorbereitung aufs Praktikum und für die weitere Begleitung im Studium (z.B. Biophysik) nicht schlecht.

²Eine Liste der in diesem Skript verwendeten Formelzeichen finden Sie im Anhang.

- Menschede, A., 2001: *Gerthsen Physik*, Springer, Berlin
Sehr konventionelles und umfangreiches Buch – allerdings für Physiker und unter Verwendung von etwas Mathematik. Wenn Sie physikalisches Interesse haben und sich eventuell auch später in Richtung Biophysik spezialisieren wollen, ist der Gerthsen eine brauchbare Grundlage.
- Gonick, L., and A. Huffman, 1991: *The Cartoon Guide to Physics*, Harper Perennial, New York
Zwar nicht als alleinige Lektüre geeignet aber eine gute Ergänzung zur Vorlesung oder zu anderen Büchern. Auch wenn die Darstellungsform für ein Physikbuch etwas ungewöhnlich ist, die physikalischen Prinzipien werden sehr gut und anschaulich erklärt. Ist eine gute Ergänzung zu den drei vorher erwähnten Büchern, da diese alle eher auf formale Aspekte Wert legen und die Anschauung manchmal eher zu kurz kommt.
- Krauss, L.M., 1998: *Nehmen wir an, die Kuh ist eine Kugel ...*, dtv, München
Ebenfalls zum nebenher Lesen. Setzt sich mit der Abstraktion in der Physik aus, also dem, was Physik für viele Normalverbraucher eher abschreckend macht.
- Vogel, S., 1994: *Life in moving fluids*, Princeton University Press, Princeton NY
Das Buch ist eine sehr schöne Verknüpfung von physikalischen Grundlagen (insbesondere Hydrodynamik) und sehr unterschiedlichen Aspekten der Biologie (Kreislauf, Ernährung eines Schwamms, Pflanzen in Tidengewässern, Strahlstromantrieb bei Wassertieren u.v.a.m.). Es ist gut zu lesen und kommt mit sehr wenigen aber dafür sehr gut erklärten Formeln aus. Es kann aufgrund des begrenzten Themenumfangs kein Ersatz sein für ein allgemeines Lehrbuch der Physik, es ist nur einfach spannend zu sehen, mit wie wenig Physik man soviel Biologie verstehen kann.
- Durey, A., 1997: *Physique pour les sciences du sport*, Masson, Paris
Sehr viel Bio- und Hydromechanik und Anwendung grundlegender physikalischer Sachverhalte auf verschiedenen Sportarten. Sehr interessant (ähnlich wie der Vogel), aber ebenfalls kein Ersatz für ein Lehrbuch sondern für interessierte Leser als Zusatzlektüre.

1.5 Aufgaben

Am Ende jedes Kapitels finden Sie, wie auch hier, Aufgaben. Diese Aufgaben sind sehr unterschiedlich, sie gliedern sich in Verständnisfragen, Multiple-Choice Aufgaben und klassische Rechenaufgaben. Sie erhalten ferner vor jeder Übungsstunde einen Zettel mit Aufgaben, die in der Übung behandelt werden. Ich empfehle Ihnen dringend, sich mit allen Aufgaben am Ende eines Kapitels auseinander zu setzen, da die Klausuren auf diesen Fragen und Aufgaben basieren. Fragen zu den nicht auf dem Übungszettel vorhandenen Aufgaben können Sie in der Übung stellen.

1.5.1 Verständnisfragen

1. Warum werden die SI-Einheiten relativ umständlich definiert? Warum ist die Verwendung eines Vergleichsmaßstabs (z.B. Lineal oder Zollstock für die Längenmessung) wie im täglichen Leben nicht ausreichend?
2. Welche Grundgrößen werden durch die SI-Einheiten definiert?
3. Ist der Kilometer eine SI-Einheit?
4. Ist die Stunde eine SI-Einheit?
5. Welche Bedeutung haben die Vorsilben bei Einheiten?
6. Was versteht man unter abgeleiteten Einheiten?

7. Was versteht man unter einer Größenordnung?
8. Welche der folgenden Einheiten sind SI-Einheiten, welche nicht: Meter, Candela, Stunde, Meter pro Sekunde, Jahr, Kilogramm, Kelvin, Gramm, Sekunde, Kilometer, Lux, Ampere, Kilometer pro Stunde, Volt, Ohm, Newton, mol, Lumen, Celsius, Stundenkilometer?
9. Warum werden bei der Definition der Basiseinheiten atomare Größen oder Naturkonstanten verwendet, obwohl dadurch der zur Erzeugung des entsprechenden Maßstabs notwendige Aufwand (z.B. Atomuhr für Zeitmessung) sehr groß ist?
10. Sie kennen die sieben Basiseinheiten und physikalische Gesetze. Wie leiten sich die Einheiten für andere physikalische Größen her? Beispiel: die Kraft hat die Einheit Newton N und ist definiert als $F = m \cdot a$ mit m als der Masse in kg und a als der Beschleunigung in m/s^2 . Wie setzt sich die Einheit Newton aus den Basiseinheiten zusammen?
11. Was ist Dimensionsanalyse?
12. Warum ist es wichtig, in physikalischen Gleichungen die Einheiten der Größen zu berücksichtigen?
13. Welche Bedeutung haben Beobachtung bzw. Experiment in der Physik?
14. Welche Aufgaben haben Theorien und Modelle in der Physik?
15. Warum gibt es qualitative und quantitative Modelle? Wie unterscheiden sie sich?

1.5.2 Rechenaufgaben

1. Rechnen Sie die folgenden Größen um:
 - (a) eine Länge von 1 cm ist in km und nm anzugeben.
 - (b) eine Fläche von 2 m^2 ist in mm^2 , cm^2 und km^2 anzugeben.
 - (c) ein Volumen von 1 l ist in m^3 , cm^3 und mm^3 anzugeben.
 - (d) eine Zeitspanne von 4 h und 4 min ist in Sekunden anzugeben.
 - (e) eine Zeitspanne von 84678 s in Tagen, Stunden, Minuten und Sekunden.
 - (f) eine Geschwindigkeit von 34 cm/min in m/s, km/h, mm/s.
 - (g) eine Geschwindigkeit von 64 km/h in m/s.
2. Überprüfen Sie an Hand der Einheiten, welche der folgenden Gleichungen korrekt sein könnte:

$$\begin{aligned}
 s &= at/2 \\
 v &= a/t \\
 s &= v \cdot t \\
 v &= s \cdot t \\
 a &= v/t.
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

Die Einheiten für die angegebenen Größen sind s [m], v [m/s], t [s], a [m/s^2].

3. Die Einheit der Kraft F ist das Newton N. Die Kraft ist mit der Masse m [kg] und der Beschleunigung a [m/s^2] über die Gleichung $F = m \cdot a$ verknüpft. Geben Sie die Einheit N in SI-Einheiten an.

4. Überprüfen Sie, ob die folgenden Energiebilanzen korrekt sein können:

$$\begin{aligned} E &= mgh + mv/2 \\ E &= kx^2 + mv^2/2 \\ E &= Fx + mgh \\ E &= mx\omega^2/2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

mit m [kg], v [m/s], g [m/s²], h [m], x [m], F [N], ω [s⁻¹] und E [J]=[Nm].

5. Überprüfen Sie, ob die folgenden Gleichungen dimensionsrichtig sind:

$$\begin{aligned} v &= \frac{ds}{dt} \quad \text{mit} \quad v \text{ [m/s]}, \quad s \text{ [m]}, \quad t \text{ [s]}, \\ y &= \frac{F}{m \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + (2D\omega_1\omega_2)^2}} \quad \text{mit} \quad F \text{ [N]}, \quad m \text{ [kg]}, \quad y \text{ [m]}, \quad \omega_i \text{ [s}^{-1}\text{]}, \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta l} \\ &\quad \text{mit} \quad V \text{ [m}^3\text{]}, \quad t \text{ [s]}, \quad R \text{ [m]}, \quad p \text{ [N/m}^2\text{]}, \quad \eta \text{ [Ns/m}^2\text{]}, \quad l \text{ [m]}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

6. Um wie viele Größenordnungen unterscheiden sich die Einheiten μm und km ?
7. Hektar ist die Kurzform für Hektometer. Wie viele Hektar sind in einem km^2 enthalten?
8. Sie haben einen Quader mit Kantenlängen von 1 dm, 0.2 km und 4 μm . Bestimmen Sie das Volumen des Quaders in mm^3 , cm^3 und Liter (dm^3).
9. Eine Rennschnecke (Geschwindigkeit von 1 Gm/Jahr) sieht kurz vor sich einen Igel (Geschwindigkeit 1 nm/ μs). Sie hetzt ihm hinter her. Wird sie ihn einholen können?
10. Sie sind unlängst Besitzer eines (leider völlig ausgetrockneten) Stausees mit einem Fassungsvermögen von 16 km^3 geworden. Außerdem haben Sie eine Flotte von 20 Tanklastzügen mit einem Fassungsvermögen von je 20 000 l geerbt. Wie oft müssen diese gefüllt angerückt sein, bis der Stausee endlich wieder voll ist?
11. Eines der wichtigsten Ergebnisse von Einstein's Arbeiten ist die Gleichung $E = mc^2$ worin E die Energie, m die Masse und c die Lichtgeschwindigkeit sind. Bestimmen Sie die Einheit der Energie E .
12. Die kinetische Energie eines Baseball ist bestimmt zu $mv^2/2 = p^2/(2m)$ mit m als der Masse des Baseballs und v als seiner Geschwindigkeit. Diese Gleichung kann zur Definition des Impulses p verwendet werden. Welche Einheit hat der Impuls?
13. Der menschliche Körper (Volumen ungefähr 0.06 m^3) besteht im wesentlichen aus Wasser. Ein Mol Wasser enthält $6 \cdot 10^{23}$ Moleküle und hat eine Masse von 18 g. Gehen Sie davon aus, dass die Wassermoleküle in Ihrem Körper dicht bei einander liegen. Machen Sie eine einfache Abschätzung der Größe von Wassermolekülen.
14. Überprüfen Sie anhand der Einheiten, ob die folgenden Gleichungen korrekt sind:

- (a) Definition der kinetischen Energie

$$E_{\text{kin}} \text{ [J]} = \frac{1}{2} m \text{ [kg]} \left(v \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \right)^2 \quad \text{mit} \quad [\text{J}] = [\text{Nm}] = \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} \right], \quad (1.13)$$

- (b) Definition der potentiellen Energie

$$E_{\text{pot}} \text{ [J]} = m \text{ [kg]} a \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] (h \text{ [m]})^2, \quad (1.14)$$

- (c) Definition der Leistung als Arbeit pro Zeit (Einheit
- $W = J/s$
-):

$$P = m[\text{kg}] a \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] v \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]. \quad (1.15)$$

15. Welche Einheit hat die durch die folgende Gleichung beschriebene Größe
- M

$$M = \frac{\rho}{2} v^2 A r (c_A \cos \alpha + c_W \sin \alpha) \quad (1.16)$$

mit der Dichte ρ [kg/m^3], der Geschwindigkeit v [m/s], der Fläche A [m^2], dem Abstand r [m], dem Auftriebsbeiwert c_A und dem Widerstandsbeiwert c_W als dimensionslosen Größen.

16. Können die folgenden Gleichungen stimmen?

- (a) schiefer Wurf: die Einheiten sind Höhe
- y
- [
- m
-], maximale Flughöhe
- h_m
- [
- m
-], Erdbeschleunigung
- g
- [
- m/s^2
-], Anfangsgeschwindigkeit
- v_o
- [
- m/s
-], und horizontale Koordinate
- x
- [
- m
-]

$$y - h_m = -\frac{g}{2v_o^2 \cos^2 \alpha} \left(x - \frac{v_o^2 \sin(2\alpha)}{2g} \right)^2. \quad (1.17)$$

- (b) van der Waal's Gleichung: die Einheiten sind Temperatur
- T
- [
- K
-], molekulare Gaskonstante
- R
- [
- $\text{J}/(\text{K mol})$
-], eine Konstante
- b
- [
- m^3/mol
-], molares Volumen (Volumen pro mol)
- v_m
- [
- m^3/mol
-], eine Konstante
- a
- [
- $\text{N m}^4/\text{mol}$
-], und Druck
- p
- [
- N/m^2
-]

$$\left(P + \frac{a}{v_m^2} \right) (v_m - b) = RT \quad (1.18)$$

Sie sollten ferner wissen, dass einige der obigen Einheiten sich wie folgt aus den Basiseinheiten ergeben:

$$\text{N} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}, \quad \text{J} = \text{Nm} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}. \quad (1.19)$$

17. Ein 12 cm^3 großer Würfel eines Materials hat eine Masse von 24 g . Ein 74 m^3 großer Findling dagegen wiegt 20 t . Welcher Körper hat die größere Dichte? (Dichte = Masse pro Volumen)
18. Eine mongolische Wüstenrennmaus legt in einem halben Tag 40 Meilen zurück, eine kenianische Stabheuschrecke dagegen schafft 1.2 km in 15 min , während eine amerikanische Rennschnecke $4 \text{ dm}/\text{s}$ zurücklegt. In welcher Reihenfolge kommen diese Tiere bei einem Wettrennen ins Ziel? (Hinweis: 1 Meile entspricht 1.609 km)
19. Sie werden im Laufe der Physik-Vorlesung häufiger Einheiten umrechnen müssen. Oder Sie machen sich eine 'Spickzettel' für gebräuchliche Probleme. Bestimmen Sie dazu die Faktoren, die sich bei den folgenden Umrechnungen ergeben:
- (a) Geschwindigkeit von m/s auf km/h ,
 - (b) Geschwindigkeit von km/h auf m/s ,
 - (c) Fläche von m^2 auf km^2 ,
 - (d) Fläche von km^2 auf m^2 ,
 - (e) Fläche von m^2 auf cm^2 ,
 - (f) Fläche von cm^2 auf m^2 ,
 - (g) Volumen von cm^3 auf m^3 ,
 - (h) Volumen von m^3 auf cm^3 ,
 - (i) Volumen von l auf cm^3 ,

- (j) Volumen von cm^3 auf l,
- (k) Volumen von l auf m^3 ,
- (l) Volumen von m^3 auf l,
- (m) Dichte von g/cm^3 auf kg/m^2 ,
- (n) Dichte von kg/m^3 auf g/cm^3 .

Kapitel 2

Vektoren und andere mathematische Hilfsmittel

Viele physikalische Größen, wie z.B. die Kraft, haben nicht nur einen Betrag sondern auch eine Richtung. Daher werden diese Größen als Vektoren dargestellt. Dieses Kapitel soll Sie mit Vektoren vertraut machen.

Außerdem enthält das Kapitel einige Abschnitte zu elementaren mathematischen Fertigkeiten, die Ihnen sowohl aus der Schule als auch aus den Mathematik-Vorlesungen in ihrem Studium bekannt sein sollten. Betrachten Sie die hier gegebenen Abschnitte als ein Angebot: wenn Sie die Inhalte ohnehin beherrschen, ist es gut. Wenn Sie dagegen Schwierigkeiten mit diesen elementaren mathematischen Fertigkeiten haben, sollten Sie sich intensiv damit auseinander setzen. Viele dieser Rechnungen kommen in der Physik gleichsam als Nebenrechnungen vor.

2.1 Rechnen mit Vektoren

Definition 2 *Ein Vektor ist eine gerichtete Größe. Er wird durch eine Richtung und eine Länge (einen Betrag) beschrieben. Ein Vektor kann eine Verschiebung charakterisieren.*

Zur Kennzeichnung eines Vektors werden im Handschriftlichen (und in diesem Skript) Symbole verwendet, die mit einem Pfeil versehen sind, z.B. \vec{F} , \vec{v} . In vielen Büchern werden Vektoren im Fettdruck gesetzt, z.B. \mathbf{F} , \mathbf{v} .

Bei einer physikalischen Vektorgröße gehört zur vollständigen Beschreibung die Angabe einer *Maßeinheit*. Der Betrag eines physikalischen Vektors besteht aus Maßzahl und Einheit; für den Betrag des Vektors \vec{F}_1 gilt dann $|\vec{F}_1| = F_1 = 100 \text{ N}$.

Symbolisch kann ein Vektor durch einen Pfeil dargestellt werden, vgl. Abb. 2.1. Die Länge des Pfeils gibt den Betrag des Vektors, die Pfeilspitze legt seine Richtung fest.

2.1.1 Orts- und Verschiebungsvektor

Nehmen wir in der letzten Darstellung als Anfangspunkt Q den Ursprung mit den Koordinaten $(0,0,0)$, so kann der *Ortsvektor* \vec{r} des Punktes $P = P(x, y, z)$ in kartesischen Koordinaten (vgl. Abb. 2.1 links) geschrieben werden als

$$\vec{r} = (x, y, z) = (r_x, r_y, r_z) . \quad (2.1)$$

Der Ortsvektor \vec{r} gibt also die Lage eines Punktes P relativ zum Koordinatenursprung an.

Vektoren können auch eine Verschiebung beschreiben. Zur Angabe eines *Verschiebungsvektors* \vec{r} zwischen den Punkten P_1 und P_2 benötigen wir die Ortsvektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 der beiden Punkte P_1 und P_2

$$\vec{r} = -\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 . \quad (2.2)$$

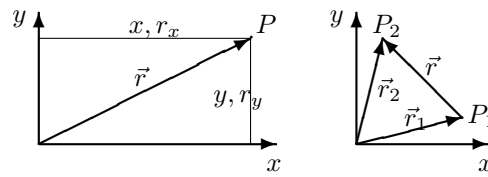


Abbildung 2.1: Vektor als Ortsvektor (links) und zur Darstellung einer Verschiebung zwischen den Punkten P_1 und P_2

Anschaulich bedeutet diese Gleichung, dass Sie erst vom Punkt P_1 entgegen dessen Ortsvektor \vec{r}_1 zurück zum Ursprung gehen und von dort entlang des Ortsvektors \vec{r}_2 zum Punkt P_2 .

Spezielle Vektoren sind:

- der *Nullvektor* $\vec{0}$, für dessen Betrag gilt $|\vec{0}| = 0$. Für ihn lässt sich keine Richtung angeben, häufig wird der Vektorpfeil über der Null weggelassen, da aus dem Zusammenhang deutlich wird, dass es sich um einen Vektor handelt.
- der *Einheitsvektor* \vec{e} ist ein Vektor mit dem Betrag 1, d.h. es ist $|\vec{e}| = 1$. Einheitsvektoren werden häufig verwendet, wenn eine Richtung angegeben werden soll. So geben Einheitsvektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z die Richtungen der Achsen eines kartesischen Koordinatensystems an.

2.1.2 Kartesische Koordinaten

Kartesische Koordinaten sind das konventionelle rechtwinklige Koordinatensystem, das Sie z.B. bei der Darstellung von Funktionen verwenden. Das zweidimensionale System mit x - und y -Achse ist ein Spezialfall, die allgemeinere Darstellung erfolgt im dreidimensionalen System mit der zusätzlichen z -Achse. Ein kartesisches Koordinatensystem ist also über drei senkrecht aufeinander stehende Achsen definiert, die von einem gemeinsamen Ursprung ausgehen und ein Rechtssystem (vgl. Kreuzprodukt, Abschn. 2.1.5) bilden.

Zur Bestimmung der Lage eines Punktes werden die Abstände des Punktes vom Ursprung entlang dieser Achsen angegeben als ein Zahlentripel (x, y, z) . Unter Verwendung der Einheitsvektoren \vec{e}_x , \vec{e}_y und \vec{e}_z entlang dieser Achsen lässt sich der Ortsvektor \vec{r} des Punktes $P = P(x, y, z)$ schreiben als

$$\vec{r} = (r_x, r_y, r_z) = (x, y, z) = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z. \quad (2.3)$$

Der Ortsvektor \vec{r} im linken Teil von Abb. 2.1 bildet die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Achsenabschnitten x und y als Katheten. Für den *Betrag* (die Länge) dieses Vektors gilt daher

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} \quad (2.4)$$

bzw. im dreidimensionalen Fall

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}. \quad (2.5)$$

Der Einheitsvektor $\vec{e}_{\vec{r}}$ in Richtung eines beliebigen Vektors \vec{r} ergibt sich durch die Division des Vektors durch seinen Betrag:

$$\vec{e}_{\vec{r}} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (2.6)$$

Beispiel 1 Der Vektor $\vec{r} = 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y - 5\vec{e}_z$ lässt sich auch schreiben als $\vec{r} = (3, 4, -5)$. Sein Betrag ist

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}, \quad (2.7)$$

der Einheitsvektor in Richtung von \vec{r} ist damit gegeben als

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{1}{\sqrt{50}} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

□

2.1.3 Vektoralgebra in kartesischen Koordinaten

Der zu einem Vektor \vec{a} gehörende inverse Vektor oder *Gegenvektor* $-\vec{a}$ besitzt den gleichen Betrag wie der Vektor \vec{a} jedoch die entgegengesetzte Richtung. Der Gegenvektor erlaubt damit die Umkehrung einer Verschiebung. Komponentenweise lässt er sich darstellen als

$$-\vec{a} = (-1) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Vektoraddition und -subtraktion

Die Addition von zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} kann graphisch durch das Aneinanderhängen der Vektoren erfolgen: der Vektor \vec{b} wird parallel zu sich selbst verschoben bis sein Anfangspunkt in den Endpunkt des Vektors \vec{a} fällt. Der vom Anfangspunkt des Vektors \vec{a} zum Endpunkt des Vektors \vec{b} gerichtete Vektor ist der Summenvektor $\vec{a} + \vec{b}$.¹

In kartesischen Koordinaten wird ein Vektor komponentenweise addiert:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Es gibt ein neutrales Element, den *Nullvektor*, und ein inverses Element, den *Gegenvektor*. Die Addition des inversen Elements liefert das neutrale Element:

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_x \\ -a_y \\ -a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - a_x \\ a_y - a_y \\ a_z - a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}. \quad (2.11)$$

Die Subtraktion von Vektoren kann als die Addition des inversen Elements betrachtet werden:

$$\begin{aligned} \vec{a} - \vec{b} &= \vec{a} + (-\vec{b}) = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -b_x \\ -b_y \\ -b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + (-b_x) \\ a_y + (-b_y) \\ a_z + (-b_z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Diese Betrachtungsweise ist auch für die geometrische Darstellung möglich.

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Die Multiplikation eines Vektors \vec{a} mit einem Skalar α kann als die α -fach nacheinander erfolgende Ausführung der Verschiebung \vec{a} interpretiert werden. Damit lässt sie sich auf eine wiederholte Addition zurückführen. Graphisch erfolgt die Multiplikation durch Verlängerung

¹Alternativ können Sie die beiden Vektoren auch so verschieben, dass ihre Anfangspunkte zusammenfallen. Dann spannen diese Vektoren ein Parallelogramm auf, dessen Diagonale dem Summenvektor entspricht.

des Vektors: die Richtung bleibt erhalten, der Betrag wird um den Faktor α erhöht. In kartesischen Koordinaten erfolgt die Multiplikation mit einem Skalar komponentenweise, entsprechend der anschaulichen Vorstellung der α -fachen Verschiebung:

$$\alpha \vec{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_x \\ \alpha a_y \\ \alpha a_z \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Für den Betrag des Vektors $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ gilt

$$\begin{aligned} |\vec{b}| &= |\alpha \vec{a}| = \left| \sqrt{(\alpha a_x)^2 + (\alpha a_y)^2 + (\alpha a_z)^2} \right| \\ &= \left| \sqrt{\alpha^2 (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)} \right| = |\alpha| |\vec{a}|. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Für $\alpha > 0$ sind Ausgangs- und Ergebnisvektor parallel, für $\alpha < 0$ sind sie anti-parallel.

Die Division eines Vektors durch einen Skalar λ entspricht der Multiplikation des Vektors mit dem Kehrwert $\mu = 1/\lambda$ der Zahl:

$$\frac{\vec{a}}{\lambda} = \mu \vec{a}. \quad (2.15)$$

2.1.4 Skalarprodukt

Definition 3 Das innere Produkt (Skalarprodukt) zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist die Zahl (Skalar) $c = a b \cos \alpha$:

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha = ab \cos \alpha. \quad (2.16)$$

Darin sind a und b die Beträge der Vektoren \vec{a} und \vec{b} ; α ist der von ihnen eingeschlossene Winkel.

Das Skalarprodukt hat die folgenden Eigenschaften:

1. das Ergebnis ist ein Skalar,
2. der Winkel zwischen den Vektoren wird berücksichtigt, und
3. die Beträge der beiden Vektoren werden berücksichtigt.

In kartesischen Koordinaten lässt sich das Skalarprodukt berechnen gemäß

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (2.17)$$

Der Betrag eines Vektors lässt sich mit Hilfe des Skalarprodukts berechnen. Da gilt $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$, gilt für den Betrag:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a a \cos 0^\circ} = \sqrt{a^2} = a. \quad (2.18)$$

Das Skalarprodukt kann verwendet werden, um Vektoren auf *Orthogonalität* zu prüfen. In diesem Fall ist der von den Vektoren eingeschlossene Winkel $\varphi = 90^\circ$, d.h. es gilt $\cos \varphi = 0$. Damit verschwindet gemäß (2.16) das Skalarprodukt und es gilt

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \quad (2.19)$$

Dies ist ein Spezialfall für die Bestimmung des Winkels φ zwischen zwei Vektoren mit Hilfe des Skalarprodukts:

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}, \quad (2.20)$$

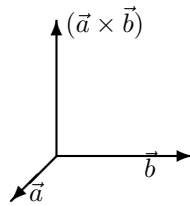


Abbildung 2.2: Orientierung der Vektoren im Rechtssystem

wie sich direkt aus der Definition (2.16) ergibt.

Die *Arbeit* im physikalischen Sinne ist für eine konstante Kraft \vec{F} definiert über das Skalarprodukt

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}. \quad (2.21)$$

Einsetzen der Definition (2.16) des Skalarprodukts liefert

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos \varphi = F_s s \quad (2.22)$$

mit F_s als der Kraftkomponente entlang des Weges s . Diese Form entspricht dem aus der Schulphysik bekannten Zusammenhang: Arbeit = Kraftkomponente in Wegrichtung mal zurückgelegtem Weg.

Beispiel 2 Die konstante Kraft $\vec{F} = (-10, 2, 5)$ N verschiebe einen Massenpunkt vom Punkt $P_1 = (1, -5, 3)$ m gradlinig zum Punkt $P_2 = (0, 1, 4)$ m. Welche Arbeit wird dabei verrichtet und wie groß ist der Winkel zwischen der Kraft und dem Verschiebungsvektor? Der Verschiebungsvektor ist gegeben als

$$\vec{s} = \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ m}; \quad (2.23)$$

für die verrichtete Arbeit ergibt sich daraus

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ N} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ m} = (10 + 12 + 5) \text{ Nm} = 27 \text{ Nm}. \quad (2.24)$$

Mit den Beträgen $|\vec{s}| = \sqrt{38}$ m und $|\vec{F}| = \sqrt{129}$ N ergibt sich für den Winkel

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{|\vec{F}| |\vec{s}|} = \arccos \frac{27 \text{ Nm}}{\sqrt{129} \text{ N} \sqrt{38} \text{ m}} = \arccos 0.386 = 67.3^\circ. \quad (2.25)$$

□

2.1.5 Kreuzprodukt

Definition 4 Das äußere Produkt (Kreuzprodukt, Vektorprodukt) aus zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} ist ein Vektor $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ mit

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha = ab \sin \alpha \quad (2.26)$$

mit α als dem von den Vektoren eingeschlossenen Winkel. Die drei Vektoren bilden ein Rechtssystem (Rechte-Hand Regel) mit $\vec{a} \perp \vec{c}$ und $\vec{b} \perp \vec{c}$.

Ein Rechtssystem ist in Abb. 2.2 dargestellt: die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und $\vec{a} \times \vec{b}$ stehen wie Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger (in dieser Reihenfolge) der gespreizten rechten Hand (Rechte-Hand Regel). Alternativ können Sie sich die räumlich Anordnung der Vektoren auch über eine andere Form der Rechte-Hand Regel klar machen: die Finger der gekrümmten Hand

weisen in die Richtung, in der Sie \vec{a} auf kürzestem Wege auf \vec{b} drehen können. Dann weist der Daumen in Richtung des Kreuzproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$. Wenn es Ihnen leichter fällt, können Sie auch von einem kartesischen Koordinatensystem ausgehen, um die Lage des Dreibeins zu definieren. Ein derartiges System würde durch die Vektoren in Abb. 2.2 beschreibbar sein.

Das Kreuzprodukt hat die folgenden Eigenschaften:

1. das Ergebnis muss ein Vektor sein,
2. der Winkel zwischen den beiden Vektoren wird berücksichtigt, und
3. die Länge der Vektoren wird berücksichtigt.

Das Vektorprodukt kann verwendet werden, um Vektoren auf *Parallelität* zu untersuchen. In diesem Fall beträgt der eingeschlossene Winkel φ entweder 0° oder 180° (0 oder π). Dann wird der Ausdruck $\sin \varphi = 0$ und das Vektorprodukt verschwindet gemäß (2.26). Damit gilt:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}. \quad (2.27)$$

Anschaulich lässt sich der Betrag des Vektorprodukts als die *Fläche des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms* interpretieren:

$$F = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \varphi = ah. \quad (2.28)$$

In kartesischen Koordinaten lässt sich das Kreuzprodukt darstellen als

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

Beispiel 3 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 3)$ und $\vec{b} = (3, 4, 5)$. Das Kreuzprodukt der Vektoren ist

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 - 1 \cdot 5 \\ 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad (2.30)$$

Die Beträge der Vektoren sind $|\vec{a}| = \sqrt{14}$ und $|\vec{b}| = \sqrt{50}$. Der Betrag von $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{4 + 16 + 4} = \sqrt{24}$. Aus der Definition des Kreuzproduktes (2.26) können wir den Winkel zwischen den Vektoren bestimmen:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \alpha \rightarrow \sin \alpha = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{ab} = \sqrt{\frac{24}{14 \cdot 50}} \quad (2.31)$$

und damit $\alpha = 10.7^\circ$. Dass wir richtig gerechnet haben, können wir daran erkennen, dass der Vektor $\vec{a} \times \vec{b}$ wirklich senkrecht auf den Ausgangsvektoren steht:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -2 + 8 - 6 = 0 \quad (2.32)$$

liefert $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{a}$ und

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -6 + 16 - 10 = 0 \quad (2.33)$$

liefert $(\vec{a} \times \vec{b}) \perp \vec{b}$. □

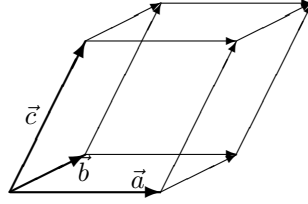


Abbildung 2.3: Spatprodukt als Volumen des von den Vektoren aufgespannten Parallelepipeds

2.1.6 Spatprodukt

Definition 5 Das Spatprodukt oder gemischte Produkt der drei Vektoren \vec{a} , \vec{b} , und \vec{c} ist definiert als

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}. \quad (2.34)$$

Anschaulich kann das Spatprodukt als das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds interpretiert werden, vgl. Abb. 2.3:

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = |[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|. \quad (2.35)$$

Die Bedeutung des Spatproduktes können Sie sich wie folgt anschaulich klar machen: die ersten beiden Vektoren bilden ein Kreuzprodukt, d.h. wir erhalten ein Maß für die Fläche des von ihnen aufgespannten Parallelogramms. Damit bestimmt der Betrag des Kreuzproduktes die Grundfläche des Parallelepipeds. Der Vektor des Kreuzproduktes steht senkrecht auf dieser Fläche und schließt mit dem dritten Vektor \vec{c} einen Winkel β ein. Dieser ergibt zusammen mit dem Winkel α von \vec{c} gegenüber der aus \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Grundfläche des Parallelepipeds 90° . Wenn wir jetzt den letzten Teil des Spatproduktes, nämlich das Skalarprodukt, ausführen, so bilden wir das Produkt $|\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cos \beta$ oder $V = |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \sin \alpha$.² Aus dem zweiten Term erkennen Sie, dass ein Produkt mit einer Höhe gebildet wird, d.h. das Volumen lässt sich bestimmen als das Produkt aus der Grundfläche $|\vec{a} \times \vec{b}|$ und der Höhe $|\vec{c}| \sin \alpha$, entsprechend der Definition des Volumens eines Parallelepipeds.

Das Spatprodukt ist nicht kommutativ, da es ein Kreuzprodukt enthält. Das Vertauschen zweier Vektoren bewirkt einen Vorzeichenwechsel:

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = -[\vec{a} \vec{c} \vec{b}]. \quad (2.36)$$

Jedoch können die Vektoren zyklisch vertauscht werden:

$$V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b}. \quad (2.37)$$

Das Spatprodukt verschwindet, wenn die Vektoren \vec{a} und $\vec{b} \times \vec{c}$ senkrecht aufeinander stehen. Das ist dann der Fall, wenn der Vektor \vec{a} in der von \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Ebene liegt, d.h. wenn alle drei Vektoren komplanar sind:

$$[\vec{a} \vec{b} \vec{c}] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b} \text{ und } \vec{c} \text{ sind komplanar}. \quad (2.38)$$

Beispiel 4 Die Einheitszelle eines Kristalls ist durch die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} mit den Längen $a = 3 \text{ \AA}$, $b = 2 \text{ \AA}$ und $c = 2 \text{ \AA}$ gegeben. Die Vektoren schließen jeweils einen Winkel von 60° ein. Das Volumen der Einheitszelle ist durch das Spatprodukt der drei Vektoren gegeben. Dazu wählen wir ein kartesisches Koordinatensystem mit der x -Achse parallel zu \vec{a} . Dann ist $\vec{a} = (3, 0, 0)$ und $\vec{b} = (2 \cos 60^\circ, 2 \sin 60^\circ, 0) = (1, \sqrt{3}, 0)$. Für die drei Komponenten von \vec{c} erhalten wir drei Bedingungen:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = ac \cos 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = 3c_x \quad \Rightarrow \quad c_x = 1, \quad (2.39)$$

²Hier wurde verwendet, dass $\cos \beta = \sin(90^\circ - \beta)$.

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = bc \cos 60^\circ = 2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} \Rightarrow c_y = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (2.40)$$

$$\sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = 2 \Rightarrow c_z = \sqrt{\frac{8}{3}}. \quad (2.41)$$

Für das Volumen ergibt sich

$$V = \left| \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{8/3} \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1/\sqrt{3} \\ \sqrt{8/3} \end{pmatrix} \right| = 3\sqrt{8} \text{ \AA}^3. \quad (2.42)$$

□

2.2 Binomische Formeln und quadratische Gleichung

2.2.1 Binomische Formeln

In einigen Gleichungen und Umformungen werden Ihnen Ausdrücke der Form $(a \pm b)^n$ mit n als natürlicher Zahl begegnen. Diese Ausdrücke lassen sich für $n = 2$ durch die Binomischen Formeln vereinfachen zu

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\ (a+b) \cdot (a-b) &= a^2 - b^2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Die Kenntnis der Binomischen Formeln kann Ihnen beim Vereinfachen von Ausdrücken behilflich sein. So lässt sich der relativ unhandliche Ausdruck $\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2}$ durch Anwendung der zweiten Binomischen Formel auf den Zähler und der dritten auf den Nenner vereinfachen:

$$\frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a-b)^2}{(a-b) \cdot (a+b)} = \frac{a-b}{a+b}. \quad (2.44)$$

Gelegentlich werden Sie in der Vorlesung auch die Binomischen Formeln für $n = 3$ benötigen:

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Für größere Werte von n gibt es ebenfalls binomische Formeln. Der Binomische Satz besagt für allgemeine n

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \quad (2.46)$$

wobei der Binominalkoeffizient $\binom{n}{k}$ (sprich 'n über k') definiert ist als

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \dots (n-k+1)}{k!} \quad (2.47)$$

mit $k!$ (sprich 'k Fakultät') definiert als

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots k. \quad (2.48)$$

2.2.2 Quadratische Gleichung

Eine Gleichung der Form $ax^2 + bx + c = 0$ wird als quadratische Gleichung bezeichnet, da hier die gesuchte Variable x im Quadrat auftritt. Zur Lösung einer quadratischen Gleichung können Sie die quadratische Ergänzung ausführen, d.h. Sie wandeln die Gleichung so um, dass Sie einen Ausdruck erhalten, der sich mit Hilfe der Binomischen Formeln in eine Form $(x + d)^2$ bringen lässt. Dann können Sie die Wurzel ziehen und nach x auflösen.

Beispiel 5 Als Beispiel für die quadratische Ergänzung sei die Gleichung $x^2 + 4x - 5 = 0$ betrachtet. Zur Lösung der Gleichung schreiben wir im ersten Schritt alle Terme, die das x enthalten, auf die linke Seite und addieren dann eine Zahl derart, dass die linke Seite der Gleichung sich in eine Binomische Formel umwandeln lässt. Anschließend Wurzel ziehen und nach x auflösen:

$$\begin{array}{rcll}
 x^2 + 4x - 5 = & 0 & | & + 5 \\
 x^2 + 4x = & 5 & | & + 4 \\
 x^2 + 4x + 4 = & 9 & | & \text{Binom : } (x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4 \\
 (x + 2)^2 = & 9 & | & \sqrt{\quad} \\
 x_{1,2} + 2 = & \pm 3 & | & - 2 \\
 x_{1,2} = & \pm 3 - 2 . & &
 \end{array} \tag{2.49}$$

□

Eine alternative Darstellung ist die pq -Formel. Dabei gehen Sie davon aus, dass die quadratische Gleichung die Form

$$x^2 + px + q = 0 \tag{2.50}$$

hat. Die Lösung dieser Gleichung ergibt sich zu

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} . \tag{2.51}$$

Die pq -Formel können Sie aus der Ausgangsgleichung durch quadratische Ergänzung herleiten, d.h. es handelt sich nicht um eine alternative Lösungsform sondern nur um eine komprimierte Darstellung der quadratischen Ergänzung.

Beispiel 6 Die Lösung der quadratischen Gleichung aus Beispiel 5 mit Hilfe der pq -Formel ist

$$x_{1,2} = -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - (-5)} = -2 \pm \sqrt{2^2 + 5} = -2 \pm \sqrt{9} = -2 \pm 3 = \pm 3 - 2 . \tag{2.52}$$

□

Eine allgemeinere Darstellung der quadratischen Gleichung hat die Form

$$ax^2 + bx + c = 0 . \tag{2.53}$$

Diese Gleichung können Sie durch Division durch a in eine Form überführen, die Sie mit der pq -Formel (2.51) lösen können. Alternativ können Sie die Lösungsformel

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.54}$$

verwenden.

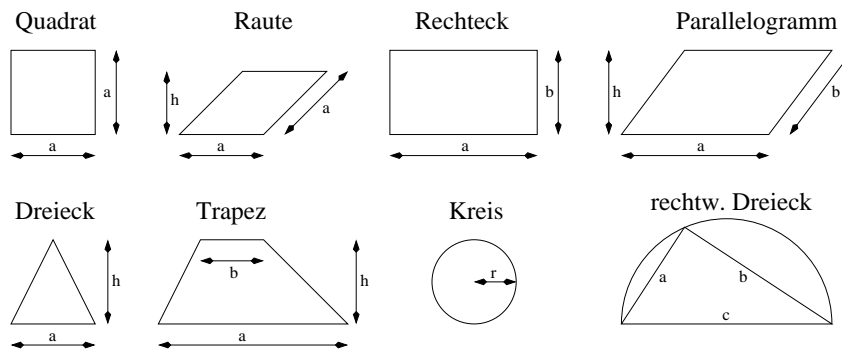


Abbildung 2.4: Figuren der ebenen Geometrie

2.3 Einfache Geometrie

Einige simple Gleichungen, die Ihnen bei Übungsaufgaben helfen können. Für ebene geometrische Gebilde (vgl. Fig. 2.4) erhalten wir für die Flächen A und die Umfänge U :

- Quadrat der Seitenlänge a :

$$F = a^2 \quad U = 4 \cdot a \quad (2.55)$$

- Raute der Seitenlänge a und der Höhe h :

$$F = a \cdot h \quad U = 4 \cdot a \quad (2.56)$$

- Rechteck mit den Seitenlängen a und b :

$$F = a \cdot b \quad U = 2 \cdot a + 2 \cdot b \quad (2.57)$$

- Parallelogramm mit den Seitenlängen a und b sowie der Höhe h :

$$F = a \cdot h \quad U = 2 \cdot a + 2 \cdot b \quad (2.58)$$

- Dreieck mit der Grundseite a und der Höhe h :

$$F = \frac{a \cdot h}{2} \quad (2.59)$$

- Trapez mit der Grundseite a , der Deckseite b und der Höhe h :

$$F = \frac{a + b}{2} \cdot h \quad (2.60)$$

- Kreis mit dem Radius r :

$$F = \pi r^2 \quad U = 2\pi r \quad (2.61)$$

Außerdem gilt im rechtwinkligen Dreieck der Satz des Pythagoras:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (2.62)$$

mit c als der Hypotenuse sowie a und b als den Katheten.

Im Dreidimensionalen erhalten wir für verschiedenen Körper die folgenden Volumina V und Oberflächen O :

- Würfel mit der Kantenlänge a :

$$V = a^3 \quad O = 6 \cdot a^2 \quad (2.63)$$

- Quader mit den Kantenlängen a , b und c :

$$V = ab \cdot c \quad O = 2 \cdot (a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a) \quad (2.64)$$

- Kugel mit Radius r :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad O = 4\pi r^2 \quad (2.65)$$

- Zylinder mit Radius r und Höhe h :

$$V = \pi r^2 h \quad O = 2\pi r^2 + 2\pi r h \quad (2.66)$$

- Pyramide mit der durch die Seiten a und b gegebene Grundfläche und der Höhe h :

$$V = \frac{abh}{3} \quad (2.67)$$

- Kreiskegel mit Radius r der Grundfläche und Höhe h :

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \quad (2.68)$$

2.4 Funktionen

Funktionen dienen zur Darstellung und Beschreibung von Zusammenhängen.

Definition 6 Eine Funktion $f(x)$ ordnet jedem Element x des Definitionsbereichs \mathbf{D} eindeutig ein Element y des Wertebereichs \mathbf{W} zu.

Eine Funktion ist also eine *Zuordnungsvorschrift*. Dabei wird x als die *unabhängige Variable* oder das *Argument* bezeichnet, y als die *abhängige Variable* oder der *Funktionswert*.

Funktionen lassen sich auf verschiedene Weise darstellen:

- in der *analytischen Darstellung* wird die Zuordnungsvorschrift als Gleichung (*Funktionsgleichung*) gegeben in einer der drei Formen

- *explizite Darstellung* $y = f(x)$, d.h. die Funktion ist nach einer der Variablen aufgelöst.
- *implizite Darstellung* $F(x, y) = 0$, d.h. die Funktion ist nicht nach einer der beiden Variablen aufgelöst.
- *Parameterdarstellung* durch die Angabe von $x(t)$ und $y(t)$, jeweils in Abhängigkeit von einer Hilfsvariablen t .

Beispiel: die Wurfparabel ist eine Funktion $y = f(x)$. Meist können wir bei Bewegungen eher x und y in Abhängigkeit von der Zeit angeben. Die Parametergleichungen für diese Bewegung sind

$$x = v_o t \quad \text{und} \quad y = \frac{g}{2} t^2, \quad (2.69)$$

Auflösen der ersten Gleichung nach t und Einsetzen in die zweite liefert als explizite Form der Wurfparabel

$$y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_o} \right)^2 = \frac{g}{2v_o^2} x^2. \quad (2.70)$$

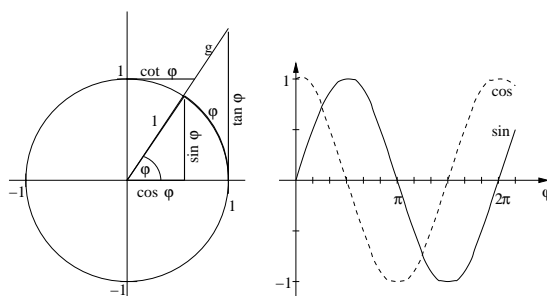


Abbildung 2.5: Trigonometrische Funktionen als Kreisschnitte (links) sowie Verlauf der Sinus- und Kosinusfunktion (rechts)

- in der *Wertetabelle* oder *Funktionstafel* werden in tabellarischer Form Paare von unabhängiger und abhängiger Variable angegeben.
- in der graphischen Darstellung werden die Wertepaare der Funktion in einem rechtwinkligen Koordinatensystem als *Funktionsgraph* dargestellt. Dabei wird die x -Achse als Abszisse, die y -Achse als Ordinate bezeichnet.

2.4.1 Spezielle Funktionen

Die wichtigsten in der Physik benötigten Funktionen sind die Winkelfunktionen sowie Exponentialfunktion und Logarithmus. Die letzten beiden werden Ihnen auch in der Biologie und in allen Praktika häufig begegnen – setzen Sie sich damit auseinander.

Winkelfunktionen

Die Winkelfunktionen oder trigonometrischen Funktionen sind transzendente Funktionen, d.h. sie lassen sich nicht als eine endliche Kombination algebraischer Terme darstellen. Betrachten wir dazu den Schnitt eines Einheitskreises mit einer Geraden g wie im linken Teil von Abb. 2.5. Die trigonometrischen Funktionen setzen den aus dem Kreis ausgeschnittenen Bogen φ mit verschiedenen der fett ausgezogenen Linien in Beziehung. Wenn Sie anstelle des Kreisbogens den Winkel verwenden (diese sind bei Angabe des Winkels in rad identisch, da wir einen Einheitskreis betrachten), so können Sie sich die Winkelfunktionen auch an dem im Kreis liegenden Dreieck veranschaulichen:

$$\text{Sinus :} \quad \sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad (2.71)$$

$$\text{Kosinus :} \quad \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \quad (2.72)$$

$$\text{Tangens :} \quad \tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \quad (2.73)$$

	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
sin	0	$\frac{1}{2} = 0.5$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.71$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.87$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0.71$	$\frac{1}{2} = 0.5$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.58$	1	$\sqrt{3} = 1.73$	∞
cot	∞	$\sqrt{3} = 1.73$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3} = 0.58$	0

Tabelle 2.1: Wichtige Werte einiger Winkelfunktionen

	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\tan \alpha$	$\cot \alpha$
$\sin \alpha =$	-	$\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$	$\frac{\tan \alpha}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\cos \alpha =$	$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$	-	$\frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$	$\frac{\cot \alpha}{\sqrt{1 + \cot^2 \alpha}}$
$\tan \alpha =$	$\frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}$	$\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}$	-	$\frac{1}{\cot \alpha}$
$\cot \alpha =$	$\frac{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}$	$\frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}$	$\frac{1}{\tan \alpha}$	-

Tabelle 2.2: Umwandlung einer Winkelfunktion in eine andere

Wichtige Werte für die Winkelfunktionen sind in Tabelle 2.1 gegeben, die Beziehungen zwischen den Winkelfunktionen in Tabelle 2.2.

Darstellung von Winkeln: Grad- und Bogenmaß

Winkel können im Grad- oder Bogenmaß gemessen werden: das Gradmaß basiert auf der Unterteilung des Kreises in 360° . Das Bogenmaß bezieht sich auf die Bogenlänge im Einheitskreis, vgl. Abbildung.

Definition 7 Das Bogenmaß x eines Winkels φ (im Gradmaß) ist die Länge des Bogens, der dem Winkel φ im Einheitskreis gegenüber liegt.

Das Bogenmaß lässt sich schreiben als Verhältnis aus Bogenlänge zu Radius, vgl. Abb. 2.6:

$$x = \frac{\text{Bogenlänge}}{\text{Radius}} = \frac{b}{r}. \quad (2.74)$$

Das Bogenmaß ist eine dimensionslose Größe, die Einheit Radiant (rad) wird meist weggelassen; ihre Angabe kann jedoch hilfreich sein, um zu erkennen, dass der Winkel im Bogenmaß angegeben ist.

Der Zusammenhang zwischen Bogenmaß x und Gradmaß φ wird am einfachsten deutlich, wenn man den Winkel gemäß Definition als Maß für ein Kreissegment betrachtet. Dieses lässt sich entweder durch Winkel relativ zum Vollkreis, also $\varphi/360^\circ$, angeben oder durch die Bogenlänge relativ zum Gesamtumfang, also $x/(2\pi r)$ bzw. $x/(2\pi)$ im Einheitskreis. Damit ergibt sich die Umrechnung zwischen Grad- und Bogenmaß zu

$$\varphi = \frac{360^\circ}{2\pi} x \quad (2.75)$$

bzw. in Gegenrichtung

$$x = \frac{2\pi}{360^\circ} \varphi. \quad (2.76)$$

Werte für wichtige Winkel sind in Tabelle 2.3 zusammengefasst. Für die Einheit 1 rad ergibt sich

$$1 \text{ rad} \cong \frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 17' 45'', \quad (2.77)$$

d.h. 1 rad gibt den Winkel, unter dem die Bogenlänge eines Einheitskreises genau 1 ist.

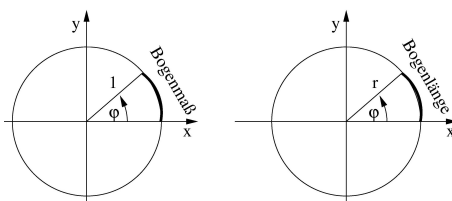


Abbildung 2.6: Grad- und Bogenmaß

φ	30°	45°	90°	180°	360°
x	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/2$	π	2π

Tabelle 2.3: Grad- und Bogenmaß für einige Winkel

Exponentialfunktion und Logarithmus

Die Exponentialfunktion und ihre Umkehrung, der Logarithmus, sind ebenfalls *transzendente Funktionen*.

Die allgemeinste Form der Exponentialfunktion ist

$$f(x) = a^x \quad (2.78)$$

mit a als der Basis und x als dem Exponenten. Spezialfälle der Exponentialfunktion ergeben sich für die Basis 10 als

$$f(x) = 10^x, \quad (2.79)$$

und für die Basis e (Euler'sche Zahl)

$$f(x) = e^x. \quad (2.80)$$

Jede Exponentialfunktion ist streng monoton. Ist die Basis größer 1, so ist die Funktion streng monoton wachsend für positive x und streng monoton fallend für negative x , vgl. Abb. 2.7. Ist die Basis dagegen zwischen 0 und 1, so ist die Funktion streng monoton fallend für positive x und streng monoton steigend für negative x . Die Exponentialfunktion wächst schneller als jedes beliebige Polynom in x .

Alle Exponentialfunktionen zur beliebigen Basis a lassen sich in eine auf der Euler'schen Zahl basierende Darstellungsform umwandeln:

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a} = e^{\ln a^x}. \quad (2.81)$$

Für die Umwandlung von einer Basis a zu einer Basis b gilt

$$f(x) = a^x = (b^{\log_b a})^x = b^{x \log_b a} = b^{\log_b a^x}. \quad (2.82)$$

Die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion ist der Logarithmus. Zu verschiedenen Basen der Exponentialfunktion gibt es verschiedene Logarithmen. Diese werden abgekürzt als \log_a , gesprochen 'Logarithmus zur Basis a ', wobei der Index a die Basis bezeichnet. Die verschiedenen Exponentialfunktionen mit ihren Logarithmen lassen sich zusammenfassen als:

$$\begin{aligned} f(x) = a^x & \quad \log_a f(x) = x \\ f(x) = 10^x & \quad \log_{10} f(x) = \log f(x) = x \quad \text{dekadischer Logarithmus} \\ f(x) = e^x & \quad \log_e f(x) = \ln f(x) = x \quad \text{natürlicher Logarithmus} \end{aligned}$$

Der dekadische Logarithmus begegnet Ihnen häufig in der logarithmischen Darstellung von Daten, die einen weiten Größenbereich umspannen. So sind einige Größen, wie Dezibel

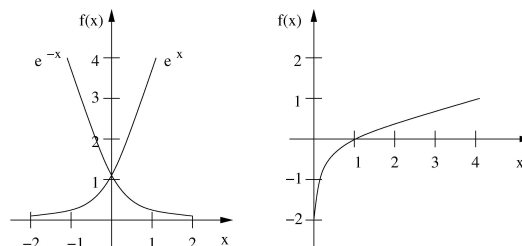


Abbildung 2.7: Exponentialfunktion (links) und natürlicher Logarithmus (rechts)

(dB) und pH-Wert, auf einer logarithmischen Skala definiert. Sonst ist in der Physik und der Mathematik mit dem Logarithmus in der Regel der natürliche Logarithmus gemeint.

Der Logarithmus wächst langsamer als jede beliebige Potenz von x . Da die Exponentialfunktion nur Werte größer Null annimmt, ist der Logarithmus nur für Werte größer Null definiert, vgl. rechtes Teilbild in Abb. 2.7.

Wie die Exponentialfunktion lässt sich auch der Logarithmus jeweils von einer Basis zur anderen umformen

$$f(x) = \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \quad (2.83)$$

2.4.2 Differentiation

Ein *Differential* ist eine Differenz, bei der der Abstand der beiden Argumente gegen Null geht:

$$dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (x_2 - x_1). \quad (2.84)$$

bzw. für die Funktionswerte

$$dy = df(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = f'(x) dx. \quad (2.85)$$

Definition 8 Der Differenzenquotient ist definiert als der Quotient aus der Differenz der Funktionswerte und der Differenz der Argumente:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2.86)$$

Anschaulich gibt der Differenzenquotient die mittlere Steigung des Graphen der Funktion im Intervall x_1 bis x_2 , d.h. die Steigung der Sekante (*Sekantensteigung*).

Definition 9 Der Differentialquotient geht aus dem Differenzenquotienten dadurch hervor, dass man Δx gegen Null gehen lässt:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta(x)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2.87)$$

Der Differentialquotient bestimmt, wie sich Funktionswerte entwickeln, wenn man vom Argument x um ein Stückchen dx weitergeht: $df(x) = f'(x) dx$.

Der Übergang vom Differenzenquotienten zum Differentialquotienten gibt die Ableitung der Funktion. Anschaulich bedeutet sie die Steigung der Tangente an den Funktionsgraphen (*Tangentensteigung*).

Da die Ableitung über den Differentialquotienten definiert ist,

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}, \quad (2.88)$$

ergibt sich für das Differential $dy = f'(x) dx$ wie in (2.85).

Einige wichtige Ableitungen, insbesondere die der in diesem Kapitel diskutierten Funktionen, sind in Tabelle 2.4 zusammengefasst. Weitere Ableitungen finden Sie in Formelsammlungen. Für viele andere Funktionen können Sie sich die Ableitungen aus den in Tabelle 2.4 gegebenen unter Anwendung von Rechenregeln herleiten; so erhalten Sie z.B. die Ableitung des Tangens durch Anwendung der Produktregel auf den Quotienten $\sin x / \cos x$.

Für die Ableitung gelten die folgenden Regeln für die Ableitung einer Funktion $x(t)$:

- *Faktorregel* ($\alpha = \text{const}$):

$$\frac{d(\alpha x(t))}{dt} = \alpha \frac{dx}{dt}. \quad (2.89)$$

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n x^{n-1}$	x	1
$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\sin x}$	$-\frac{\cos x}{\sin^2 x}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos x}$	$-\frac{\sin x}{\cos^2 x}$
e^x	e^x	e^{-ax}	$-a e^{-ax}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln x^n$	$\frac{n}{x}$
a^x	$(\ln a) a^x$	$x e^x$	$(1+x) e^x$

Tabelle 2.4: Tabelle der wichtiger Ableitungen

- *Summenregel:*

$$\frac{d}{dt}(x(t) + y(t)) = \frac{dx(t)}{dt} + \frac{dy(t)}{dt}. \quad (2.90)$$

- *Produktregel:*

$$\frac{d}{dt}(x(t) \cdot y(t)) = \frac{dx(t)}{dt} y(t) + y(t) \frac{dy(t)}{dt}. \quad (2.91)$$

- *Kettenregel*

$$\frac{dx(y(t))}{dt} = \frac{dx}{dy} \frac{dy}{dt}. \quad (2.92)$$

Für die erfolgreiche Anwendung der Kettenregel ist es entscheidend, mit Hilfe einer geeigneten Substitution $y = y(t)$ die vorgegebene Funktion $x = x(t)$ in eine elementar differenzierbare Funktion $x = x(y(t))$ zu überführen.

- die Quotientenregel lässt sich auf die Produktregel zurückführen.

2.4.3 Integration

Integration ist die Umkehrung der Differentiation bzw. das Auffinden der Stammfunktion:

Definition 10 Eine Funktion $F(x)$ heißt eine Stammfunktion zu $f(x)$, wenn gilt:

$$F'(x) = f(x). \quad (2.93)$$

Für das Auffinden der Stammfunktion, d.h. die Integration, schreibt man

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (2.94)$$

Darin ist C eine *Integrationskonstante*. Ihre Existenz besagt, dass die Integration kein eindeutiger Vorgang ist, sondern dass die Stammfunktion immer nur bis auf diese Integrationskonstante genau bestimmt werden kann. Anschaulich können Sie dies dadurch verstehen, dass die Funktion $f(x)$ die Änderung der gesuchten Funktion $F(x)$ in jedem Punkt x gibt – jedoch ohne einen einzigen Wert von $F(x)$ festzulegen. Wir kennen also in jedem Punkt das dF , nicht jedoch das F . Daher erhalten wir bei der Integration unendlich viele, entlang der y -Achse parallel zu einander verschobene Stammfunktionen. Diese Unbestimmtheit wird durch die Integrationskonstante symbolisiert. Kennen wir den Wert von $F(x)$ an einer einzigen Stelle, d.h. haben wir einen *Anfangswert* oder eine *Randbedingung*, so wird eindeutig eine Funktion aus dieser Schar von Stammfunktionen ausgewählt und die Integrationskonstante C kann bestimmt werden.

$f(x)$	$F(x) = \int f(x) dx$
a	$ax + c$
x^n mit $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
e^x	$e^x + c$
e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$
a^x	$\frac{1}{\ln a} a^x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$

Tabelle 2.5: Wichtige Integrale

Bei der Integration unterscheidet man zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral. Die Stammfunktion ist das *unbestimmte Integral*:

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (2.95)$$

Das *bestimmte Integral* dagegen wird zwischen zwei Grenzen $x_1 = a$ und $x_2 = b$ ausgewertet:

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x) + C]_a^b = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a). \quad (2.96)$$

Beim bestimmten Integral fällt also, im Gegensatz zum unbestimmten Integral, die Integrationskonstante weg. Das bestimmte Integral können Sie als die Fläche unter dem Funktionsgraphen zwischen den Stellen $x_1 = a$ und $x_2 = b$ interpretieren.

Bei der Durchführung der Integration müssen Sie auf Nullstellen im Bereich (a, b) achten: da dort in der Regel ein Vorzeichenwechsel stattfindet, wird ein Teil der Fläche mit positivem Vorzeichen, der andere mit negativem Vorzeichen gezählt. Um die Gesamtfläche nicht zu klein zu bestimmen, müssen Sie daher das Integral aufspalten in ein Integral von a bis zur Nullstelle x_N und ein zweites Integral von der Nullstelle bis b . Anschließend werden die Beträge der beiden Teilintegrale addiert:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^{x_N} f(x) dx \right| + \left| \int_{x_N}^b f(x) dx \right|. \quad (2.97)$$

Bei mehreren Nullstellen im Intervall (a, b) sind entsprechend mehrere Teilintegrale zu bilden.

Tabelle 2.5 listet die wichtigsten unbestimmten Integrale auf. Die meisten dieser Integrale können Sie sich als die Umkehrung der Differentiation aus Tabelle 2.4 klar machen. Weitere Integrale können Sie in einer Formelsammlung nachschlagen. Wie bei der Differentiation können Sie sich viele Integrale durch Anwendung der Rechenregeln aus den Grundintegralen aus Tabelle 2.5 herleiten. Integrale der Form $\sqrt{a \pm x^2}$ lassen sich auf diese Weise allerdings nicht lösen; sie führen auf trigonometrische oder hyperbolische Funktionen und können in Formelsammlungen nachgeschlagen werden.

2.5 Aufgaben

2.5.1 Fragen

1. Was bedeutet die Ableitung einer Funktion anschaulich?
2. Was bedeutet die Integration anschaulich?

3. Welche geometrische Bedeutung hat das bestimmte Integral?
4. Welcher Zusammenhang besteht zwischen einem Differenzen- und einem Differentialquotienten?
5. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Integration und der Summation?
6. Was zeichnet eine periodische Funktion aus?
7. Nennen Sie Beispiele für periodische Funktionen?
8. Wo treten periodische Funktionen in der Physik auf?
9. Wie sind die Winkelfunktionen Sinus, Kosinus und Tangens geometrisch definiert.
10. Gibt es Funktionen, deren zweite Ableitung wieder die Funktion ist, eventuell multipliziert mit einem Vorfaktor?
11. Skizzieren Sie den Verlauf von Sinus, Kosinus und Tangens.
12. Geben Sie die Rechenregeln für Produkte und Quotienten von Potenzen an.
13. Was ist der Unterschied zwischen dem dekadischen und dem natürlichen Logarithmus?
14. Welchen Logarithmus verwenden Sie bei der logarithmischen Darstellung von Messwerten?
15. Was bedeutet lineares Wachstum, was exponentielles Wachstum?
16. Was ist der Unterschied zwischen einem Orts- und einem Verschiebungsvektor?
17. Erläutern Sie die Eigenschaften des Skalarprodukts.
18. Erläutern Sie die Eigenschaften des Kreuzprodukts.
19. Was ist ein Einheitsvektor und wozu kann er verwendet werden?
20. Wie werden Vektoren in kartesischen Koordinaten addiert (rechnerisch und zeichnerisch)?
21. Wie wird ein Vektor mit einer Zahl multipliziert? Begründen Sie die Vorschrift zeichnerisch.
22. Wie kann man überprüfen, ob zwei Vektoren senkrecht auf einander stehen?
23. Wie kann man einen Vektor bestimmen, der auf einer von zwei Vektoren aufgespannten Ebene senkrecht steht?
24. Was liefert das Kreuzprodukt anschaulich?

2.5.2 Aufgaben

1. Lösen Sie die folgenden mathematischen Ausdrücke nach x auf:

$$\begin{aligned}
 a &= x/b, \\
 a &= \sqrt{x \cdot b}, \\
 a &= \sqrt{b/x}, \\
 a &= (x + b)^2, \\
 c &= ax^2 + bx, \\
 a &= \frac{b + x}{c - x}, \\
 a &= 2e^x, \\
 b &= a \ln x, \\
 a &= \frac{a^2 - 2ax + x^2}{a - x}.
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

2. Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 x^2 - 50x + 625 &= 0, \\
 4x^2 + 40x + 100 &= 0, \\
 x^2 + 3x &= -9, \\
 x^2 - 4x &= 16, \\
 2x^2 + 36x &= 81, \\
 2x^2 - 36x &= -162.
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

3. Leiten Sie die folgenden Funktionen nach x ab:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d, \\
 f(x) &= 2 \sin(3x), \\
 f(x) &= \cos(2x), \\
 f(x) &= x \cdot \sin x, \\
 f(x) &= \sin(\omega t - kx), \\
 f(x) &= e^{2x}, \\
 f(x) &= x^2 \cdot e^{ax}, \\
 f(x) &= ax^2 + be^{cx}.
 \end{aligned} \tag{2.100}$$

4. Leiten Sie die folgenden Funktionen zweimal nach x ab:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e, \\
 f(x) &= \sin x + \cos x, \\
 f(x) &= 2 \sin(kx + b) + 4 \cos(kx + c), \\
 f(x) &= be^{\lambda x} + ce^{-\kappa x}, \\
 f(x) &= 3x^2 e^{2x}, \\
 f(x) &= \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x}, \\
 f(x) &= \sqrt{\sin^2 x + 23x}.
 \end{aligned} \tag{2.101}$$

5. Bilden Sie die folgenden Integrale:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int kx \, dx \\
 I_2 &= \int ax^2 \, dx \\
 I_3 &= \int_2^3 (4x^2 + 2x + 3) \, dx \\
 I_4 &= \int_{x_1}^{x_2} kx \, dx \\
 I_5 &= \int \sin x \, dx \\
 I_6 &= \int e^x \, dx \\
 I_7 &= \int \frac{1}{x} \, dx.
 \end{aligned} \tag{2.102}$$

6. Schreiben Sie die folgenden Zahlen in Exponentialdarstellung und wandeln Sie jeweils in SI-Einheiten mit geeigneten Vorsilben um:

$$m = 234\,698\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ g},$$

$$\begin{aligned}
l &= 150\,000\,000\,000\text{ m}, \\
v &= 300\,000\,000\text{ m/s}, \\
q &= 0.000\,000\,000\,016\text{ As}, \\
r &= 0.000\,002\,100\text{ m}, \\
s &= 0.000\,345\text{ nm}, \\
l &= 0.000\,01\text{ km}, \\
V &= 0.012\,800\text{ l}, \\
A &= 254\,000\,000\,000\,000\text{ cm}^2, \\
F &= 0.000\,012\text{ m}^2.
\end{aligned}
\tag{2.103}$$

7. Fassen Sie die folgenden Potenzen zusammen:

$$\begin{aligned}
P_1 &= 10^5 \cdot 10^3 + 10^8 \\
P_2 &= 10^5 \cdot 10^3 + 10^4 \\
P_3 &= \frac{10^3}{10^5} \\
P_4 &= \frac{10^3}{10^{-5}} \\
P_5 &= \frac{10^5}{10^{-3}} \\
P_6 &= \frac{10^{-3}}{10^{-5}}.
\end{aligned}
\tag{2.104}$$

8. Eine Bakterienpopulation wächst exponentiell, d.h. die Zahl N der Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit t ist durch eine Funktion $N(t) = N_0 E^{\lambda t}$ gegeben, wobei λ die Reproduktionswahrscheinlichkeit beschreibt. Bestimmen Sie für $\lambda = 3/h$ die Zeit, in der sich die Bakterienpopulation verdoppelt (verfünffacht) hat.
9. Eine Bakterienpopulation hat sich innerhalb eines Tages verzehnfacht. Bestimmen Sie die Wachstumswahrscheinlichkeit λ (im Wachstumsgesetz $N(t) = N_0 E^{\lambda t}$) und die Zeit, in der sich die Population verdoppelt.
10. Die Schwingungsdauer des Pendels einer Standuhr beträgt 2 s. Zur Zeit $t = 0$ befindet sich das Pendel bei seiner maximalen Auslenkung. Zu welcher Zeit geht das Pendel durch die Ruhelage?. Wie groß ist die Auslenkung des Pendels nach 0.3, 0.5, 0.7 und 1 s, wenn die Bewegung des Pendels durch $x = x_0 \cos t/T$ beschrieben werden kann?
11. In einem rechtwinkligen Dreieck hat die Hypothenuse eine Länge von 5 cm, eine Kathete eine Länge von 4 cm. Berechnen Sie den von Hypothenuse und der gegebenen Kathete eingeschlossenen Winkel und die Länge der anderen Kathete.
12. Normieren Sie die folgenden Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 1, -1)$ und $\vec{c} = -5\vec{e}_x + 6\vec{e}_y + 7\vec{e}_z$.
13. Drei Vektoren haben gleiche Länge. Ist es möglich, sie so zu addieren, dass sich der Nullvektor ergibt?
14. Wie lautet der Einheitsvektor \vec{e} , der die zum Vektor $\vec{a} = (1, 5, -2)$ entgegengesetzte Richtung hat?
15. Gegeben sind zwei Vektoren \vec{r}_1 und \vec{r}_2 mit $r_1 = 20$, $\varphi_1 = 30^\circ$, $\vartheta_1 = 45^\circ$ sowie $r_2 = 30$, $\varphi_2 = 120^\circ$ und $\vartheta_2 = 150^\circ$. Bestimmen Sie die Summe und Differenz der Vektoren.
16. Bilden Sie mit den Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, -1, 1)$, und $\vec{c} = (5, -5, 8)$ die Skalarprodukte: (a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$, (b) $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (4\vec{c})$, und (c) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{c})$.
17. Ein Segelboot setzt einen Kurs von 100 Seemeilen nach Norden, wird jedoch durch einen schweren Sturm um 200 Seemeilen nach Osten getrieben. In welche Richtung muss der Skipper nun seinen Kurs abstecken, um an sein ursprüngliches Ziel zu gelangen?

18. Eine Person wandert mit einer Geschwindigkeit von 6 km/h nach Nordosten. Eine zweite Person wandert mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h nach Süden. Wie groß ist der Abstand zwischen den beiden nach 2 h?
19. Eine Kraft $\vec{F} = (8, -10, -5)$ N verschiebt einen Massenpunkt gradlinig von $P_1 = (45, 20, -14)$ m nach $P_2 = (32, -16, 7)$ m. Welche Arbeit $\vec{F} \cdot \vec{s}$ leistet die Kraft und welchen Winkel bildet sie mit dem Verschiebungsvektor?
20. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1, -3, -5)$, $\vec{b} = (1, -2, 3)$ und $\vec{c} = (-4, 5, 2)$. Berechnen Sie die folgenden Vektorprodukte: (a) $\vec{a} \times \vec{b}$, (b) $\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c}$, (c) $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (3\vec{c})$, und (d) $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{c})$.
21. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren $\vec{a} = (1, -4, 0)$ und $\vec{b} = (3, 1, 12)$ aufgespannten Parallelogramms.
22. Gegeben sind die drei Vektoren $\vec{a} = (1, -2, 3)$, $\vec{b} = (-3, 1, -5)$ und $\vec{c} = (1, 0, -2)$. Berechnen Sie (a) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$, (b) $(\vec{a} \times \vec{a}) \times \vec{c}$, (c) $|(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}|$, und (d) $|(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c})|$.
23. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 3, 6)$ und $\vec{c} = (5, 1, -1)$. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{c} aufgespannten Parallelogramms. Bestimmen Sie ferner das Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds.
24. Die Bewegung eines Körpers beim schiefen Wurf wird in drei Dimensionen durch den Ortsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} v_x t \\ v_y t \\ v_z t - gt^2/2 \end{pmatrix} \quad (2.105)$$

beschrieben. Bestimmen Sie daraus die Geschwindigkeit $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ und die Beschleunigung $\vec{a} = d\vec{v}/dt = d^2\vec{r}/dt^2$.

Kapitel 3

Fehlerrechnung

Messwerte sind fehlerhaft, d.h. die Angabe eines Messwerts macht nur Sinn, wenn man auch seinen Fehler abschätzen und angeben kann. Fehler können eingeteilt werden in

- systematische Fehler, z.B. durch fehlerhafte Apparaturen (die Stoppuhr geht zu langsam; Ihr Geodreieck ist in Zoll statt in Zentimeter eingeteilt), und
- statistische Fehler, also zufällige Schwankungen in den Messungen (Ihre Reaktionszeit bei der Messung mit einer Stoppuhr ist von Messung zu Messung verschieden; Sie lesen bei einer Längenmessung Ihr Geodreieck aus unterschiedlichen Winkeln und damit mit unterschiedlicher Verzerrung ab).

Da das Wort ‘Fehler’ leicht ein vermeidbares Fehlverhalten des Beobachters bzw. Experimentators implizieren könnte, ersetzt DIN-Norm 1319 (Teil 3) die Begriffe zufälliger Fehler und systematischer Fehler durch die Begriffe zufällige Abweichung und systematische Abweichung.

Den Unterschied zwischen statistischen bzw. zufälligen und systematischen Abweichungen verdeutlicht Abb. 3.1 am Beispiel einer Schießübung. In (a) liegen alle Einschüsse eng zusammen, d.h. der zufällige Fehler ist klein. Außerdem liegen alle Einschüsse in der Nähe des Zentrums, d.h. der systematische Fehler ist ebenfalls klein (oder wurde durch geeignete Maßnahmen kompensiert). In (b) tritt ein kleiner zufälliger aber großer systematischer Fehler auf, da alle Treffer zwar eng beieinander aber rechts vom Zentrum liegen. In (c) ist der zufällige Fehler groß, da die Treffer über einen weiten Bereich verteilt sind. Der systematische Fehler dagegen ist klein, da die Verteilung im Zentrum zentriert ist. In (d) sind beide Fehler groß.

Die Fehlerrechnung berücksichtigt die statistischen Fehler; systematische Fehler sollten Sie im Vorfeld ausschließen oder versuchen, durch eine nachträgliche Korrektur zu verringern.

Die Angabe eines Messwertes x_m ist nur zusammen mit der Angabe eines Messfehlers Δx sinnvoll. Auf diese Weise erhalten wir ein Intervall $[x - \Delta x, x + \Delta x]$, in dem der wahre Wert mit großer Wahrscheinlichkeit liegt. Wir werden später auch quantitative Maße für diese Wahrscheinlichkeit einführen.

Einen Hinweis zur Darstellung von Messungen und Messfehlern sollten Sie auch beachten: die letzte signifikante Ziffer in jedem angegebenen Messwert (Ergebnis) sollte von der gleichen Größenordnung sein wie der Fehler. So ist

$$v = (6051.73 \pm 30) \text{ m/s} \tag{3.1}$$

eine ungeschickte Angabe, da schon die Ziffer 5 unsicher ist und bei dem angegebenen Fehler zwischen 2 und 8 liegen kann. Daher kommen der 1, 7 und 3 in diesem Beispiel keine Bedeutung zu. Besser wäre daher eine Angabe in der Form

$$v = (6050 \pm 30) \text{ m/s} . \tag{3.2}$$

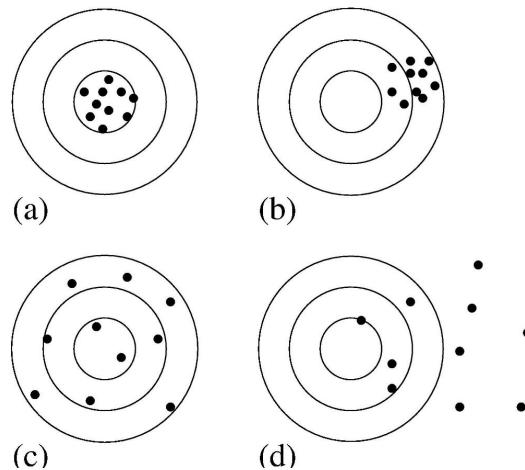


Abbildung 3.1: Zufällige und systematische Fehler bei Schießübungen

3.1 Charakterisierung von Messdaten

Eine mehrfach unter gleichen Bedingungen durchgeführte Messung liefert uns eine Zahl von N unabhängigen Messwerten

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_N . \quad (3.3)$$

Diese Messwerte können wir in zwei verschiedenen Formen darstellen:

- durch eine Verteilung $F(x)$. Sie enthält die volle Information der Messung und kann z.B. als ein Histogramm, vgl. Abb. 3.2, dargestellt werden. Dabei wird die Häufigkeit der Messung eines bestimmten Wertes gegen diesen Wert bzw. genauer gegen ein Intervall von Werten aufgetragen. Die Alternative ist die Darstellung als Verteilungsfunktion bei der nicht die absolute Häufigkeit der Messung eines bestimmten Wertes verwendet wird sondern dessen relative Häufigkeit, d.h. das Verhältnis aus der Zahl der Messwerte in einem bestimmten Intervall zur Gesamtzahl der Messwerte.
- reduziert auf zwei Parameter Mittelwert \bar{x} und Varianz s^2 , die zwar die Verteilung charakterisieren, jedoch nicht alle Details der Verteilung enthalten.

Zwei elementare Eigenschaften der Messreihe (3.3) können unmittelbar angegeben werden: zum einen die Summe

$$\Sigma = x_1 + x_2 + x_3 \dots x_N = \sum_{i=1}^N x_i , \quad (3.4)$$

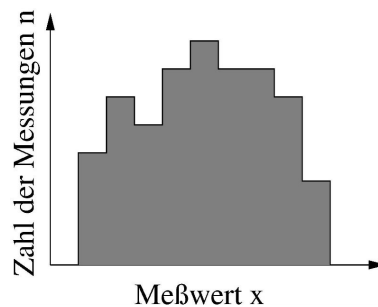


Abbildung 3.2: Verteilung der Messwerte, dargestellt als Histogramm

zum anderen der experimentelle Mittelwert

$$\bar{x}_e = \frac{\Sigma}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{x_1 + x_2 + x_3 \dots x_N}{N} . \quad (3.5)$$

Definition 11 Der experimentelle Mittelwert ergibt sich als die Summe der einzelnen Messwerte dividiert durch die Anzahl der Messungen.

3.2 Verteilung von Messwerten, Mittelwert und Varianz

Für die Beschreibung von Messwerten sind zwei Verteilungen von Interesse, die Normalverteilung oder Gauß-Verteilung und die Poisson-Verteilung. Beide Verteilungen können theoretisch hergeleitet werden und sind nicht von den Eigenschaften der Messung oder der zu messenden Größe abhängig. Diese theoretischen Verteilungen geben den ‘wahren Mittelwert’ während die Messung den gemessenen oder beobachteten Mittelwert gibt. Ein Vergleich der beiden Verteilungen kann ein Vertrauensintervall für den beobachteten Mittelwert liefern, d.h. ein Intervall, in dem der wahre Wert mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit liegt.

3.2.1 (Normalverteilte) Messwerte

Die durch (3.3) gegebene Verteilung $F(x)$ lässt sich beschreiben als

$$F(x) = \frac{\text{Zahl der beobachteten Werte im Intervall } x \text{ bis } x + \Delta x}{\text{Zahl der Messungen } N} . \quad (3.6)$$

Dabei wird den Messwerten im Intervall x bis $x + \Delta x$ eine relative Häufigkeit des Auftretens zu geordnet. Die Summe über alle relativen Häufigkeiten muss 1 ergeben, d.h. diese Verteilung ist normiert mit

$$\sum_{x=0}^{\infty} F(x) = 1 . \quad (3.7)$$

Sie enthält, abgesehen von der Reihenfolge des Auftretens, die volle Information, die auch in der Liste (3.3) enthalten ist. Sie kann als ein Histogramm dargestellt werden, vgl. Abb. 3.2. Diese diskrete Häufigkeitsverteilung geht über in eine kontinuierliche Verteilung, wenn die Zahl der Messwerte beliebig erhöht wird.¹ Die Verteilung kann dann durch eine Dichtefunktion $f(x)$ beschrieben werden, die die folgenden Eigenschaften hat:

- die Verteilung ist symmetrisch um den Mittelwert, d.h. betragsmäßig gleich große positive und negative Abweichungen treten mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf.
- je grösser die Abweichung eines Messwertes vom Maximum ist, um so geringer ist seine Wahrscheinlichkeit. $f(x)$ ist daher eine vom Maximum nach beiden Seiten hin symmetrisch abfallende Funktion.

Beide Eigenschaften können erst bei hinreichend großer Zahl von Einzelmessungen deutlich werden, daher können wir nicht ausschließen, dass sich die in Abb. 3.2 gezeigte Verteilung nicht doch als normalverteilt erweisen kann.

Eine normalverteilte Zufallsvariable kann durch eine normierte Dichtefunktion in der Form

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} \quad (3.8)$$

beschrieben werden mit μ als dem Mittelwert und σ als der Standardabweichung der Grundgesamtheit (bzw. σ^2 als der Varianz der Grundgesamtheit). Das Maximum der Verteilung

¹Damit wird gleichzeitig die Intervallbreite Δx beliebig klein. Das ist ein ähnlicher Übergang $\lim_{\Delta x \rightarrow 0}$ wie bei der Differentiation und der Integration.

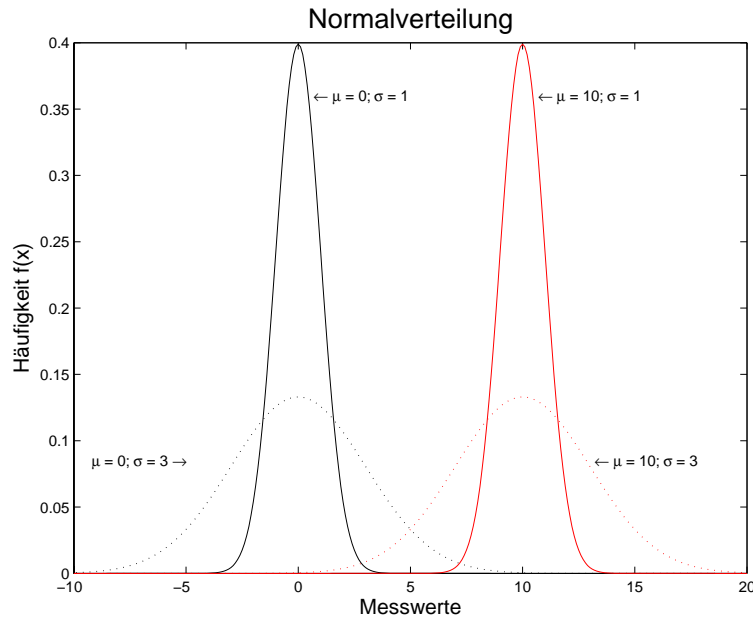


Abbildung 3.3: Normalverteilung für verschiedene Mittelwerte und Standardabweichungen

liegt beim Mittelwert $x = \mu$, ihre Breite wird durch die Standardabweichung σ bestimmt. Die Wendepunkte der Verteilung liegen an den Stellen $x_{w1,w2} = \mu \pm \sigma$.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Messwert in ein Intervall $[a, b]$ fällt, ist gegeben durch das Integral

$$P(a \leq x \leq b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2 \right\} dx. \quad (3.9)$$

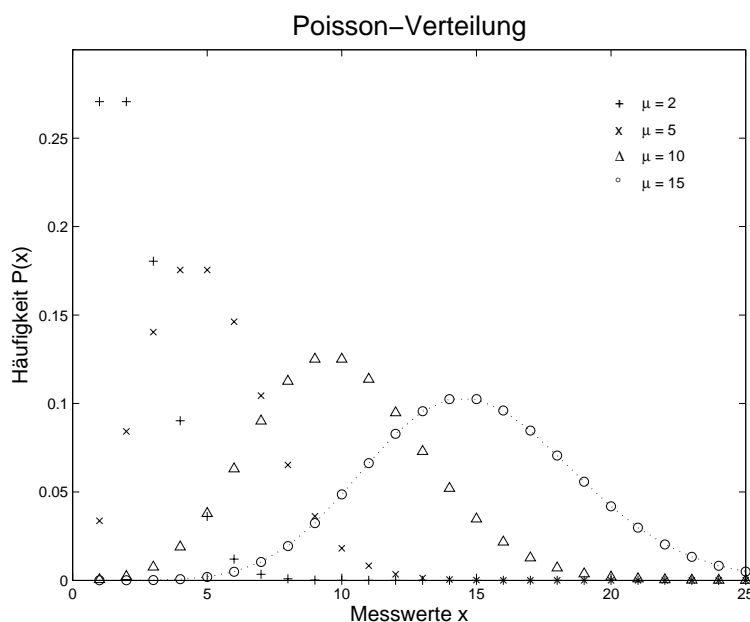
Mit Hilfe dieser Gleichung können wir die Zahl der Messwerte in bestimmten Intervallen angeben:

- 68.3% der Messwerte liegen im Intervall $[\mu - \sigma, \mu + \sigma]$
- 95.5% der Messwerte liegen im Intervall $[\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]$
- 99.7% der Messwerte liegen im Intervall $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$

Abbildung 3.3 zeigt vier verschiedene Normalverteilungen. Für die beiden linken Verteilungen beträgt der Mittelwert μ jeweils Null; sie unterscheiden sich in der Standardabweichung σ . Die schmalere Verteilung (durchgezogene Kurve) ist für eine Standardabweichung $\sigma = 1$ gegeben, die breitere (gestrichelt) für $\sigma = 3$. Da beide Verteilungen den gleichen Mittelwert haben, sind sie um den gleichen Wert zentriert, lediglich die unterschiedliche Standardabweichung bestimmt die unterschiedliche Breite der Verteilungen. Das Maximum der Verteilung mit der größeren Standardabweichung ist geringer, da die Verteilungen normiert sind: die Fläche unter den Kurven nimmt den gleichen Wert an, nämlich 1, wie durch (3.7) gegeben. Die beiden rechten Verteilungen sind für die gleichen Standardabweichungen jedoch einen Mittelwert von $\mu = 10$ bestimmt. Dadurch verändert sich die Form der Verteilung nicht, allerdings wird die gesamte Verteilung verschoben, so dass sie um den Mittelwert zentriert ist.

3.2.2 Ergänzung: ‘Zählen’ und Poisson-Verteilung

Messungen, bei denen statistisch auftretende Ereignisse gezählt werden, z.B. die Zahl der in einer radioaktiven Substanz pro Zeiteinheit zerfallenden Atome oder die Zahl der in einem

Abbildung 3.4: Poisson-Verteilung für verschiedene Mittelwerte μ

Krankenhaus pro Monat geborenen Babys, werden durch die Poisson-Verteilung beschrieben:

$$P(x) = \frac{(\mu)^x e^{-\mu}}{x!} \quad (3.10)$$

mit μ als dem Mittelwert und $x!$ als x -Fakultät mit $x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots x$. Für die Varianz gilt

$$\sigma^2 = \sum_{x=0}^n (x - \mu)^2 P(x) = \mu \quad (3.11)$$

und damit für die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{\mu}. \quad (3.12)$$

Die vorhergesagte Standardabweichung der Poisson-Verteilung ist also die Wurzel aus dem Mittelwert.

Abbildung 3.4 zeigt Poisson-Verteilungen für vier verschiedene Werte von μ . In der Darstellung wird ein fundamentaler Unterschied zwischen der Poisson-Verteilung und der Gauß-Verteilung deutlich: die Gauß-Verteilung ist eine kontinuierliche Verteilung, d.h. sie existiert für alle Werte x – so, wie bei einer Längenmessung auch beliebig dicht benachbarte Längenwerte auftreten können. Da bei einer kontinuierlichen Verteilung alle Meßwerte x auftreten können, kann die Verteilungsfunktion durch gezeichnet werden, so wie die Kurven in Abb. 3.3. Die Poisson-Verteilung dagegen ist eine diskrete Verteilung, sie ist nicht für alle Werte von x definiert sondern nur für bestimmte Werte, in diesem Fall die ganzen positiven Zahlen. Das ist auch sinnvoll, da die Poisson-Verteilung dann angewendet wird, wenn es ums Zählen geht: Sie werden vielleicht 1 oder 2 Füchse in einem Bau finden, 1.5 sollten es allerdings nicht sein. In der graphischen Darstellung bedeutet dies, dass die Poisson-Verteilung nur für ganze Werte von x definiert ist und daher nicht durch gezeichnet werden kann.

Ein Vergleich der Poisson-Verteilungen für die verschiedenen Mittelwerte zeigt, dass die Poisson-Verteilung für kleine Mittelwerte asymmetrisch ist. Das ist verständlich, da die Verteilung zwar einen Ausläufer zu größeren x -Werten haben kann, der Bereich zu kleineren x -Werten jedoch begrenzt ist, da x nicht kleiner als Null werden kann (sonst müssten Sie -5 Füchse in einem Bau zählen können). Mit zunehmendem Mittelwert μ wird die Verteilung symmetrischer und nähert sich der Form der Normalverteilung an; für große μ strebt

die Poisson-Verteilung gegen die Normalverteilung mit dem gleichen Mittelwert μ und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\mu}$. Um dies auch anschaulich anzudeuten ist die Verteilung für den größten in Abb. 3.4 berücksichtigten Mittelwert gestrichelt dar gestellt.

Beispiel 7 An einem radioaktiven Präparat haben Sie in einem Zeitintervall eine Zahl $N = 625$ Zerfälle gemessen. Zur Abschätzung des Messfehlers können Sie diese Messung jedoch nicht beliebig oft wiederholen, da sich das Präparat durch die Zerfälle verändert. Die Standardabweichung lässt sich stattdessen mit Hilfe der Poisson-Verteilung bestimmen. Dazu gehen wir davon aus, dass der Messwert N dem Mittelwert μ der Verteilung entspricht. Dann ist $\sigma = \sqrt{\mu} = 25$ die Standardabweichung und $N = 625 \pm 25$ das Messergebnis. \square

Beispiel 8 Bei Biotopkartierungen haben Sie im vergangenen Jahr auf der Testfläche 6 vierblättrige Kleeblätter gefunden, in diesem Jahr 9. Können Sie daraus auf eine Zunahme dieser Spezies um 50% schließen? Die Messwerte wurden durch Zählen gewonnen, sie gehorchen der Poisson-Statistik. Dann gilt für die Messwerte mit ihrer Standardabweichung: im Vorjahr wurden $6 \pm \sqrt{6} = 6 \pm 2.5$ vierblättrige Kleeblätter gefunden, in diesem Jahr $9 \pm \sqrt{9} = 9 \pm 3$. Die $\mu \pm \sigma$ -Bereiche beider Messungen überlappen sich deutlich, so dass Sie aus den Ergebnissen nicht auf eine Veränderung der Population schließen können: im Vorjahr lag der Mittelwert mit einer Wahrscheinlichkeit 68% im Intervall von 3.5 bis 8.5, in diesem Jahr im Intervall von 6 bis 12. In einem anderen Biotop hat ein Kollege im Vorjahr 60 und in diesem Jahr 90 vierblättrige Kleeblätter gezählt, also ebenfalls eine Veränderung um 50%. In diesem Fall ist der Unterschied signifikant und legt eine Veränderung der Population nahe, da sich die Bereiche 60 ± 7.7 aus dem Vorjahr und 90 ± 9.5 aus diesem Jahr nicht überlappen. Dies Beispiel verdeutlicht ein Problem aller durch Zählen gewonnenen Daten: bei kleinen Werten sind die relativen Fehler sehr groß. \square

3.2.3 Mittelwert und Standardabweichung aus den Messwerten

Bei den Messwerten ist der Mittelwert der Verteilung das experimentelle Mittel, wie durch (3.5) bestimmt. Formal können wir diesen Mittelwert auch als das erste Moment der Verteilung $F(x)$ definieren:

$$\bar{x} = \sum_{x=0}^{\infty} xF(x) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{N(x)}{N} = \frac{\Sigma}{N} = \bar{x}. \quad (3.13)$$

Die relative Form der Verteilung enthält die Information über die Fluktuationen im Datensatz: die Weite der Verteilung ist ein Maß für die Streuung der Daten um den Mittelwert, die Varianz. Dazu betrachten wir die Residuen, d.h. die Abweichungen der einzelnen Messwerte vom Mittelwert: $d_i = x_i - \bar{x}$. Da die Messwerte um den Mittelwert herum verteilt sind, gibt es negative und positive Residuen und es ist $\sum d_i = 0$. Eine von Null verschiedene Summe würde sich jedoch dann ergeben, wenn wir die Quadrate der Residuen betrachten: $(x_i - \bar{x})^2$. Mit diesen quadrierten Residuen lässt sich eine Standardabweichung σ_x definieren als

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (d_i)^2} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3.14)$$

Die Standardabweichung ist ein Maß für die Zuverlässigkeit und Genauigkeit der Einzelmessung; sie ist der *mittlere Fehler der Einzelmessung* bezeichnet. Die Division durch N statt $N-1$ in (3.14) erklärt sich dadurch, dass nur $N-1$ der Residuen unabhängig sind – da sie alle auf den Mittelwert bezogen sind, ist der letzte Wert durch die $N-1$ x -Werte und \bar{x} genau bestimmt.

Die Standardabweichung $\sigma_{\bar{x}}$ des Mittelwertes, d.h. der mittlere Fehler des arithmetischen Mittels oder die Streuung der aus verschiedenen Messreihen erhaltenen Mittelwerte \bar{x} um

n	Vertrauensniveau γ			
	68.3%	90%	95%	99%
2	1.84	6.31	12.71	63.33
3	1.32	2.92	4.30	9.93
4	1.20	2.35	3.18	5.84
5	1.15	2.13	2.78	4.60
6	1.11	2.02	2.57	4.03
7	1.09	1.94	2.45	3.71
8	1.08	1.90	2.37	3.50
9	1.07	1.86	2.31	3.36
10	1.06	1.83	2.26	3.25
15	1.04	1.77	2.14	2.98
20	1.03	1.73	2.09	2.86
30	1.02	1.70	2.05	2.76
50	1.01	1.68	2.01	2.68
100	1.00	1.66	1.98	2.63
∞	1.00	1.65	1.96	2.58

Tabelle 3.1: Werte für den Parameter t in Abhängigkeit von der Anzahl n der Messwerte und dem gewählten Vertrauensniveau. γ ist die Wahrscheinlichkeit, dass der unbekannte Mittelwert innerhalb des angegebenen Intervalls liegt. Alternativ kann auch eine *Irrtumswahrscheinlichkeit* α mit $\alpha = 1 - \gamma$ angegeben werden

den wahren Mittelwert μ , ist gegeben durch

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \quad (3.15)$$

Beispiel 9 Der Durchmesser eines Seils wurde mehrfach gemessen. Als Messwerte ergaben sich 7.4 mm, 7.3 mm, 7.5 mm, 7.3 mm, 7.4 mm, 7.2 mm, 7.5 mm, 7.4 mm und 7.6 mm. Daraus ergibt sich ein experimenteller Mittelwert $\bar{x} = 7.4$ mm, die Standardabweichung des Mittelwerts beträgt $s_{\bar{x}} = 0.1$ mm. Eine Angabe von mehr Nachkommastellen für Mittelwert und Standardabweichung ist nicht sinnvoll, da auch bei den Messwerten nur die erste Nachkommastelle gegeben ist. \square

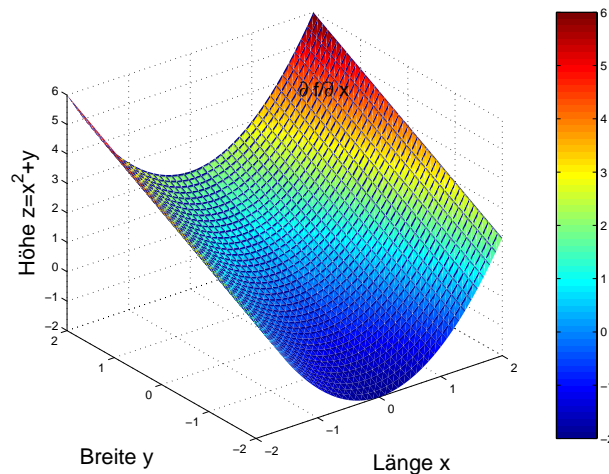
3.2.4 Vertrauensbereich für den Mittelwert

Bisher haben wir uns auf den experimentellen Mittelwert \bar{x} einer normalverteilten Messgröße X bezogen. Diesen Wert haben wir aus den Messwerten ermittelt. Der 'wahre' Mittelwert μ der Verteilung ist uns dagegen nicht bekannt und fällt nicht zwingend mit dem experimentellen Mittelwert \bar{x} zusammen. Wir können jedoch ein um \bar{x} symmetrisches Intervall angeben, in dem der unbekannte Mittelwert μ mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit γ liegt, d.h. wir erzeugen ein Vertrauensintervall, in dem μ mit einer Wahrscheinlichkeit γ liegt. Bei unbekannter Standardabweichung ergeben sich für die Grenzen des Vertrauensintervall

$$x = \bar{x} \pm t \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \bar{x} \pm t \sigma_{\bar{x}} \quad (3.16)$$

mit σ als der Standardabweichung der Messreihe, n als der Zahl der Messungen und t als einem Parameter, der von dem gewählten Vertrauensniveau γ und der Zahl der Messungen abhängt, vgl. Tabelle 3.1. Dieses Verfahren legt die t -Verteilung zugrunde.

Ist dagegen die Standardabweichung σ der normalverteilten Grundgesamtheit vorhanden (z.B. aus früheren Messungen), so kann man anstelle der t -Verteilung die Standardnormal-

Abbildung 3.5: Eine Funktion f in Abhängigkeit von zwei Variablen x und y

verteilung verwenden und erhält für Messwert mit Vertrauensintervall

$$x = \bar{x} \pm t_{\infty} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} . \quad (3.17)$$

Beispiel 10 In Beispiel 9 haben wir den experimentellen Mittelwert bestimmt. Gesucht ist ein Intervall um \bar{x} , in dem der wahre Mittelwert mit einer 95-prozentigen Wahrscheinlichkeit liegt. Dieses Vertrauensintervall ist nach (3.16) und Tabelle 3.1 gegeben zu $x = (7.4 \pm 0.2)$ mm. \square

3.3 Fehlerfortpflanzung

Wir gehen jetzt davon aus, dass wir alle Verteilungen unserer Messwerte durch Gauß-Verteilungen beschreiben können.

Wie messen jetzt Parameter x_{ij} , um eine Größe $u(x_1, x_2, x_3, \dots)$ zu bestimmen, die von diesen Parametern abhängt. Dazu rechnen wir mit den experimentellen Mittelwerten \bar{x}_i , müssen dann aber aus den Standardabweichungen $\sigma_{\bar{x}_i}$ der Mittelwerte eine Standardabweichung σ_u des Ergebnisses u bestimmen gemäß des Fehlerfortpflanzungsgesetzes

$$\sigma_u^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^2 \sigma_{x_3}^2 + \dots . \quad (3.18)$$

In dieser Gleichung bedeutet das Symbol $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ die partielle Ableitung einer Funktion $u(x_1, x_2, x_3, \dots)$ nach einer Variablen x_1 . Die partielle Ableitung wird bei Funktionen verwendet, die von mehr als einer Variablen abhängen. Sie wird genauso gebildet wie die gewöhnliche Ableitung: es wird nach der in der Ableitung gegebenen Variablen, in diesem Fall x_1 , abgeleitet während alle anderen Variablen x_2, x_3 usw. als Konstanten betrachtet werden.

Beispiel 11 Die Funktion

$$f(x, y) = x^2 + y \quad (3.19)$$

ist eine Funktion, die von den beiden Variablen x und y abhängt. Diese Funktion beschreibt ein Tal mit parabolischem Querschnitt und ansteigendem Talboden: für einen festen Wert von y hängt die Funktion quadratisch von x ab, d.h. wir erhalten als Funktionsgraph $f(x)$ eine Parabel. Für festes x dagegen hängt die Funktion linear von y ab, d.h. wir erhalten als Funktionsgraphen eine Gerade. Diese beiden Graphen können wir als Schnitte durch unsere

Funktion $f(x, y)$ betrachten: in y -Richtung verändert sich die Funktion linear, in x -Richtung quadratisch und bei dreidimensionaler Darstellung erhalten wir Abb. 3.5.

Da die Funktion von zwei Variablen abhängt, können wir zwei partielle Ableitungen bilden:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y) = 2x \quad (3.20)$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y) = 1. \quad (3.21)$$

Anschaulich geben die beiden Ableitungen wieder die Steigung des Funktionsgraphen, in diesem Falle jeweils die Steigung in der Richtung, nach der abgeleitet wird. \square

3.3.1 Summen oder Differenzen

Mit

$$u = x + y \quad \text{oder} \quad u = x - y \quad (3.22)$$

wird

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \pm 1. \quad (3.23)$$

Mit (3.18) ergibt sich

$$\sigma_u^2 = (1)^2 \sigma_x^2 + (\pm 1)^2 \sigma_y^2 \quad (3.24)$$

oder

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}. \quad (3.25)$$

Bei der Addition/Subtraktion ergibt sich der absolute Gesamtfehler aus der Summe der Quadrate der einzelnen Fehler.

Dieses Verfahren hat gegenüber der Anfängerfaustregel, die Fehler einfach zu addieren, $\sigma_u = \sigma_x + \sigma_y$, einen Vorteil: addiert man die Fehler, so wird der Fehler der Summe größer als bei Anwendung von (3.25). Um diesen großen Fehler zu erreichen, müssten sowohl x als auch y gleichzeitig maximal zu klein (oder zu groß) gewesen sein. Das ist bei zufälligen Abweichungen aber unwahrscheinlich. Daher liefert der Ansatz (3.25) eine realistischere Abschätzung des Fehlers.

Beispiel 12 Durch mehrfache Messung haben Sie für die Länge der beiden Hälften eines Seils die Messwerte $l_1 = (10 \pm 0.4)$ m (entsprechend einem relativen Fehler von 4%) und $l_2 = (10 \pm 0.3)$ m (entsprechend einem relativen Fehler von 3%) bestimmt. Die Gesamtlänge des Seils ergibt sich zu $l = l_1 + l_2 = (20 \pm 0.5)$ m (entsprechend einem relativen Fehler von 2.5%). Lassen Sie sich nicht von dem kleinen relativen Fehler verwirren: der absolute Fehler der Summe ist natürlich größer als die einzelnen Fehler. \square

3.3.2 Multiplikation mit einer Konstanten

Mit $A = \text{const}$ ergibt sich aus dem gesuchten funktionalen Zusammenhang

$$u = Ax \quad (3.26)$$

für die Ableitung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A \quad (3.27)$$

und damit für die Standardabweichung des Mittelwerts

$$\sigma_u = A\sigma_{\bar{x}}, \quad (3.28)$$

d.h. es wird sowohl der experimentelle Mittelwert als auch seine Standardabweichung mit der Konstanten multipliziert.

Verwenden wir statt des absoluten Fehlers $\sigma_{\bar{x}}$ einen relativen Fehler $\sigma_{\bar{x}}/x$ bzw. σ_u/u , so erkennen wir, dass der relative Fehler bei Multiplikation mit einer Konstanten erhalten bleibt.

Beispiel 13 Der Durchmesser des Seils aus Bsp. 9 ist zu $d = (7.4 \pm 0.1)$ mm bestimmt, entsprechend einem relativen Fehler von 1.3%. Welchen Umfang (mit Fehler) hat das Seil? Für den Umfang gilt $U = \pi d$, d.h. die fehlerbehaftete Größe d wird mit einer Konstanten multipliziert. Der relative Fehler von 1.3% bleibt dabei erhalten und es ist $U = (23.2 \pm 0.3)$ mm. \square

3.3.3 Multiplikation oder Division

Für den Fall

$$u = xy \quad (3.29)$$

erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x \quad (3.30)$$

und damit

$$\sigma_u^2 = y^2\sigma_x^2 + x^2\sigma_y^2. \quad (3.31)$$

Nach Division durch $u^2 = x^2y^2$ ergibt sich

$$\left(\frac{\sigma_u}{u}\right)^2 = \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2, \quad (3.32)$$

d.h. die relativen Fehler in x und y werden quadratisch addiert, um den relativen Fehler in u zu erhalten.

Beispiel 14 Zur Bestimmung eines Widerstands R haben Sie die angelegte Spannung $U = (3 \pm 0.03)$ V und den Strom $I = (25 \pm 0.5)$ mA gemessen. Zur Bestimmung des Widerstands $R = U/I$ ist der Quotient zweier fehlerbehafteter Größen zu bilden. Die relativen Fehler der einzelnen Messgrößen betragen 1% für die Spannung bzw. 2% für den Strom. Der relative Fehler des Quotienten beträgt daher 2.2% und wir erhalten $R = (120 \pm 3) \Omega$. \square

3.3.4 Potenzgesetz

Für den Fall

$$u = x^n \quad (3.33)$$

erhalten wir als relative Fehler

$$\frac{\sigma_u}{|u|} = |n| \frac{\sigma_x}{|x|}. \quad (3.34)$$

Beispiel 15 Sie bestimmen die Höhe eines Turmes, indem Sie die Zeit messen, in der ein Stein von der Turmspitze bis zum Boden fällt. Die Zeit bestimmen Sie zu $t = 2.5 \pm 0.1$ s, d.h. der relative Fehler beträgt 4%. Die Turmhöhe ergibt sich zu $s = \frac{1}{2}gt^2 = (30 \pm 2.5)$ m, da sich der relative Fehler gemäß (3.34) auf 8% verdoppelt hat. \square

3.4 Aufgaben

3.4.1 Fragen

1. Erläutern Sie den Unterschied zwischen systematischen und zufälligen Fehlern. Geben Sie Beispiele.
2. Was ist ein absoluter Fehler?
3. Was ist ein relativer Fehler?
4. Warum ist es nicht sinnvoll, bei der Fehlerrechnung Fehler einfach zu addieren?
5. Durch welche Größen lassen sich Messwerte charakterisieren?
6. Erläutern Sie die folgenden Begriffe:
 - (a) Mittelwert,
 - (b) Varianz,
 - (c) Standardabweichung,
 - (d) mittlerer Fehler der Einzelmessung,
 - (e) Fehler des Mittelwerts.
7. Was beschreibt die Normalverteilung?
8. In welchen Situation wird die Normalverteilung zur Beschreibung von Messwerten verwendet?
9. Erläutern Sie den Zusammenhang zwischen einer Verteilung und dem Histogramm von Messwerten.
10. Erläutern Sie die Eigenschaften einer Normalverteilung. Skizzieren Sie ihre Form.
11. In welchen Situationen wird eine Poisson-Verteilung zur Beschreibung von Messwerten verwendet?
12. Erläutern Sie die Eigenschaften der Poisson-Verteilung und skizzieren Sie ihre Form.
13. Geben Sie den Zusammenhang zwischen Mittelwert und Standardabweichung für die Poisson-Verteilung.
14. Welche Voraussetzungen müssen zur Anwendung der Regeln der Fehlerfortpflanzung erfüllt sein?
15. Geben Sie das Fehlerfortpflanzungsgesetz in seiner allgemeinen Form.
16. Geben Sie die Regel für die Behandlung der Fehler bei einer Summe an.
17. Wie verändert sich der relative Fehler, wenn der Mittelwert einer Messung mit einer Konstanten multipliziert wird? Wie verändert sich der absolute Fehler?
18. Was geschieht mit den relativen Fehlern bei der Multiplikation zweier Mittelwerte? Wie verändern sich die absoluten Fehler?
19. Wie verhält sich der relative Fehler beim Potenzieren eines Messwerts? Wie verhält sich der absolute Fehler?
20. Welche der folgenden Regeln der Fehlerfortpflanzung ist korrekt:
 - bei einem Produkt/Quotienten zweier fehlerbehafteter Größen werden die relativen Fehler der Einzelgrößen addiert.

- bei einem Produkt/Quotienten zweier fehlerbehafteter Größen werden die absoluten Fehler der Einzelgrößen addiert.
- bei einem Produkt/Quotienten zweier fehlerbehafteter Größen werden die relativen Fehler der Einzelgrößen multipliziert/dividiert.
- bei einem Produkt/Quotienten zweier fehlerbehafteter Größen werden die absoluten Fehler der Einzelgrößen multipliziert/dividiert.
- bei der Summe/Differenz zweier fehlerbehafteter Größen werden die relativen Fehler der Einzelgrößen addiert.
- bei der Summe/Differenz zweier fehlerbehafteter Größen werden die absoluten Fehler der Einzelgrößen addiert.
- bei der Summe/Differenz zweier fehlerbehafteter Größen wird das geometrische Mittel der Einzelfehler gebildet.
- bei der Summe/Differenz zweier fehlerbehafteter Größen werden die Quadrate der Einzelfehler addiert und daraus die Wurzel gezogen.

3.4.2 Aufgaben

1. Aus der mehrfachen Messung der Höhe eines Baumes erhalten Sie einen Mittelwert von 12.34 m und einen Fehler des Mittelwerts von 0.45 m. Bestimmen Sie den relativen Fehler der Messung.
2. Die mehrfache Messung der Länge eines Regenwurm ergibt einen Mittelwert von 11.25 cm mit einem relativen Fehler von 14% (der Wurm versucht, sich seiner Messung zu entziehen). Bestimmen Sie den absoluten Fehler.
3. Welche der beiden Messungen der Länge einer Ringelnatter hat den kleineren Fehler: 123.2 ± 2.5 cm oder 123.2 cm $\pm 4\%$?
4. Für die Masse einer Haselmaus werden die folgenden Werte gemessen: 22.3 g, 22.7 g, 22.3 g, 22.1 g, 22.5 g, 22.8 g, 22.5 g, 22.7 g, 22.4 g, 22.6 g. Bestimmen Sie den Mittelwert, den mittleren Fehler der Einzelwerte und den Fehler des Mittelwerts. Geben Sie die Fehler auch als relative Fehler an.
5. Für den Durchmesser einer Johannisbeere werden die folgenden Werte bestimmt: 7.2 mm, 7.3 mm, 7.2 mm, 7.8 mm, 7.3 mm, 7.5 mm, 7.2 mm, 7.7 mm, 7.9 mm, 7.4 mm. Bestimmen Sie den Mittelwert, den mittleren Fehler der Einzelwerte und den Fehler des Mittelwerts. Wie groß ist der Fehler für das aus dem Durchmesser berechnete Volumen der Johannisbeere (Annahme der Johannisbeere als Kugel).
6. Die Länge der von Schiffsbohrwürmern während eines Frühjahrs in eine Holzbühne gefressenen Gänge beträgt 7.4 mm, 7.3 mm, 7.5 mm, 7.3 mm, 7.4 mm, 7.2 mm, 7.5 mm, 7.4 mm und 7.6 mm. Bestimmen Sie den Mittelwert \bar{x} und die Standardabweichung σ . Überprüfen Sie, ob die Angabe, dass ungefähr $2/3$ der Messwerte im Intervall $\mu \pm \sigma$ liegen, erfüllt ist.
7. Das Volumen eines Gegenstandes kann durch Eintauchen in Wasser und die Messung des Volumens des verdrängten Wassers bestimmt werden. Das Volumen des verdrängten Wassers ergibt sich aus der Querschnittsfläche des Zylinders, in dem sich Wasser (und Gegenstand) befinden) und der Steighöhe des Wassers. Der Zylinderdurchmesser wurde in mehrfacher Messung bestimmt zu 23.2 mm, 23.4 mm, 23.1 mm, 23.7 mm, 22.8 mm, 23.2 mm, 23.5 mm, 23.1 mm. Die Steighöhe bei Eintauchen des zu vermessenden Gegenstandes wurde ebenfalls mehrfach gemessen: 34.2 mm, 34.9 mm, 33.4 mm, 34.5 mm, 34.1+mm, 34.5 mm, 34.7 mm, 34.0 mm, 33.8 mm. Geben Sie das Volumen des eingetauchten Gegenstandes an und dessen Fehler.

8. Die Erdbeschleunigung g wurde 8 mal gemessen: g_i [m/s²]: 9.82, 9.79, 9.79, 9.80, 9.85, 9.81, 9.82 und 9.80. Berechnen Sie den Mittelwert sowie die Standardabweichung der Einzelmessung und des Mittelwerts.
9. Für die Länge l eines Pendels erhalten Sie bei mehrfacher Messung die Werte 2.135 m, 2.143 mm, 2.152 mm, 2.139 mm, 2.141 mm, 2.148 mm, 2.143 mm, 2.147 mm, 2.139 mm, 2.151 mm. Bestimmen Sie Mittelwert und Fehler des Mittelwerts. Sie haben ferner die Erdbeschleunigung g wie in der voran gegangenen Aufgabe bestimmt. Bestimmen Sie aus beiden Größen die Schwingungsdauer des Pendels $T = 2\pi\sqrt{l/g}$ und geben Sie deren Fehler an.
10. Für die Dicke eines Zweiges erhalten sie bei mehrfacher Messung die folgenden Werte: 7.4 mm, 7.3 mm, 7.5 mm, 7.3 mm, 7.4 mm, 7.2 mm, 7.5 mm, 7.4 mm und 7.6 mm. Bestimmen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung. Ein Kollege hat für den gleichen Zweig die Werte 7.2 mm, 7.3 mm, 7.5 mm, 7.3 mm, 7.6 mm, 7.1 mm, 7.5 mm, 7.4 mm und 7.7 mm bestimmt. Welchen Mittelwert und welche Standardabweichung erhält er? Welche der Messungen erscheint Ihnen zuverlässiger?
11. Durch mehrfache Messung haben Sie für die Länge der beiden Hälften eines Seils die Messwerte $l_1 = (10 \pm 0.4)$ m und $l_2 = (10 \pm 0.3)$ m bestimmt. Bestimmen Sie die relativen Fehler sowie die Gesamtlänge des Seils mit den entsprechenden Fehlern.
12. (a) Der Gleiter einer horizontalen Luftkissenbahn ist so an einer Feder befestigt, dass er hin und her gleiten oszillieren kann. Die Gesamtenergie des Systems ist $E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$. Ein Student bestimmt folgende Werte für diese Größen: Masse $m = 0.230 \pm 0.001$ kg, Geschwindigkeit $v = 0.89 \pm 0.01$ m/s, Federkonstante $k = 1.03 \pm 0.01$ N/m und Auslenkung x der Feder 0.551 ± 0.005 m. Wie groß ist die Gesamtenergie und deren Fehler? (b) In einer Folgemessung wird die weiteste Auslenkung des Gleiters zu $x_{\max} = 0.698 \pm 0.002$ m bestimmt. Wie groß ist dort die Energie? (c) Sind die Ergebnisse mit der Erhaltung der Energie konsistent?
13. Das Volumen eines Würfels soll eine Genauigkeit von mindestens 3% aufweisen. Wie groß darf die prozentuale Messunsicherheit der Kantenlänge a höchstens sein?
14. Der Durchmesser eines Seils ist zu $d = (7.4 \pm 0.1)$ mm bestimmt, entsprechend einem relativen Fehler von 1.3%. Welchen Umfang (mit Fehler) hat das Seil?
15. Um die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers gemäß der Gleichung $v = gt$ zu bestimmen messen Sie die Fallbeschleunigung $g = 9.81$ m/s mit einem relativen Fehler von 1% und die Zeit $t = 5$ s mit einem absoluten Fehler von 25 ms. Bestimmen Sie den Fehler der Geschwindigkeit mit Hilfe der Fehlerfortpflanzung.
16. Sie Bestimmen die Höhe h eines Turms, in dem sie die Zeit t messen, in der ein Stein vom Turm bis zum Boden fällt, und den Zusammenhang $h = gt^2/2$ mit $g = 9.81$ m/s² verwenden. Sie führen die Messung mehrfach durch und erhalten die Messreihe 2.45 s, 2.39 s, 2.41 s, 2.35 s, 2.36 s und 2.44 s. Bestimmen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung der Zeitmessung. Geben Sie für die Zeitmessung den absoluten und den relativen Messfehler an. Wie hoch ist der Turm und wie groß sind der relative und der absolute Fehler in der Bestimmung der Turmhöhe?
17. Bestimmen Sie die folgenden Größen unter der Annahme, dass alle Fehler unabhängig sind:
- $(12 \pm 1) \cdot [(25 \pm 3) - (10 \pm 1)],$
 - $\sqrt{16 \pm 4} + (3 \pm 0.1)^3 \cdot (2 \pm 0.1),$
 - $(20 \pm 2) \cdot e^{-(1.0 \pm 0.1)}.$

18. Sie haben den Durchmesser einer Kugel zu 2 ± 0.1 m bestimmt. Wie groß ist der Fehler im daraus berechneten Volumen?
19. Sie haben an einem Widerstand R eine Spannung $U = 3$ V anliegen und messen den Strom I mehrfach. Als Messreihe ergibt sich für I : 1.2 mA, 1.1 mA, 1.2 mA, 1.3 mA, 1.4 mA, 1.1 mA, 1.3 mA. Bestimmen Sie den Mittelwert, die Standardabweichung sowie den absoluten und relativen Fehler der Messung. Aus den Messwerten wird der Widerstand berechnet gemäß $R = U/I$. Welcher Widerstand (mit relativem und absolutem Fehler) ergibt sich, wenn die Spannung genau bekannt ist? Wie groß ist der Fehler, wenn die Spannung mit einem Fehler von 5% bekannt ist?
20. Zur Bestimmung eines Widerstands $R = U/I$ haben Sie die angelegte Spannung $U = (3 \pm 0.03)$ V und den Strom $I = (25 \pm 0.5)$ mA gemessen. Wie groß ist der Widerstand (mit Fehler)?
21. Das Trägheitsmoment I einer Kugel ist gegeben als $I = \frac{2}{5}mR^2$. Mit welcher Genauigkeit lässt sich das Trägheitsmoment bestimmen, wenn m und R um 3% bzw. 2% ungenau gemessen werden?
22. Bestimmen Sie die Höhe h eines Turms, dessen Spitze aus der Entfernung $e = (75.2 \pm 2.5)$ m unter dem Winkel $\alpha = 30^\circ \pm 1^\circ$ (gemessen gegen die Horizontale) erscheint. Wie groß ist die absolute bzw. die prozentuale Messunsicherheit von h ?
23. Sie haben die unabhängigen Variablen $x = 10 \pm 2$, $y = 7 \pm 1$ und $\theta = 40^\circ \pm 3^\circ$ gemessen und bestimmen daraus

$$q = \frac{x + 2}{x + y \cos 40^\circ}. \quad (3.35)$$

Wie groß ist der Fehler?

Kapitel 4

Kinematik: Beschreibung von Bewegungen

In der Kinematik beschäftigen wir uns mit der Beschreibung von Bewegungen, d.h. wir stellen Fragen wie

- Wo befindet sich ein Körper zu welcher Zeit?
- Wie ändert sich der Aufenthaltsort des Körpers?
- Ändert sich der Bewegungszustand des Körpers, d.h. wird er schneller, langsamer oder ändert sich seine Bewegungsrichtung?

Die dazu gehörigen Messgrößen sind der Ortsvektor (oder Aufenthaltsort) $\vec{s}(t)$, der Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t)$ und die Beschleunigung $\vec{a}(t)$. In allgemeinsten Form sind alle diese Größen Vektoren, d.h. sie haben einen Betrag und eine Richtung (zum Umgang mit Vektoren vgl. Kap. 2). Außerdem können sich alle diese Größen mit der Zeit verändern, d.h. sie lassen sich als Funktionen in Abhängigkeit von der Zeit darstellen, daher stets die Klammer mit dem t hinter der Größe. Diese Vorstellung einer Funktion verwenden wir auch, wenn wir die Größen graphisch in der Form von Weg-Zeit-, Geschwindigkeits-Zeit- oder Beschleunigungs-Zeit-Diagrammen darstellen.

4.1 Grundbegriffe

4.1.1 Massenpunkt

Grundbegriffe der Kinematik sind der Ort \vec{r} , die Geschwindigkeit \vec{v} und die Beschleunigung \vec{a} . Bevor wir uns mit diesen Grundbegriffen vertraut machen, müssen wir ein Konzept einführen, das uns die Beschreibung eines ausgedehnten Körpers erleichtert. Betrachten wir z.B. die Bewegung eines Hasen, so interessiert uns nicht so sehr wo sich die linke Vorderpfote oder die Spitze des rechten Löffels zu einer bestimmten Zeit befindet, sondern die Bewegung des Hasen insgesamt. Zur Vereinfachung der Betrachtung reduzieren wir den ausgedehnten Körper auf einen Massenpunkt:

Definition 12 *Unter einem Massenpunkt verstehen wir einen Körper endlicher Masse m und verschwindender Ausdehnung. Bei einem ausgedehnten Körper wird dieser Massenpunkt im Schwerpunkt oder Massenmittelpunkt (vgl. Kap. 8) lokalisiert.*

Bei der Anwendung dieses Konzepts müssen wir Vorsicht walten lassen, da es nur unter zwei Einschränkungen gültig ist:

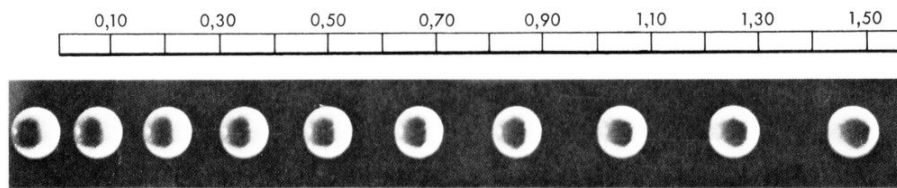


Abbildung 4.1: Stroboskopaufnahme einer gradlinigen Bewegung, die Kugel ist in Abständen von $1/30$ s aufgenommen worden [42]. Diese Bewegung ist in auch in abelle 4.1 und in den Diagrammen in Abb. 4.2 dargestellt.

- der Körper darf sich nicht in sich bewegen oder verformen: streng genommen ist das Konzept des Massenpunktes nur für einen starren Körper definiert. Begründung: bei einem starren Körper bleiben die Abstände zwischen den einzelnen Teilen des Körpers unverändert: die linke vordere Ecke der Stoßstange eines Autos ist immer gleich weit von der hinteren oberen Ecke der Beifahrertür entfernt. Dann kann man aus der Kenntnis der Lage eines Punktes des Körpers auf die Orte der anderen Punkte des Körpers zurück schließen. Dies ist bei einem nicht-starren Körper wie dem Hasen nicht exakt der Fall, allerdings können wir aus der Kenntnis der Lage eines Punktes zumindest ungefähr die Lage anderer Punkte abschätzen: die rechte Vorderpfote hat eine maximal und eine minimal mögliche Entfernung vom linken Hinterlauf.
- der Körper darf nicht rotieren: ein rotierender Körper (z.B. ein abrollender Zylinder) unterscheidet sich in seiner Bewegung von einem Massenpunkt, da ein Teil der Bewegungsenergie in der Rotation steckt. Wir werden dies in Kapitel 7 noch genauer untersuchen.

Eine recht anschauliche Beschreibung und Diskussion der mit dem Konzept des Massenpunkts verbundenen Abstraktionen liefert Krauss [29].

4.1.2 Geschwindigkeit

Die *Geschwindigkeit* beschreibt die Änderung des Aufenthaltsortes mit der Zeit, d.h. sie ist eine Größe, die abhängt vom Ort und der Zeit. Als Beispiel ist in Abb. 4.1 die Bewegung einer Kugel entlang einer Geraden betrachtet. Die Aufnahmen der Kugel erfolgten im Abstand von $1/30$ s, d.h. wir betrachten die Bewegung zu festen Zeiten, die jeweils um ein Stückchen $\Delta t = 1/30$ s auseinander liegen. Gleichzeitig lässt sich mit Hilfe des Maßstabs der zwischen zwei Aufnahmen zurück gelegte Weg Δs bestimmen. Tabelle 4.1 gibt die entsprechenden Werte. Die Spalte t gibt die seit Beginn der Bewegung verstrichene Zeit (bei $t = 0$ befindet sich die Kugel ganz rechts), Δt ist die zwischen zwei aufeinander folgenden Aufnahmen verstrichene Zeit. Die Spalte s gibt den seit Beginn der Bewegung zurück gelegten Weg, die Spalte Δs den zwischen zwei aufeinander folgenden Aufnahmen zurück gelegten Weg. Aus diesen beiden Größen lässt sich die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v} = \Delta s / \Delta t$ innerhalb des Zeitintervalls Δt bestimmen. Diese Ergebnisse sind auch graphisch in Abb. 4.2 dargestellt.

Definition 13 Die mittlere Geschwindigkeit \bar{v} während eines Zeitintervalls Δt ist der Quotient aus der in diesem Zeitintervall zurück gelegten Strecke Δs und der Dauer des Zeitintervalls:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] = \frac{\text{Änderung des Aufenthaltsortes}}{\text{Änderung der Zeit (Zeiteinheit)}}. \quad (4.1)$$

Die Einheit der Geschwindigkeit ist m/s. Die mittlere Geschwindigkeit beschreibt also, um welche Strecke sich ein Körper in einem bestimmten Zeitintervall bewegt hat. Bewegt sich der Körper mit konstanter Geschwindigkeit, so hat er zu jedem Zeitpunkt des Zeitintervalls die

Zeit t [s]	Weg s [cm]	Δt [s]	Δs [m]	\bar{v} [m/s]
0	0			
		1/30	12	3.6
1/30	12			
		1/30	13	3.9
2/30	25			
		1/30	14	4.2
3/30	39			
		1/30	15	4.5
4/30	54			
		1/30	17	5.1
5/30	71			
		1/30	18	5.4
6/30	89			
		1/30	20	6.0
7/30	109			
		1/30	21	6.3
8/30	130			
		1/30	22	6.6
9/30	152			

Tabelle 4.1: Tabellarische Darstellung der Bewegung aus Abb. 4.1

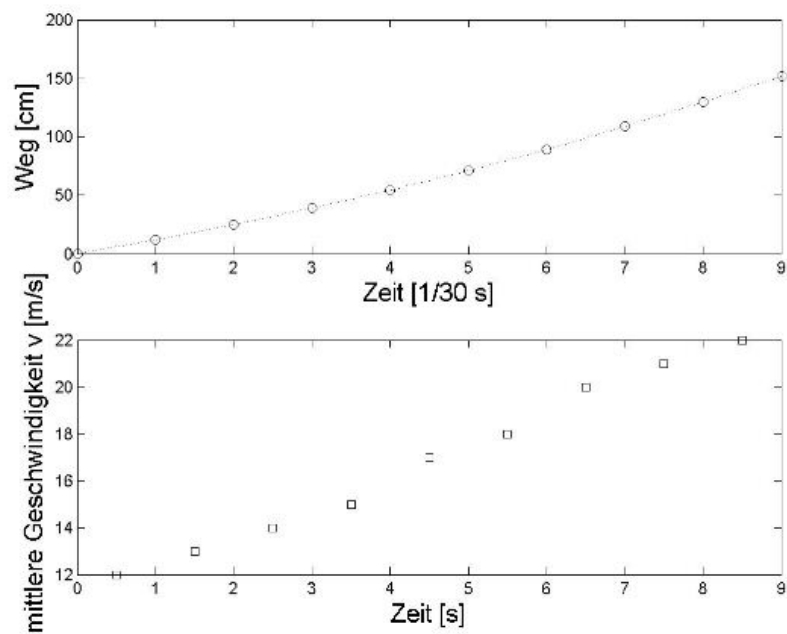


Abbildung 4.2: Darstellung der Bewegung aus Abb. 4.1 im Weg-Zeit-Diagramm (oben) und im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm (unten).

gleiche Geschwindigkeit, eben die mittlere Geschwindigkeit. Verändert der Körper dagegen seine Geschwindigkeit, so muss die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt, die Momentangeschwindigkeit, nicht mit der mittleren Geschwindigkeit überein stimmen.

Definition 14 Die Momentangeschwindigkeit v eines Körpers ist der Grenzwert des Quotienten aus der zurück gelegten Strecke und dem dazu benötigten Zeitintervall für den Fall, dass das Zeitintervall gegen Null geht:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} . \quad (4.2)$$

Anschaulich ist die Geschwindigkeit die Steigung der Kurve im Weg–Zeit–Diagramm (vgl. Abb. 4.3): in gleichen Zeitintervallen ändert sich der Funktionswert (d.h. der Ort) um so stärker, je größer die Steigung der Kurve (d.h. die Geschwindigkeit) ist. Formal ist die Steigung einer Funktion $f(x)$ die Ableitung dieser Funktion nach der Variablen x , also $f'(x)$ oder $df(x)/dx$, d.h. eine Ableitung wie in (4.2) gibt die Steigung an.

Betrachten wir nicht eine gradlinige Bewegung wie in Abb. 4.1 sondern eine Bewegung im Raum wie den Flug einer Hummel, so können wir den Ort nicht mehr durch eine einzige Koordinate s beschreiben sondern müssen einen Ortsvektor \vec{s} verwenden. Die Geschwindigkeit als Änderung des Ortes ist dann ebenfalls ein Vektor, der entsprechend der Definition in (4.2) geschrieben werden kann als

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} . \quad (4.3)$$

Als Vektor ist die Geschwindigkeit also eine Größe, die sowohl einen Betrag hat als auch eine Richtung. Für den Betrag der Geschwindigkeit verwendet man manchmal auch den Begriff Schnelligkeit: damit lässt sich bestimmen, wie weit sich ein Körper während eines Zeitintervalls bewegen wird, nicht jedoch in welche Richtung. Die einzelnen Komponenten des Geschwindigkeitsvektors \vec{v} geben die Geschwindigkeiten in Richtung der entsprechenden Achsen des Koordinatensystems an, d.h. im Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

gibt die Komponente v_x die Geschwindigkeit des Körpers in x -Richtung (parallel zur x -Achse).

4.1.3 Beschleunigung

Betrachten wir zwei unterschiedliche Zeitintervalle in Abb. 4.1, so wird deutlich, dass die Kugel im linken Teil der Abbildung in gleichen Zeitintervallen kürzeren Distanzen zurück legt als im rechten Teil. Die Kugel verändert also ihre Geschwindigkeit während der Bewegung. Diese Geschwindigkeitsänderung wird als Beschleunigung bezeichnet.

Bei der Definition der Geschwindigkeit haben wir die Änderung Δs des Ortes in einem Zeitintervall Δt betrachtet. Entsprechend können wir für die Definition der Beschleunigung die Änderung Δv der Geschwindigkeit während eines Zeitintervalls betrachten:

Definition 15 Die mittlere Beschleunigung \bar{a} während eines Zeitintervalls Δt ergibt sich als der Quotient aus der Änderung Δv der Geschwindigkeit in diesem Zeitintervall und der Dauer des Zeitintervalls:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \left[\frac{\text{m/s}}{\text{s}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] = \frac{\text{Änderung der Geschwindigkeit}}{\text{Änderung der Zeit (Zeiteinheit)}} . \quad (4.5)$$

Die Einheit der Beschleunigung ist m/s^2 . Ist die Beschleunigung konstant, so ist die Beschleunigung zu jedem Zeitpunkt des Zeitintervalls gleich der mittleren Beschleunigung. Im Falle einer variablen Beschleunigung müssen wir, analog zur Definition der Momentangeschwindigkeit, eine instantane Beschleunigung definieren:

Definition 16 Die instantane Beschleunigung a eines Körpers ist der Grenzwert des Quotienten aus der Geschwindigkeitsänderung Δv in einem Zeitintervall Δt und dem Zeitintervall für den Fall, dass das Zeitintervall gegen Null geht:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}. \quad (4.6)$$

Anschaulich ist die Beschleunigung die Steigung der Kurve im Geschwindigkeits–Zeit–Diagramm.

Wenn wir eine Bewegung im dreidimensionalen Raum betrachten, so ist nicht nur die Geschwindigkeit eine vektorielle Größe sondern auch die Änderung der Geschwindigkeit hat einen Betrag und eine Richtung, muss also durch einen Vektor beschrieben werden:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (4.7)$$

4.1.4 Graphische Darstellung von Bewegungen

Wir haben bei der Definition von Geschwindigkeit und Beschleunigung als Ableitungen des Ortes bzw. der Geschwindigkeit nach der Zeit bereits voraus gesetzt, dass alle diese Größen Funktionen der Zeit sind: $\vec{s} = \vec{s}(t)$, $\vec{v} = \vec{v}(t)$ und $\vec{a} = \vec{a}(t)$. Funktionen können wir durch Gleichungen darstellen oder durch Funktionsgraphen. Dabei tragen wir den Wert der physikalischen Größe gegen die unabhängige Variable, in diesem Fall die Zeit, auf. Auf diese Weise lassen sich drei Diagramme erzeugen:

- im Weg–Zeit–Diagramm wird der Ort s als Funktion der Zeit t aufgetragen. Im Fall einer eindimensionalen Bewegung wie in Abb. 4.1 ist dies die Funktion $s = s(t)$.
- im Geschwindigkeits–Zeit–Diagramm wird die Geschwindigkeit v als Funktion der Zeit t aufgetragen. Im Fall einer eindimensionalen Bewegung ist dies $v = v(t)$.
- im Beschleunigungs–Zeit–Diagramm wird die Beschleunigung a als Funktion der Zeit t aufgetragen. Im Fall einer eindimensionalen Bewegung ist dies $a = a(t)$.

Beispiele für diese Diagramme sind in Abb. 4.3 für die gleichförmige Bewegung und die gleichförmig beschleunigte Bewegung gegeben.

4.1.5 Grundgesetze

Zur Beschreibung von Bewegungen können wir zwei Ansätze wählen: (a) die Betrachtung spezieller Bewegungen und (b) die Entwicklung allgemeiner Gesetze, in denen diese speziellen Bewegungen enthalten sind. Die Beschreibung spezieller Bewegungen ist die Methode, die Sie höchstwahrscheinlich in der Schule gelernt haben und mit der wir uns auch am Anfang der Vorlesung halbwegs anschaulich an die Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung sowie an die sie verknüpfenden Gesetze angenähert haben. Die allgemeinen Gesetze dagegen haben den Nachteil, dass sie eher abstrakt sind; sie haben jedoch auch den Vorteil, dass Sie mit sehr wenigen Gesetzen auskommen (genau genommen einem Weg–Zeit–Gesetz und der Definition der Geschwindigkeit in (4.2)).

Das allgemeine Weg–Zeit–Gesetz ist in der vektoriellen Form das Grundgesetz zur Beschreibung aller Bewegungen:

$$\vec{s}(t) = \frac{\vec{a}}{2} \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{s}_0 \quad (4.8)$$

mit \vec{v}_0 als einer Anfangsgeschwindigkeit und \vec{s}_0 als einem Anfangsort. Der erste Term auf der rechten Seite gibt den bei einer Beschleunigung zurück gelegten Weg, der zweite Term beschreibt dabei den aufgrund einer konstanten Anfangsgeschwindigkeit \vec{v}_0 zusätzlich zurück gelegten Weg, und der dritte Term gibt die Anfangsposition (oder den vor Beginn der Betrachtung der Bewegung zurück gelegten Weg).

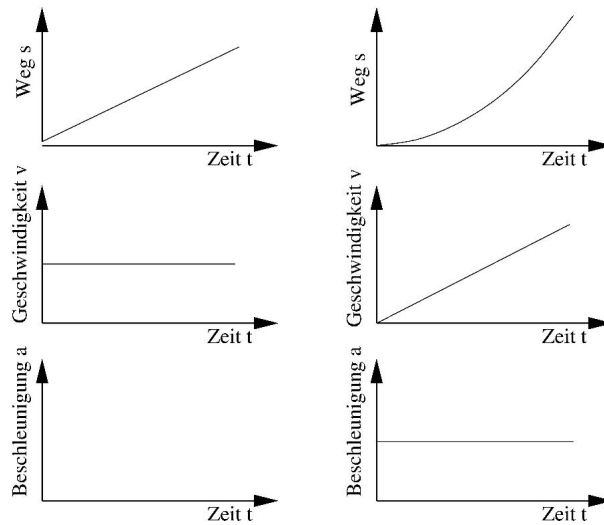


Abbildung 4.3: Graphische Darstellung von gleichförmiger (links) und gleichförmig beschleunigter Bewegung (rechts) im Weg-Zeit- (oben), Geschwindigkeits-Zeit- (Mitte) und Beschleunigungs-Zeit-Diagramm (unten).

Ein zweites wichtiges Gesetz ist das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz. Leiten wir alle Bewegungen anschaulich her, so wird das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz als zusätzliches Gesetz eingeführt. In Wirklichkeit ist es jedoch kein neues Gesetz sondern nur eine Folge aus dem allgemeinen Weg-Zeit-Gesetz (4.8). Die Geschwindigkeit ist nach (4.2) definiert als die Ableitung des Ortes nach der Zeit. Also bilden wir vom allgemeinen Weg-Zeit-Gesetz (4.8) die Ableitung nach der Zeit und erhalten

$$\vec{v}(t) = \vec{a}t + \vec{v}_0 \quad (4.9)$$

als das allgemeine Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz. Darin ist \vec{v}_0 die Anfangsgeschwindigkeit, der Term $\vec{a}t$ beschreibt die zusätzliche Änderung der Geschwindigkeit aufgrund der Beschleunigung.

4.2 Spezielle Bewegungen

Für einige Situationen müssen wir uns nicht mit den allgemeinen Gesetzen (4.8) und (4.9) quälen sondern können vereinfachende Gleichungen für die speziellen Bewegungen angeben – die sich formal natürlich aus den allgemeinen Gleichungen ergeben müssen.

4.2.1 Übersicht

Spezielle Bewegungen sind:

- die *gradlinige Bewegung* (oder eindimensionale Bewegung). Hier erfolgt die Bewegung entlang einer Geraden und der Ort muss nicht durch einen Vektor angegeben werden sondern es reicht die Angabe einer Zahl (des Abstands vom Ursprung) zur vollständigen Beschreibung des Ortes. Dann benötigen wir die allgemeinen Gesetze aber auch nicht in vektorieller Form sondern können zu einer skalaren Form übergehen, d.h. wir lassen die Vektorpfeile einfach weg. Das *Weg-Zeit-Gesetz für die gradlinige Bewegung* wird dann

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0 \quad (4.10)$$

und das *Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz für die gradlinige Bewegung* erhalten wir entweder daraus durch Ableiten nach der Zeit oder aus (4.9) durch Weglassen der Vektorpfeile:

$$v(t) = a \cdot t + v_o . \quad (4.11)$$

Dabei ist a positiv, wenn es sich um eine Beschleunigung (im Sinne der Zunahme der Geschwindigkeit) handelt. a wird negativ bei einer Verzögerung, d.h. einer Abnahme der Geschwindigkeit.

- bei einer *gleichförmigen gradlinigen Bewegung* verschwindet die Beschleunigung und wir können in (4.10) und (4.11) jeweils die Terme mit der Beschleunigung a weglassen. Für das *Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmig gradlinigen Bewegung* erhalten wir dann

$$s(t) = v_o \cdot t \quad (4.12)$$

mit v_o als der konstanten Geschwindigkeit (die, da ja konstant, auch am Anfang der Bewegung so war). Das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz ist dann trivial, da es ja nur die Voraussetzung der konstanten Geschwindigkeit wiederholt:

$$v(t) = v_o = \text{const} . \quad (4.13)$$

- bei einer *beschleunigten gradlinigen Bewegung* aus der Ruhe ist die Anfangsgeschwindigkeit Null, d.h. Sie können alle Terme mit \vec{v}_o weglassen. Dann erhalten Sie

$$s(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 \quad \text{und} \quad v(t) = a \cdot t . \quad (4.14)$$

- bei jeder nicht-gradlinigen Bewegung muss mit dem allgemeinen Weg-Zeit- und entsprechend auch mit dem allgemeinen Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz gearbeitet werden. Das gilt insbesondere auch für die Bewegungen, in denen die Schnelligkeit (d.h. der Betrag des Geschwindigkeitsvektors) konstant ist und sich nur seine Richtung ändert (Kreisbewegung).

Wenn Sie zu dieser formalen Betrachtungsweise keinen Zugang gewinnen können, betrachten Sie die einzelnen speziellen Bewegungen wie im Folgenden beschrieben.

4.2.2 Gleichförmige gradlinige Bewegung

Die wesentlichen Merkmale einer gleichförmig gradlinigen Bewegung bei Start im Ursprung ($s_o = 0$) und aus der Ruhe ($v_o = 0$) sind

- die Geschwindigkeit v ist konstant und es gilt

$$v = \frac{s}{t} . \quad (4.15)$$

- in gleichen Zeiten legt der Körper gleiche Strecken zurück (bzw. in Umkehrung: für gleiche Strecken benötigt der Körper gleiche Zeiten), d.h. durch Umstellung der obigen Gleichung gilt

$$s = v \cdot t . \quad (4.16)$$

- es findet keine Beschleunigung statt, d.h. es ist $a = 0$.

Graphisch lassen sich diese Bewegungen darstellen wie im linken Teil von Abb 4.3: im Weg-Zeit-Diagramm ergibt sich die Funktion $s(t)$ als eine Gerade, da in gleichen Zeitabschnitten immer gleiche Wegabschnitte zurückgelegt werden. Im Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm ergibt sich eine waagerechte Gerade, da die Geschwindigkeit konstant ist (oder formal formuliert: die Ableitung einer Geraden ist eine Horizontale durch den Punkt, der die Steigung der Geraden angibt). Und im Beschleunigungs-Zeit-Diagramm liegt die Funktion $a(t)$ auf der t -Achse, da die Beschleunigung Null ist (oder formal formuliert: die Ableitung einer Horizontalen ist Null, da sie keine Steigung hat).

4.2.3 Gleichförmig beschleunigte gradlinige Bewegung

Die wesentlichen Merkmale einer gradlinigen gleichförmig beschleunigten Bewegung bei Start im Ursprung ($s_o = 0$) und aus der Ruhe ($v_o = 0$) sind

- die Beschleunigung ist konstant, d.h. die Veränderung der Geschwindigkeit pro Zeiteinheit ist konstant. Das bedeutet: in gleichen Zeitschritten nimmt die Geschwindigkeit um den gleichen Betrag zu (bzw. ab):

$$v = a \cdot t. \quad (4.17)$$

- der in gleichen Zeiten zurückgelegte Weg nimmt mit der Zeit zu. Der insgesamt zurückgelegte Weg nimmt quadratisch mit der Zeit zu:

$$s = \frac{a}{2} \cdot t^2. \quad (4.18)$$

Graphisch lässt sich die gleichförmig beschleunigte Bewegung wie im rechten Teil von Abb 4.3 gezeigt darstellen: die Beschleunigung ist konstant, d.h. im Beschleunigungs–Zeit–Diagramm ergibt sich eine waagerechte Linie. Die Geschwindigkeit nimmt linear (in gleichen Zeiten um gleiche Beträge) mit der Zeit zu, d.h. im Geschwindigkeits–Zeit–Diagramm ergibt sich eine ansteigende (bzw. bei negativer Beschleunigung = Verzögerung eine abfallende) Gerade. Im Weg–Zeit–Diagramm ergibt sich aufgrund der quadratischen Abhängigkeit des Weges von der Zeit eine Parabel.

Der Spezialfall einer gleichförmig beschleunigten Bewegung ist der freie Fall. Hier ist die Beschleunigung a gegeben durch die Erdbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

4.2.4 Zusammengesetzte Bewegung

Zusammengesetzte Bewegungen sind in (4.8) und (4.9) bereits vollständig beschrieben. Wenn Sie zusammengesetzte Bewegungen mit den einfacheren Grundgleichungen beschreiben wollen gilt: (1) ist die Bewegung aus zeitlich aufeinander folgenden Abschnitten gleichförmig und gleichförmig beschleunigter Bewegung zusammengesetzt, so können Sie jeden dieser Bewegungsabschnitte mit den betreffenden Gleichungen für sich beschreiben und müssen anschließend die Abschnitte kombinieren. (2) Ist die Bewegung eine Überlagerung zweier gleichzeitiger Bewegungen in verschiedene Richtungen (z.B. Wurf mit einer Anfangsgeschwindigkeit), so können Sie die Bewegung in jeder einzelnen Richtung mit den entsprechenden Grundgleichungen beschreiben. Alternativ können Sie die Bewegung aber auch in vektorieller Form betrachten.

Die letztere Beschreibung ist möglich, da die Bewegungen in die verschiedenen Richtungen unabhängig von einander sind. So fällt eine Kugel gemäß (4.18) unabhängig davon, ob sie senkrecht nach unten fällt oder mit einer horizontalen Geschwindigkeit geworfen wurde. Abbildung 4.4 zeigt dazu Stroboskop-Aufnahmen (zeitlicher Abstand wieder $1/30 \text{ s}$) einer senkrecht nach unten fallenden Kugel und einer Kugel, die mit einer horizontalen Geschwindigkeit von 2 m/s nach rechts geworfen wurde. In der Zunahme des vertikalen Abstandes zwischen den einzelnen Aufnahmen erkennt man die Beschleunigung der Bewegung: entsprechend (4.18) werden mit zunehmender Zeit in gleichen Zeitabschnitten immer größere Wegstücke zurück gelegt. Die horizontalen Abstände zwischen den Aufnahmen der rechten Kugel dagegen sind konstant, entsprechend der konstanten Geschwindigkeit in horizontaler Richtung, vgl. (4.16).

4.3 Senkrechte und parallele Beschleunigung

Eine Beschleunigung führt nach (4.8) zu einer Änderung der Geschwindigkeit. Da es sich sowohl bei der Geschwindigkeit als auch bei der Beschleunigung um vektorielle Größen handelt, kann eine Beschleunigung zu einer Änderung der Richtung der Bewegung führen, zu einer

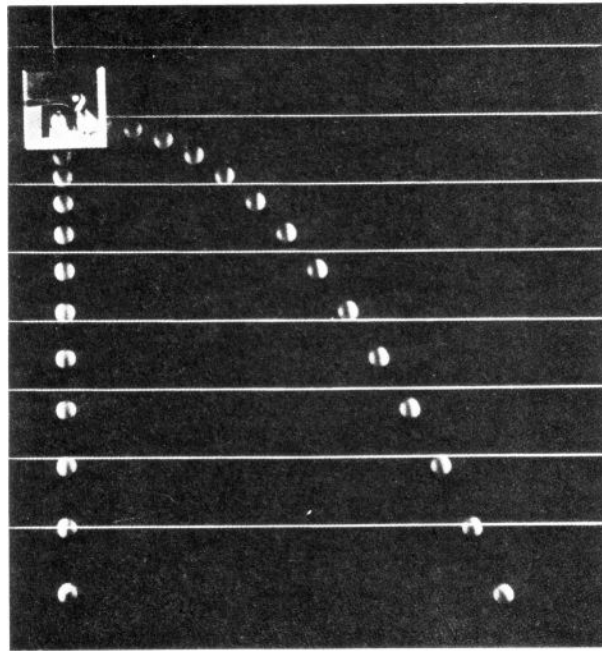


Abbildung 4.4: Unabhängigkeit der Bewegungen: der Fall einer Kugel ist unabhängig davon, ob die Kugel senkrecht nach unten fällt oder mit einer waagerechten Anfangsgeschwindigkeit geworfen wird [42]

Änderung der Schnelligkeit unter Beibehaltung der Richtung, oder zu einer Änderung von sowohl Betrag als auch Richtung der Geschwindigkeit. Dies wird durch den Winkel zwischen Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor bestimmt:

- $\vec{a} \parallel \vec{v}$, d.h. Beschleunigung und Geschwindigkeit sind parallel. Dann wirkt die Beschleunigung in Richtung der Bewegung oder entgegengesetzt dazu. Im ersten Fall wird der Körper schneller, im zweiten Fall wird er verzögert (abgebremst). In beiden Fällen ändert sich die Richtung der Geschwindigkeit nicht, nur die Schnelligkeit. Oder formal

$$\vec{a} \parallel \vec{v} \Rightarrow |\vec{v}| \neq \text{const} \text{ und } \vec{e}_{\vec{v}} = \text{const} , \quad (4.19)$$

wobei $\vec{e}_{\vec{v}}$ ein Einheitsvektor in Richtung der Bewegung ist, d.h. die Richtung der Bewegung beschreibt. Der Fall $\vec{a} \parallel \vec{v}$ beschreibt daher die beschleunigte gradlinige Bewegung.

- $\vec{a} \perp \vec{v}$, d.h. die Beschleunigung steht senkrecht auf der Geschwindigkeit. Dann erfolgt keine Beschleunigung in Richtung der Bewegung, d.h. der Körper wird weder schneller noch langsamer. Die Beschleunigung erfolgt nur senkrecht zur Bewegung und führt damit zu einer Ablenkung, d.h. zu einer Änderung der Bewegungsrichtung. Oder formal

$$\vec{a} \perp \vec{v} \Rightarrow |\vec{v}| = \text{const} \text{ und } \vec{e}_{\vec{v}} \neq \text{const} . \quad (4.20)$$

Ein Beispiel für eine Bewegung, bei der die Beschleunigung dauerhaft senkrecht auf der Bewegungsrichtung steht, ist die Kreisbewegung.

- Bei einem beliebigen Winkel zwischen der Beschleunigung und der Bewegung kann man die Beschleunigung in einen Anteil \vec{a}_{\parallel} parallel zur Geschwindigkeit und einen Anteil \vec{a}_{\perp} senkrecht zur Geschwindigkeit zerlegen. Der erste Anteil bewirkt eine Änderung der Schnelligkeit, der zweite eine Änderung der Richtung.
Ein Beispiel für einen veränderlichen Winkel zwischen Bewegung und Beschleunigung



Abbildung 4.5: Zur Erläuterung der Begriffe Geschwindigkeit, Beschleunigung und Schnelligkeit [17]

ist der waagerechte Wurf wie bei der rechten Kugel in Abb. 4.4. Hier steht die Beschleunigung anfangs senkrecht auf der Bewegung. Mit zunehmender Zeit wird die vertikale Komponente der Geschwindigkeit jedoch wegen $v_{\text{vertikal}} = gt$ immer größer, so dass der Geschwindigkeitsvektor immer stärker in Richtung auf seine vertikale Komponente gedreht wird und damit auch in Richtung des Beschleunigungsvektors.

4.4 Zusammenfassung

Die wichtigsten Gleichungen dieses Kapitels sind die Definitionen von Geschwindigkeit (4.2) und Beschleunigung (4.6) sowie das allgemeine Weg-Zeit-Gesetz (4.8) und das allgemeine Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz (4.9). Eine Zusammenfassung der Konzepte Beschleunigung, Geschwindigkeit und Schnelligkeit findet sich in Abb. 4.5.

4.5 Aufgaben

4.5.1 Fragen

1. Erläutern Sie das Konzept des Massenpunktes.
2. Welchen Vorteile hat es, die Bewegung eines Massenpunktes zu betrachten statt der eines realen Körpers, z.B. eines Hasen?
3. Bei welcher Art von Bewegung ist Vorsicht bei der Verwendung des Konzept des Massenpunktes geboten?
4. Was ist der Unterschied zwischen Geschwindigkeit und Schnelligkeit?
5. Welches der folgenden Teile eines Autos kann nicht zur Beschleunigung verwendet werden: (a) Gaspedal, (b) Bremspedal, (c) Lenkrad?
6. Ein Hammer fällt auf der Oberfläche des Mars mit einer Beschleunigung von 3.7 m/s^2 . Ist seine Beschleunigung größer, kleiner oder unverändert, wenn er mit einer Geschwindigkeit von 6 m/s vertikal geworfen wird?
7. Konstruieren Sie ein Weg-Zeit- und ein Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm für die folgende Bewegung einer Raupe entlang eines geraden Zweiges: die Bewegung beginnt aus der Ruhe und beschleunigt langsam auf eine konstante Geschwindigkeit. Die Raupe beschleunigt dann nach einiger Zeit auf eine höhere Geschwindigkeit. Nach weiterer Zeit wird die Raupe müde und bremst bis zur Ruhe ab.
8. Wenn ein Läufer innerhalb von 2 s auf 7 km/h beschleunigt und ein Schimpanse in der gleichen Zeit auf 120 km/h , welchen von beiden hat die größere Beschleunigung?
9. Wie ändert sich die Beschleunigung eines Balls im freien Fall wenn seine Masse verdoppelt wird?
10. Ein Tischtennisball und ein Golfball haben ungefähr die gleiche Größe aber sehr unterschiedliche Massen. Welcher von beiden trifft zuerst auf dem Boden auf, wenn sie gleichzeitig von einem hohen Gebäude fallen gelassen werden und der Luftwiderstand nicht vernachlässigt werden kann?
11. Wie würden Sie die Bewegung eines Zylinders beschreiben, der eine Rampe hinunter rollt?
12. Wie würden Sie die Bewegung eines Balls beschreiben, der einen Hügel hinauf rollt?
13. Wie (wenn überhaupt) unterscheidet sich die Beschleunigung eines aufwärts geworfenen Balls von der eines abwärts geworfenen?
14. Vernachlässigen Sie den Luftwiderstand. Während welcher der ersten 5 Sekunden des freien Falls eines Balles ändert sich die Geschwindigkeit am meisten?
15. Sie jagen Gorillas (natürlich nur mit Betäubungspfeilen). An einem Ast sehen Sie plötzlich einen Gorilla mit einem deutlich sichtbaren roten Fleck im Fell. In dem Moment, in dem Sie den Abzug betätigen, lässt sich der Gorilla vom Ast fallen. Wohin müssen Sie zielen, um den roten Fleck zu treffen? Wenn Sie ganz ratlos sind, vielleicht hilft Ihnen Abb. 4.6.
16. Geschwindigkeit vektoriell: Warum hinterlässt senkrecht fallender Regen auf den Scheiben eines Eisenbahnwaggons geneigte Streifen? Angenommen, diese Streifen haben einen Winkel von 45° . Was bedeutet dies für die relativen Geschwindigkeiten von Regen und Zug?

17. Ein Ball wird mit einer Geschwindigkeit v_0 horizontal aus einer Höhe h geworfen. Ein anderer Ball wird mit gleicher Geschwindigkeit senkrecht nach unten geworfen. (a) Welcher der beiden Bälle trifft früher auf den Boden auf? (b) Welcher der beiden Bälle hat die größere Geschwindigkeit beim Auftreffen? Versuchen Sie für beide Fragen eine allgemeine Formulierung für die Geschwindigkeiten bzw. die Flugzeiten anzugeben.
18. Welche der folgenden Aussagen ist wahr:
- bei einer gleichförmigen Bewegung wird in gleichen Zeitintervallen der gleiche Weg zurück gelegt.
 - bei einer gleichförmigen Bewegung wird in doppelten Zeiten der doppelte Weg zurück gelegt.
 - bei einer gleichförmigen Bewegung hängt der zurück gelegte Weg linear von der Zeit ab.
 - bei einer gleichförmigen Bewegung hängt der zurück gelegte Weg quadratisch von der Zeit ab.
 - bei einer gleichförmigen Bewegung hängt die Geschwindigkeit linear von der Zeit ab.
 - bei einer beschleunigten Bewegung wird in doppelten Zeiten die gleiche Strecke zurück gelegt.
 - bei einer beschleunigten Bewegung wird in doppelten Zeiten die vierfache Strecke zurück gelegt.
 - bei einer beschleunigten Bewegung wird in doppelten Zeiten die doppelte Geschwindigkeit erreicht.
 - bei einer beschleunigten Bewegung wird in gleichen Zeitintervallen die gleiche Strecke zurück gelegt.
 - bei einer beschleunigten Bewegung wächst die Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um den gleichen Betrag.
 - bei einer beschleunigten Bewegung hängt der zurück gelegte Weg linear von der Zeit ab.
 - bei einer beschleunigten Bewegung hängt der zurück gelegte Weg quadratisch von der Zeit ab.
 - bei der beschleunigten Bewegung hängt die Geschwindigkeit linear von der Zeit ab.
 - bei einer beschleunigten Bewegung ist die Geschwindigkeit konstant.
 - bei einer beschleunigten Bewegung hängt die Geschwindigkeit quadratisch von der Zeit ab.

4.5.2 Aufgaben

1. In dem Moment, in dem eine Keglerin die Kugel los lässt, bewegt sich ihre Hand horizontal mit einer Geschwindigkeit von 6 m/s relativ zu ihrem Körper. Wie groß ist die Geschwindigkeit der Kugel relativ zum Boden, wenn die Keglerin sich mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s vorwärts bewegt?
2. Ein Sprinter legt die 100 m Strecke in 12 s zurück. Berechnen Sie seine mittlere Geschwindigkeit.
3. Ein Sprinter legt die 100 m Strecke in 12 s zurück. Die ersten 20 m der Strecke beschleunigt er mit der ihm zur Verfügung stehenden maximalen Beschleunigung, den Rest der

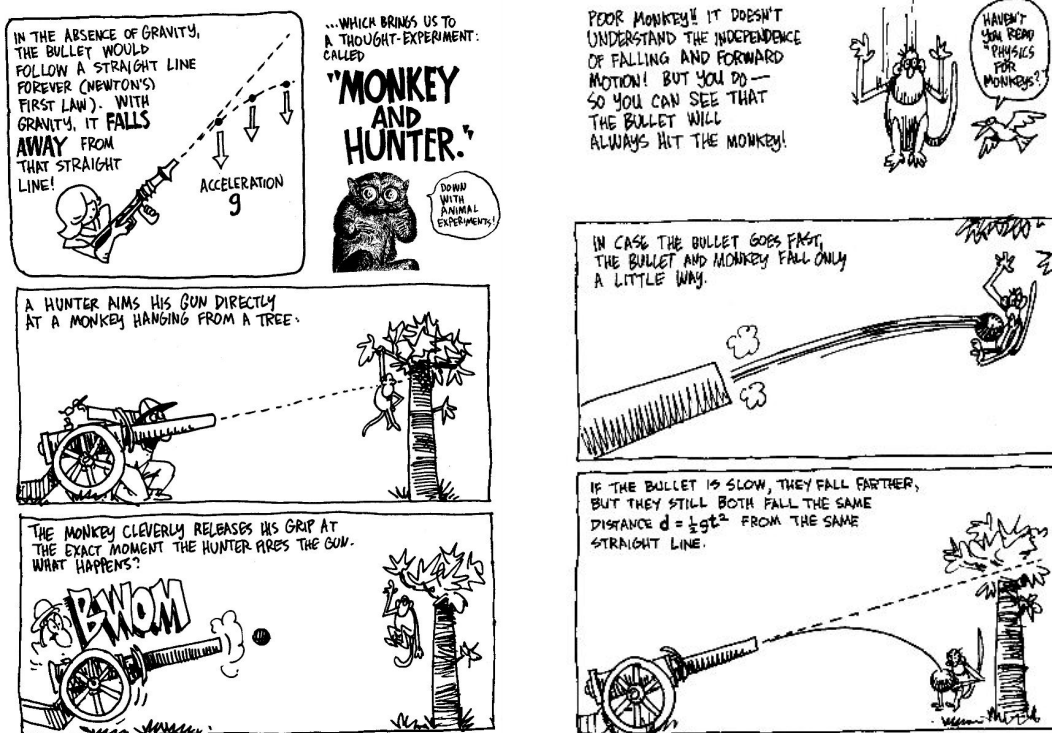


Abbildung 4.6: Affe und Jäger, Hinweis zu Frage 15 [17]

Strecke läuft er mit der am Ende des Beschleunigungsintervalls erreichten konstanten Geschwindigkeit. Vergleichen Sie diese mit der mittleren Geschwindigkeit über die Gesamtstrecke. Stellen Sie die Bewegung auch im Weg–Zeit– und Geschwindigkeits–Zeit–Diagramm dar.

4. Ein Jogger läuft mit konstanter Geschwindigkeit von 12 km/h durch den Wald. Plötzlich steht 2 m vor ihm ein Dachs (bar jeglicher Fluchtinstinkte) auf dem Weg. Die maximale Verzögerung des Joggers beträgt 2 m/s^2 . Schafft er es, vor dem Dachs zum Stillstand zu kommen oder soll er lieber gleich zum Sprung ansetzen?
5. Ein aus der Ruhe startender Schlitten bewegt sich mit gleichförmiger Beschleunigung hang abwärts. In den ersten 4 s legt er eine Entfernung von 12 m zurück. Nach welcher Zeit hat der Schlitten eine Geschwindigkeit von 4 m/s erreicht?
6. Ein Hund mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s ist 30 m hinter einem Kaninchen, das sich mit 5 m/s bewegt. Wann holt der Hund das Kaninchen ein? (Beide Geschwindigkeiten sind konstant.) Stellen Sie die Bewegung auch im Weg–Zeit– und Geschwindigkeits–Zeit–Diagramm dar.
7. Ein Flugzeug beschleunigt auf der Startbahn aus Ruhe mit einer Beschleunigung von 4 m/s^2 . Geben Sie seine Geschwindigkeit nach 5 s und den innerhalb der 5 Sekunden zurück gelegten Weg an. Welcher Weg wurde innerhalb der fünften Sekunde zurück gelegt? Stellen Sie die Bewegung auch im Weg–Zeit– und Geschwindigkeits–Zeit–Diagramm dar.
8. Ein PKW fährt mit einer Geschwindigkeit von 15 m/s gegen eine Steinmauer. Ein Passagier mit Sicherheitsgurt wird innerhalb einer Strecke von 1 m gleichförmig abgebremst, einer ohne Sicherheitsgurt wird beim Aufprall auf die Windschutzscheibe innerhalb einer Strecke von 0.01 m abgebremst. Berechnen Sie die auf beide wirkenden Beschleunigungen und vergleichen Sie mit der Gravitationsbeschleunigung.

9. Eine Modellrakete wird mit einer konstanten Beschleunigung von 50 m/s^2 senkrecht nach oben geschossen. Nach 4 s ist der Treibstoff verbraucht. (a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, die die Rakete zu diesem Zeitpunkt hat. (b) Welche maximale Höhe erreicht die Rakete? (c) Bestimmen Sie die Gesamtdauer des Fluges.
10. Aus welcher Höhe muss Wasser herab stürzen, um eine Turbine mit einer vertikal nach unten gerichteten Geschwindigkeit von 30 m/s zu treffen?
11. Ein Lachs springt senkrecht aus dem Wasser mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 6 m/s . (a) Wie hoch springt er? (b) Wie lange befindet er sich außerhalb des Wassers?
12. Der Hammer einer Ramme trifft den einzurammenden Pfahl mit einer Geschwindigkeit von 7 m/s . Aus welcher Höhe fiel der Hammer?
13. Ein von einer Brücke geworfener Stein trifft die Wasseroberfläche nach 5 s. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Steins beim Auftreffen auf die Wasseroberfläche? Wie hoch ist die Brücke?
14. Sie werfen einen Ball mit einer vertikalen Geschwindigkeit von 40 m/s nach oben. Welche Flughöhe wird er erreichen, wie lange dauert es, bis er diese erreicht?
15. Sie werfen einen Stein in einen Brunnen und hören nach 3 s seinen Aufprall. Wie tief ist der Brunnen? Müssen Sie bei ihren Rechnungen die Ausbreitungszeit des Schalls (Schallgeschwindigkeit 330 m/s berücksichtigen? Wie groß ist der Fehler, wenn Sie sie vernachlässigen?
16. Ein Felskletterer lässt versehentlich einen Karabiner fallen. Dieser fällt mit einer Geschwindigkeit von 7 m/s an Ihnen vorbei. Wie schnell wird der Karabiner 1 s (2 s) später sein. Wie hoch steht der Kletterer über Ihnen?
17. Ein Felsblock fällt von einem 60 m hohen Kliff. (a) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit während der ersten 3 Sekunden des Falls. (b) Zu welcher Zeit ist die Momentangeschwindigkeit gleich der mittleren Geschwindigkeit aus Teil (a)? Wie lange benötigt der Fels, bis er auf dem Boden auf trifft?
18. Ein von einem Heißluftballon abgeworfener Sandsack trifft den Erdboden nach 15 s. Was ist die Höhe des Ballons, wenn (a) dieser sich in Ruhe befand, (b) dieser beim Abwurf mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s am Sinken war?
19. Ein Sandsack wird von einem Ballon abgeworfen, der sich 300 m über dem Erdboden befindet und mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s senkrecht aufsteigt. (a) Was ist die maximale Höhe, die der Sandsack erreicht? (b) Bestimmen Sie die Höhe und Geschwindigkeit des Sandsacks nach 5 s. (c) Wie lange benötigt der Sandsack, bis er den Erdboden erreicht?
20. Ein hektischer Autofahrer A fährt mit 230 km/h auf der linken Spur der Autobahn und überholt ein Zivilfahrzeug der Polizei P , das mit 130 km/h auf der rechten Spur fährt. Die Polizisten möchten sich gerne nach dem Grund für die Eile erkundigen und setzen zur Verfolgung an. Skizzieren Sie die Geschwindigkeits-Zeit- und Weg-Zeit-Diagramme für beide Fahrzeuge unter der Annahme, dass A mit konstanter Geschwindigkeit fährt und P ihn einholt und neben ihm her fährt.
21. Ein Bussard stürzt im Sturzflug aus einer Höhe von 30 m auf seine Beute. Welche Geschwindigkeit hat der Bussard unmittelbar vor Ergreifen der Beute?
22. Ein Sprinter läuft die 100 m Strecke in 9.8 s . (a) Bestimmen Sie seine mittlere Geschwindigkeit. (b) Da der Läufer aus der Ruhe startet, kann seine Geschwindigkeit nicht konstant sein. Skizzieren Sie die ungefähren Weg-Zeit-, Geschwindigkeits-Zeit- und Beschleunigungs-Zeit-Diagramme.

23. Ein vom Boden abgeschossener Fußball trifft den Boden nach 4 s 30 m von seinem Startpunkt entfernt. (a) Bestimmen Sie die mittlere Geschwindigkeit des Balls während er sich in der Luft befindet. (b) Bestimmen Sie seine mittlere Beschleunigung während der Flugphase.
24. Ein Baseball hat eine Anfangsgeschwindigkeit von 40 m/s und einen Abschusswinkel von 30° zur Horizontalen. (a) Wie hoch wird er fliegen? (b) Wann wird er diese Höhe erreichen? (c) Wie groß wird zu dieser Zeit sein Abstand vom Startpunkt sein? (d) Welche horizontale Strecke legt er insgesamt zurück? (e) Wie groß ist die Gesamtflugzeit?
25. Ein Känguru kann eine Distanz von 8 m springen. Welche Anfangsgeschwindigkeit hat es, wenn es unter einem Winkel von 45° zur Horizontalen ab springt?
26. Ein Baseball, der unter einem Winkel von 10° relativ zur Horizontalen abgeworfen wird, erreicht seine Ausgangshöhe nach einer Entfernung von 70 m. Bestimmen Sie die Abwurfgeschwindigkeit.
27. Ein Frosch kann bei einem Absprungwinkel von 45° eine Entfernung von 0.9 m springen. (a) Welche Anfangsgeschwindigkeit ist dazu erforderlich? (b) Welche Sprunghöhe ergibt sich, wenn diese Geschwindigkeit vertikal gerichtet ist?
28. Ein Schneeball wird aus einer Höhe von 2 m mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 10 m/s in einem Winkel von 30° gegenüber der Horizontalen geworfen. Bestimmen Sie seinen Ort nach 1 s sowie seine Geschwindigkeit, beides in vektorieller Form. Wie lange ist der Schneeball insgesamt in der Luft und wo wird er landen?
29. Ein Schüler will einem anderen Schüler einen Ball zu werfen. Der erste Schüler kann dem Ball eine Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s geben. Wie weit können die beiden aus einander stehen, damit der Ball den zweiten Schüler noch erreicht?
30. Ein Fußball wird mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s vom Boden abgeschossen. Wie groß ist die Reichweite, wenn der Abschusswinkel (a) 30° , (b) 60° oder (c) 45° gegenüber der Horizontalen beträgt? Wie lange ist der Ball jeweils in der Luft?
31. Beim Torabschlag schießt der Torwart den Fußball derart, dass er innerhalb von 30 m um 10 m in die Luft steigt und dann zu fallen beginnt. Mit welcher Geschwindigkeit (als Vektor oder Betrag und Winkel gegenüber der Horizontalen) wurde der Ball geschossen?
32. Ein Baseball wird mit einer Geschwindigkeit von 40 m/s in einem Winkel von 30° gegen die Horizontale geschlagen. (a) Wie hoch fliegt er maximal? (b) Wann wird er diese Höhe erreichen? (c) Wie weit ist er zu der Zeit geflogen? (d) Wie weit fliegt er insgesamt? (e) Wie lange ist er in der Luft? (Vernachlässigen Sie, dass der Ball etwas oberhalb des Bodens geschlagen wird).
33. Beschleunigte Bewegung (freier Fall): Eine Möwe (erfolgreich an der 'Einführung in die Physik' teilgenommen) knackt die Schalen der von ihr so gern verspeisten Krustentiere, indem sie diese aus großer Höhe auf einen Stein fallen lässt. Aus welcher Höhe müssen die Krebse mindestens abgeworfen werden, wenn die Schale erst bei einer vertikalen Aufprallgeschwindigkeit von 20 m/s zerspringt? Wo lässt die Möwe die Krebse fallen: über, vor oder hinter dem Stein? Bestimmen Sie diesen Wert für eine Fluggeschwindigkeit der Möwe von 10 m/s. Beschreiben Sie die Bewegung des Steins in der Form $\vec{s}(t)$ mit Hilfe von Vektoren.
34. Zusammengesetzte Bewegung (beschleunigt und gleichförmig): Katastrophe am Biberdamm: Mama Biber sitzt genau am Anfang des Biberdammes am Ufer und sieht Sohn Biber (Nichtschwimmer!) in der Mitte des 160 m langen Dammes ins Wasser stürzen. Mutter Biber entfaltet für 2 s ihre maximale Beschleunigung von 6 m/s^2 und läuft mit der dann erreichten Maximalgeschwindigkeit (wie groß ist diese?) weiter. Nach welcher

Zeit bzw. an welcher Stelle auf dem Damm muss Mutter-Biber abbremsen, um genau in der Dammmitte zum Stillstand zu kommen und Sohn-Biber noch rechtzeitig vor dem Ertrinken aus dem Wasser fischen zu können? Betrachten Sie zwei Fälle: (a) die (negative) Beschleunigung ist ebenfalls 6 m/s^2 , und (b) die (negative) Beschleunigung beträgt nur 4 m/s^2 . Skizzieren Sie Weg-Zeit-, Geschwindigkeit-Zeit- und Beschleunigungs-Zeit-Diagramme, um sich den Ablauf der Bewegung klar zu machen (das kann Ihnen als Hilfe bei der geforderten Berechnung der Bewegung dienen!)

35. Komplexe zusammenfassende Aufgabe zur Kinematik: Versuchen Sie, die Bewegung beim Weitsprung in physikalischen Begriffen zu versetzen.

Der Bewegungsablauf setzt sich aus den folgenden vier Elementen zusammen:

- dem Anlauf, d.h. einer Phase (mehr oder weniger) gleichförmiger Beschleunigung $a_{\text{Anlauf}} = 1.5 \text{ m/s}^2$ bis zum Absprung nach $s_{\text{Anlauf}} = 8 \text{ m}$,
- dem Absprung, bei dem die zusätzlich eine Beschleunigung $a_{\text{Absprung}} = 5 \text{ m/s}^2$ über eine Zeit von $t_{\text{Absprung}} = 0.2 \text{ s}$ senkrecht zur ursprünglichen Bewegung erfolgt,
- der Freiflugphase, ebenfalls gleichförmig beschleunigt, allerdings mit der Beschleunigung $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ senkrecht nach unten,
- dem Auftreffen in der Sprunggrube.

Diese Bewegung ist unter den folgenden Gesichtspunkten zu untersuchen, wobei wir uns außer in der letzten Teilaufgabe den Weitspringer als einen Massenpunkt konzentriert im Schwerpunkt (ungefähr Höhe des Solarplexus) vorstellen können:

- Skizzieren Sie die Bewegung im Weg-Zeit-Diagramm und Beschleunigungs-Zeit-Diagramm, jeweils für die beiden Komponenten der Bewegung separat.
 - Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Sportlers am Ende der Anlaufphase.
 - Wie würde sich die Geschwindigkeit bei Verdopplung/Halbierung der Anlaufstrecke bzw. der Beschleunigung verändern?
 - Geben Sie die Absprunggeschwindigkeit an.
 - Unter welchem Winkel springt der Sportler ab?
 - An welcher Stelle trifft der Sportler auf den Boden auf (nur unter Betrachtung des Schwerpunktes), d.h. wie weit springt er?
 - Für welchen Absprungwinkel würde der Sportler die maximale Reichweite erreichen? Wie groß müsste dazu die Absprungbeschleunigung sein (Beschleunigungszeit wie in Aufgabenstellung).
 - Der reale Sportler ist nicht alleine durch den Schwerpunkt beschrieben sondern ist ein ausgedehnter Körper, dessen Form sich beim Auftreffen verändert. In der Abbildung ist die Landephase schematisch dargestellt. Erklären Sie, warum sich dabei eine Vergrößerung der Sprungweite ergibt und schätzen Sie diese ab (Annahme: der Schwerpunkt liegt 0.9 m über dem Boden).
36. Bewegung beschrieben mit Vektoren: Eine Graugans fliegt für 40 min in nordöstlicher Richtung mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}_1 = (15, 15) \text{ km/h}$. Um einem Windrotorenfeld auszuweichen, fliegt sie für 5 min in genau nördlicher Richtung mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}_2 = (20, 0) \text{ km/h}$. Anschließend fliegt sie mit ihrer ursprünglichen Geschwindigkeit v_1 für 15 min weiter in nordöstlicher Richtung. Welchen Weg hat die Graugans in den einzelnen Abschnitten ihres Fluges zurückgelegt, welchen insgesamt. Welche Strecke (nur der Betrag, nicht die Richtung) wurde dabei zurückgelegt? Wo wäre die Graugans nach der Flugstunde angekommen, wenn sie nicht dem Windrotorenfeld hätte ausweichen müssen. Skizzieren Sie Ihre Lösung auf einer 'Karte' (xy-Diagramm).

Kapitel 5

Dynamik: Kräfte oder die Ursache von Bewegungen

In der Kinematik haben wir uns mit der Beschreibung der Bewegung durch das Weg-Zeit-Gesetz, und daraus abgeleitet das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz, beschäftigt. Dabei ging es ausschließlich um die Beschreibung der Bewegung, d.h. wir haben die Funktion $\vec{s}(t)$ betrachtet, die uns sagt, an welchem Ort \vec{s} sich ein Körper zu einer bestimmten Zeit t befindet, sowie die Funktion $\vec{v}(t)$, die uns sagt, welche Geschwindigkeit der Körper zur Zeit t hat. Über die Ursachen der Bewegung oder der Beschleunigung haben wir bisher nicht diskutiert, wir haben nur festgestellt, dass eine Beschleunigung \vec{a} zu einer Änderung der Bewegung \vec{v} führt: als Änderung der Schnelligkeit ($\vec{a} \parallel \vec{v}$) oder der Richtung ($\vec{a} \perp \vec{v}$) oder von beidem (beliebiger Winkel zwischen \vec{a} und \vec{v}).

Wir wollen in diesem Kapitel verstehen und quantifizieren, warum ein Körper sich bewegt und warum er (gegebenenfalls) beschleunigt oder verzögert. Die hierzu gehörigen Regeln wurden von Newton formuliert und werden daher als Newton'sche Gesetze bezeichnet.

Die physikalischen Größen, die wir dazu benötigen, sind neben den bekannten Größen Geschwindigkeit \vec{v} und Beschleunigung \vec{a} die neuen Größen Masse m , Kraft \vec{F} und Impuls (Bewegungsgröße) \vec{p} . Diese Größen sind nicht von einander unabhängig sondern lassen sich einteilen in die Größen, die die Bewegung beschreiben (Geschwindigkeit \vec{v} in der Kinematik und Impuls \vec{p} in der Dynamik), und die Größen, die eine Änderung der Bewegung beschreiben (Beschleunigung \vec{a} in Kinematik und Kraft \vec{F} in der Dynamik). Die Verknüpfung zwischen den kinematischen und den dynamischen Größen ist durch die Masse m gegeben. Oder in tabellarischer Form zusammen gefasst:

	Kinematik	Dynamik	Zusammenhang
Bewegung	Geschwindigkeit \vec{v}	Impuls \vec{p}	$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
Änderung der Bewegung	Beschleunigung \vec{a}	Kraft \vec{F}	$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

5.1 Definition

Für die oben erwähnten Größen Kraft \vec{F} , Impuls \vec{p} und Masse m werden im Folgenden Gebrauchsdefinitionen eingeführt, d.h. Definitionen, die für unsere Zwecke völlig ausreichend sind, auch wenn man für eine physikalisch exakte Definition teilweise andere Umschreibungen wählen würde.

5.1.1 Kraft

Definition 17 Eine Kraft ist diejenige physikalische Größe, die die Einwirkung beschreibt, welche den Bewegungszustand eines Körpers ändert.

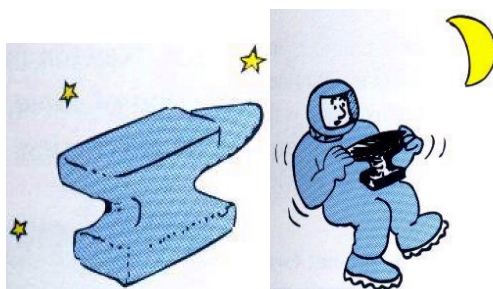


Abbildung 5.1: Schwere (links) und träge (rechts) Masse [22]

Folgerung: Kräfte sind für Abweichungen von der gleichförmig gradlinigen Bewegung und für das Verlassen der Ruhelage, d.h. für Beschleunigungen, verantwortlich.

Die Einheit der Kraft ist das Newton, es gilt $1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$. Die Einheit der Kraft können Sie sich auch mit Hilfe des Aktionsgesetzes (5.5) merken, da dieses Kraft als das Produkt aus Masse und Beschleunigung definiert, was genau auf die Einheit kg m/s^2 führt. Diese wird, da sie häufig auftritt, durch das Newton N abgekürzt. Letzteres ist auch ein Beispiel dafür, wie neue Einheiten aus den wenigen SI-Einheiten abgeleitet werden können.

5.1.2 Impuls

Definition 18 Der Impuls

$$\vec{p} = m\vec{v} \left[\frac{\text{kg m}}{\text{s}} \right] \quad (5.1)$$

ist die Bewegungsgröße eines Körpers.

Diese Bewegungsgröße kann nur durch eine Kraft geändert werden. Sie geht ein in die Trägheit eines Körpers. Die Bewegungsgröße (der Impuls) ist um so größer, je größer die Masse ist, und um so größer, je größer die Geschwindigkeit ist. Bei gleicher Geschwindigkeit hat die größere Masse den größeren Impuls; bei gleicher Masse hat die mit der größeren Geschwindigkeit den größeren Impuls.

Bei Stoßprozessen bleibt der Impuls des Gesamtsystems erhalten, der Impuls wird daher als *Erhaltungsgröße* bezeichnet, vgl. Abschn. 5.6.

5.1.3 Masse

Obwohl Sie sicherlich eine Alltagsvorstellung von Masse haben (die Einheit der Masse ist allgegenwärtig, z.B. wenn Sie ein Kilo Äpfel kaufen, dann meinen Sie eigentlich ein Kilogramm Äpfel), ist eine saubere Definition der Masse sehr schwierig. Das erkennen Sie auch, wenn Sie zu den SI-Einheiten in Abschn. 1.3.1 zurück blättern. Dort sind alle anderen Grundgrößen auf fundamentale atomare Prozesse oder andere Naturkonstanten zurück geführt, lediglich bei der Masse wird auch heute noch eine sehr altertümliche (und nicht gewünschte) Definition über den Vergleich mit einem Prototypen, dem Urkilogramm, verwendet.

Definition 19 Die Definition der Masse erfolgt durch den Vergleich mit einer Standardmasse (Urkilogramm).

Die physikalische Größe Masse hat zwei Eigenschaften: die der Trägheit und die der Schwere.

Schwere, Gewicht

Die *schwere Masse*, oder das, was Sie als Gewicht bezeichnen, ist eine Eigenschaft der Masse, die durch die Anziehung der Masse im Gravitationsfeld der Erde (oder in einem andere Gravitationsfeld) erzeugt wird. Die schwere Masse spüren Sie als die Beschleunigung, die diese Masse durch das Gravitationsfeld erfährt. Statt der schweren Masse können Sie auch die *Gewichtskraft*

$$F_g = mg \quad (5.2)$$

angeben. Da auf dem Mond die Gravitationsbeschleunigung nur ca. 1/6 der auf der Erde beträgt (s.u.), würde sich dort allerdings für die gleiche Menge Äpfel nur eine Gewichtskraft von 1/6 derer auf der Erde ergeben. Daher könne die Astronauten auf dem Mond trotz ihres eher schweren Schutzanzuges so schön rumhüpfen.

Trägheit

Definition 20 Die Trägheit ist der Widerstand eines Körpers gegen eine Bewegungsänderung.

Ein Maß für die Trägheit ist die *träge Masse*. Sie ist unabhängig vom Ort, an dem sich der Körper befindet und unabhängig von seinem Bewegungszustand. Die träge Masse lässt sich daher durch den Vergleich von Beschleunigungen bestimmen.

Abbildung 5.1 soll Ihnen den Unterschied zwischen schwerer und träger Masse veranschaulichen. Ein Amboss im Weltraum hat keine schwere Masse (Schwerelosigkeit). Versucht jedoch ein Astronaut diesen Amboss zu bewegen, so spürt er dessen träge Masse, d.h. den Widerstand, den der Amboss einer Änderung seiner Bewegung entgegen setzt.

Im Gegensatz zum umgangssprachlichen Gebrauch bezieht sich die physikalische Trägheit auf jede Bewegungsänderung: Sie kämpfen nicht nur dann gegen die physikalische Trägheit einer Masse, wenn Sie ein Auto anschieben, sondern Sie haben mit der gleichen Trägheit zu kämpfen, wenn Sie ein einmal in Bewegung befindliches Auto abbremsen wollen. Und Sie kämpfen auch mit der Trägheit ihres Körpers, wenn Sie mit unangemessen hoher Geschwindigkeit in einer Kurve gehen und feststellen müssen, dass Ihr Körper eigentlich lieber gerade aus weiter möchte – obwohl das Brombeergestrüpp wenig einladend aussieht.

5.2 Newton'sche Axiome

Die von Newton formulierten Gesetze¹ beschreiben die Grundregeln für die Bewegung eines Körpers.

1. *Trägheitsgesetz*: Jeder Körper behält seine Geschwindigkeit nach Stärke und Richtung so lange bei, wie er nicht durch eine äußere Kraft gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern:

$$\vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{p} = \text{const} \quad \text{oder} \quad \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = 0. \quad (5.3)$$

2. *Aktionsgesetz*: Die zeitliche Änderung der Bewegungsgröße, des Impulses $\vec{p} = m\vec{v}$, ist gleich der auf den Körper wirkenden Kraft \vec{F} :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}. \quad (5.4)$$

¹Die folgenden Gesetze sind eigentlich keine Gesetze sondern müssten korrekt als Axiome bezeichnet werden, da Newton diese Gesetze im Einklang mit der Erfahrung aufgestellt hat (und sie sich auch seit Newton's Zeiten bewährt haben, ohne in Konflikt mit der Realität zu kommen), sie jedoch nicht, wie es eigentlich für ein Gesetz gefordert ist, aus fundamentaleren Definitionen ableiten konnte. In der Literatur werden beide Bezeichnungen verwendet: Newton'sche Axiome und Newton'sche Gesetze.

Um einen Körper konstanter Masse zu beschleunigen, ist eine Kraft erforderlich, die gleich dem Produkt aus Masse m und Beschleunigung \vec{a} ist:

$$\vec{F} = m\vec{a} . \quad (5.5)$$

3. *Wechselwirkungsgesetz (actio = reactio)*: Wirkt ein Körper 1 auf einen Körper 2 mit der Kraft \vec{F}_{12} , so wirkt der Körper 2 auf den Körper 1 mit der Kraft \vec{F}_{21} ; beide Kräfte haben den gleichen Betrag aber entgegengesetzte Richtung:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} . \quad (5.6)$$

5.3 Erläuterungen zu den Newton'schen Gesetzen

5.3.1 Trägheitsgesetz

Trägheit ist in der Physik als Beharrungsvermögen gemeint, d.h. ein bewegter Körper ist 'dickköpfig' und läuft und läuft und läuft (und ist nicht bereit, sich von seinem Kurs abbringen zu lassen – oder physikalischer: sich beschleunigen zu lassen). Trägheit bedeutet daher, entgegen der umgangssprachlichen Bedeutung, nicht zwingend, dass der Körper in Ruhe ist und sich nicht bewegen will. Das haben wir zwar oben im Zusammenhang mit dem Impuls schon ausführlich diskutiert – aber es kann nicht oft genug wiederholt werden, weil sich beim Begriff Trägheit der Alltagsgebrauch störend einmisch.

5.3.2 Aktionsgesetz

Aus dem Aktionsgesetz können wir einige Folgerungen ableiten. Beginnen wir dazu mit der skalaren Form, die wir aus (5.5) durch Weglassen der Vektorpfeile erhalten:

$$F = m \cdot a . \quad (5.7)$$

Aus dieser Gleichung können wir folgern:

- die Beschleunigung, die eine gegebene Kraft einem Körper erteilt, ist um so größer, je kleiner die Masse des Körpers ist. Oder: zur Beschleunigung großer Massen werden große Kräfte benötigt.
- Eine gegebene Masse wird durch eine größere Kraft stärker beschleunigt als durch eine kleinere.

Die vektorielle Form in (5.5) liefert einige zusätzliche Informationen, die die Richtung betreffen:²

- $\vec{F} \parallel \vec{p}$: wirkt die Kraft parallel zum Impuls (und damit wegen $\vec{p} = m\vec{v}$ auch parallel zur Geschwindigkeit), so ist wegen (5.5) auch die Beschleunigung parallel zur Geschwindigkeit. Dann ändert sich, wie in Abschn. 4.3 diskutiert, die Schnelligkeit, nicht aber die Richtung der Bewegung. Ausgedrückt über den Impuls bedeutet dies, dass sich der Betrag des Impulses ändert, nicht aber seine Richtung:

$$\vec{F} \parallel \vec{p} \Rightarrow |\vec{p}| \neq \text{const} \quad \text{und} \quad \vec{e}_{\vec{p}} = \text{const} . \quad (5.8)$$

Eine parallel zur Bewegung (zum Impuls) wirkende Kraft ist also gleich bedeutend mit einer gradlinig beschleunigten Bewegung.

²Klar, was auch sonst, denn Vektoren sind schließlich die formalen Hilfsmittel, die es uns erlauben, die Richtungen physikalischer Größen zu berücksichtigen.

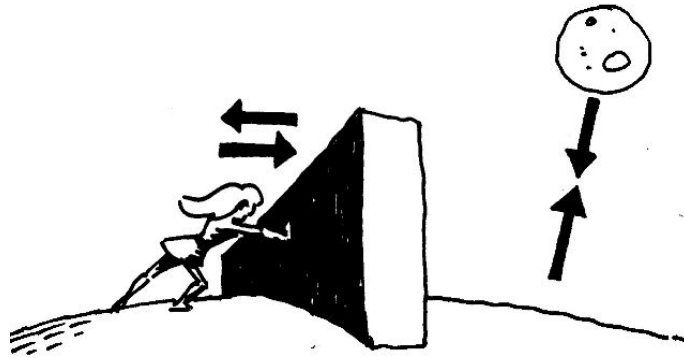


Abbildung 5.2: Erläuterung zum Wechselwirkungsgesetz [17]

- $\vec{F} \perp \vec{p}$. Wirkt die Kraft senkrecht zum Impuls (und damit wegen $\vec{p} = m\vec{v}$ auch senkrecht zur Geschwindigkeit), so ist wegen (5.5) auch die Beschleunigung senkrecht zur Geschwindigkeit. Dann ändert sich, wie in Abschn. 4.3 diskutiert, die Richtung der Bewegung, nicht aber die Schnelligkeit. Ausgedrückt über den Impuls bedeutet dies, dass sich die Richtung des Impulses ändert, nicht aber sein Betrag:

$$\vec{F} \perp \vec{p} \Rightarrow |\vec{p}| = \text{const} \quad \text{und} \quad \vec{e}_{\vec{p}} \neq \text{const} . \quad (5.9)$$

Das Aktionsgesetz in seiner skalaren Form in (5.7) lässt sich durch Multiplikation mit der Zeit t umschreiben zu

$$F = m \cdot a \quad \xrightarrow{t} \quad F \cdot t = m \cdot a \cdot t = m \cdot v = p , \quad (5.10)$$

wobei die linke Seite $F \cdot t$ als *Kraftstoß* interpretiert werden kann, d.h. als eine Kraft, die über einen begrenzten Zeitraum einwirkt. Die rechte Seite der neuen Gleichung ist der Impuls. Gleichung 5.10 beschreibt also die sich aus einer über einen Zeitraum t einwirkenden Kraft \vec{F} ergebende Änderung des Impulses \vec{p} .

Beide Gleichungen in (5.10) sind das Aktionsgesetz, die rechte Gleichung ist nur etwas umgestellt. Die linke Form verwenden wir immer dann, wenn die auf den Körper einwirkende Kraft kontinuierlich an dauert. Das ist z.B. bei der Gravitationskraft der Fall. Wirkt die Kraft nur eine begrenzte Zeit, so verwenden wir die rechte Gleichung in (5.10). Dabei zerlegen wir die Bewegung in eine beschleunigte Bewegung (wobei sich die Beschleunigung aus dem Aktionsgesetz ergibt) und eine anschließende gleichförmige Bewegung. Die rechte Formulierung mit dem Kraftstoß benötigen Sie bei schnellen Prozessen (z.B. Kompression der Bandscheiben beim Auftreffen nach einem Sprung; Wechselwirkung zwischen Tennisball und Tennisschläger).

5.3.3 Wechselwirkungsgesetz

Das Wechselwirkungsgesetz stößt sich etwas mit unserem alltäglichen Denken und wir müssen entsprechend vorsichtig sein, es korrekt anzuwenden. Das Wechselwirkungsgesetz besagt: übt ein Körper auf einen anderen Körper eine Kraft aus, so übt der letztere Körper auf den ersten eine gleich große aber entgegengesetzte Kraft aus. Kräfte zwischen zwei Körpern treten also als gleich großes aber entgegengesetzt gerichtetes Kräftepaar auf. Gleichzeitig wissen wir auch, dass eine Kraft die Änderung eines Bewegungszustands hervor rufen kann, d.h. einen Körper beschleunigen kann. Drücken Sie mit einer Kraft gegen eine Wand, so übt diese Wand nach dem Wechselwirkungsgesetz eine gleich große, entgegen gesetzt gerichtete Kraft auf Sie aus, vgl. Abb. 5.2. Die Summe der Kräfte ist Null, weder Sie noch die Wand bewegen sich. Ist Ihre Kraft jedoch größer als die Gegenkraft die die Wand ausüben kann, so werden Sie beschleunigt, es kommt zu einer Bewegung.

Einige weitere Beispiele mögen zur Illustration helfen.

Gravitationskraft

Ein Ball (Mond, Satellit, Astronaut, Affe) wird von der Erde angezogen. Nach dem Wechselwirkungsgesetz zieht der Ball (Mond, Satellit, Astronaut, Affe) die Erde mit einer entgegengesetzten gleich großen Kraft an. Das könnte eine beunruhigende Vorstellung sein, da dann bei jedem Fußballspiel die Erde durch die vom hin- und her fliegenden Ball stets veränderlich ausgeübte Anziehungskraft ganz schön ins Torkeln kommen müsste – was nicht gerade unserer Erfahrung entspricht. Aus diesem scheinbaren Widerspruch können Sie sich befreien, wenn Sie berücksichtigen, dass sich die Bewegung der Erde ja durch die vom Ball auf sie ausgeübte Beschleunigung ergibt. Oder formal: die Erde zieht den Ball an mit (s.u.)

$$F_g = m_{\text{Ball}} \cdot g . \quad (5.11)$$

Der Ball zieht die Erde mit einer gleich großen Kraft an, die zu einer Beschleunigung a der Erde führt

$$F_g = m_{\text{Erde}} \cdot a \quad (5.12)$$

bzw. nach Einsetzen von (5.11)

$$m_{\text{Ball}} \cdot g = m_{\text{Erde}} \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m_{\text{Ball}}}{m_{\text{Erde}}} g . \quad (5.13)$$

Da die Masse der Erde (ca. $6 \cdot 10^{24}$ kg) jedoch ca. 25 Größenordnungen über der des Balls liegt, muss die Beschleunigung, die die Erde erfährt, 25 Größenordnungen kleiner sein, als die, die der Ball erfährt: um die Erde damit um 1 mm zu bewegen, müssten Sie über Zehntausend Jahre warten (vgl. Aufgabe 14).

Laufen

Eine ähnliche Situation entsteht beim Laufen: um vorwärts zu kommen, müssen wir uns am Erdboden abstoßen,³ um eine Kraft mit einer nach vorne und auch leicht nach oben gerichteten Komponente zu erhalten (Ihre Muskeln müssen so synchronisiert werden, dass Sie beim Abstoß auf den Körper eine Kraft wie beim Wurf schräg nach oben ausüben, um dann entlang einer Wurfparabel möglichst weit nach vorne zu kommen). Wenn Sie diese Bewegung über dem Boden schwebend ausführen, passiert nichts. Die Bewegung entsteht erst dann, wenn Sie den Boden zum Abstoßen zur Verfügung haben, d.h. eine Kraft auf den Boden ausüben können. Und diese von ihnen ausgeübte Kraft ist nach hinten und unten gerichtet, also ihrer Bewegung genau entgegengesetzt. Was sie voran treibt, ist die vom Boden gemäß Wechselwirkungsprinzip ausgeübte Gegenkraft. Und es gilt, wie beim Ball im vorangegangenen Beispiel: auch die Erde wird dabei beschleunigt, aufgrund ihrer viel größeren Masse führt diese Beschleunigung jedoch zu keiner merklichen Änderung der Bewegung der Erde.

Ball auf einem Tisch

Betrachten Sie einen Ball auf einem Tisch. Ohne den Tisch würde auf den Ball nur die Gravitationskraft wirken und der Ball würde nicht in der Luft schweben sondern herunter fallen, da er gemäß Aktionsgesetz durch die Gravitationskraft beschleunigt wird (die Erde fällt natürlich gleichzeitig auch auf den Ball zu). Auf dem Tisch bleibt er jedoch liegen, d.h. sein Bewegungszustand ändert sich nicht. Wenn sich sein Bewegungszustand nicht ändert, heißt das, dass auf den Ball keine Kraft wirkt. Diese Aussage scheint im Widerspruch zur auf den Ball wirkenden Gravitationskraft zu stehen. Der Widerspruch ist jedoch nur ein scheinbarer, da wir für die Anwendung des Trägheitsgesetzes alle auf einen Körper wirkenden Kräfte zu einer Gesamtkraft zusammen fassen müssen (zur Zusammenfassung siehe die Aufgabe mit dem Treideln eines Salzkahns). Wenn diese Gesamtkraft verschwindet, verbleibt der Körper in seinem momentanen Bewegungszustand. Für den Ball auf dem Tisch bedeutet dies: wir

³Dies ist ein Fall, wo wir korrekterweise mit Kraftstößen und nicht mit kontinuierlich wirkenden Kräften argumentieren könnten.

brauchen noch eine Kraft, die der auf den Ball wirkenden Gravitationskraft entgegen gesetzt ist und genauso groß ist. Da der Ball eine Kraft (entsprechend seiner Gewichtskraft) auf den Tisch ausübt, muss der Tisch nach dem Wechselwirkungsgesetz genau diese Kraft, nur eben in entgegen gesetzter Richtung, auf den Ball ausüben. Damit ist die Summe der auf den Ball wirkenden Kräfte Null und nach Trägheitsgesetz bleibt der Ball in Ruhe.

Anmerkung: diese Betrachtung ist sehr oberflächlich, da es eigentlich nicht der Tisch ist, der die Gegenkraft ausübt sondern wieder die Erde. Dies sollte Ihnen beim Beispiel der Spinne am Faden klar werden.

Spinne im Netz

Umgekehrte Geometrie: eine Spinne hängt an ihrem Faden von der Decke. In diesem Fall wirkt auf die Spinne die Gravitationskraft. Die Spinne übt, da sie ja an ihrem Faden hängt, eine entsprechende Kraft auf diesen aus. Der Faden übt nach Wechselwirkungsprinzip eine Gegenkraft auf die Spinne aus, so dass die Gesamtkraft auf die Spinne Null ist und sie nach Trägheitsgesetz in Ruhe verbleibt.

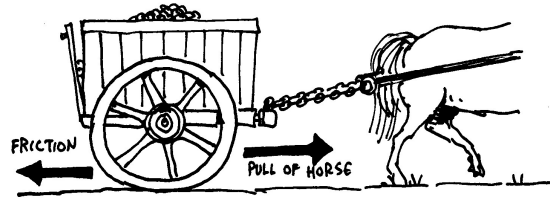
Komplikation: ein Saubermensch zerstört die Verbindung zwischen Faden und Decke. Dann stürzen Spinne und Faden ab, d.h. die Gravitationskraft wirkt auf Spinne und Faden und beschleunigt beide nach unten. Das ist kein Widerspruch zur voran gegangenen Betrachtung, da wir dort von der Annahme ausgegangen sind, dass der Faden eine Gegenkraft ausüben kann und nicht durch die Gravitationskraft beschleunigt wird. Das bedeutet, dass wir die Betrachtung ausdehnen müssen: auf das System Faden/Spinne wirkt die Gravitationskraft. Da der Faden sicher an der Zimmerdecke verankert ist, übt das System Spinne/Faden eine Kraft auf die Zimmerdecke aus. Nach Wechselwirkungsprinzip übt die Zimmerdecke eine entgegen gesetzte gleich große Kraft auf das System Spinne/Faden aus, d.h. die Gesamtkraft auf das System Spinne/Faden ist Null und beide bleiben in Ruhe hängen. Wird dieses Kräftegleichgewicht durch Saubermensch gestört, stürzen Spinne und Faden ab.

Erweiterung (vgl. Ball auf Tisch): mit der erweiterten Komplikation haben wir die Gegenkraft vom Faden auf die Zimmerdecke verlagert. Würde dieser gerade aus irgendeinem Grunde einstürzen, so würde auch das System Spinne/Faden abstürzen. Also müssen wir die Zimmerdecke auf den Wände abstützen: das System Spinne/Faden/Zimmerdecke übt dann aufgrund der Erdanziehung eine Kraft auf die Wände aus, der diese eine gleich große Kraft entgegen setzen. Aber auch die Wände brauchen eine Unterstützung, sonst würde das System Spinne/Faden/Zimmerdecke/Wände abstürzen. Dieses System übt eine Kraft auf den Erdboden aus, der seinerseits eine gleich große entgegengesetzte Kraft ausübt. Insgesamt findet das Wechselspiel der Kräfte zwischen Spinne und Erde statt – Faden, Zimmerdecke und Wände dienen nur dazu, diese Kräfte statisch weiter zu leiten.

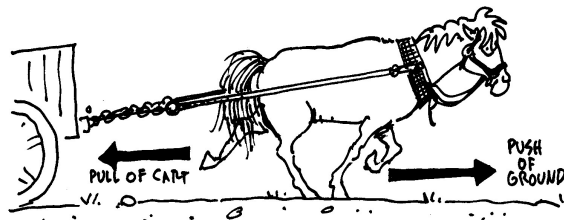
Pferd und Wagen

Bei der Anwendung des Wechselwirkungsgesetzes müssen Sie bei der Identifikation der wechselwirkenden Körper aufpassen. Betrachten Sie dazu ein Pferd, das einen Karren zieht, vgl. 5.3. Welche Kräfte zwischen welchen Objekten sind für die Bewegung relevant? Das Pferd übt sicherlich eine Kraft auf den Karren aus. Nach Wechselwirkungsgesetz übt der Karren eine gleich große, entgegen gerichtete Kraft auf das Pferd aus. Das ist die gleiche Situation wie die gegen die Mauer drückende Person im linken Teil von Abb. 5.2: Pferd und Karren bewegen sich nicht, ebenso wie sich Mauer und Person nicht bewegen. Oder korrekter: sie bewegen sich nicht relativ zu einander. Damit das Pferd den Karren in Bewegung versetzen kann, muss es sich nicht vom Karren abstoßen sondern vom Boden, entsprechend der oben diskutierten Situation beim Laufen. Wir müssen um die Bewegung des Systems Pferd/Karren zu beschreiben also die Wechselwirkung zwischen diesem System und der Erde betrachten: das Pferd übt eine Kraft auf den Boden aus, der eine entgegen gerichtete Kraft auf das Pferd ausübt. Dadurch wird das Pferd beschleunigt – und die Erde in die entgegen gesetzte Richtung ebenfalls.

AND ANOTHER EXAMPLE: HOW CAN A HORSE PULL A CART, IF THE CART PULLS BACK WITH AN EQUAL FORCE ?? TO ANALYZE THIS, WE HAVE TO LOOK AT EACH OBJECT ALONE AND THE FORCES ACTING ON IT.



WHAT FORCES ACT ON THE CART? THE HORSE PULLS IT FORWARD, AND THERE IS A BACKWARD FORCE FROM THE GROUND: FRICTION. IF THE HORSE'S PULL EXCEEDS THE FRICTION, THE CART WILL ACCELERATE.



NOW THE HORSE: THE CART PULLS IT BACKWARD, BY NEWTON'S THIRD LAW. WHAT PUSHES THE HORSE FORWARD? IT'S THE GROUND!! THE HORSE PUSHES BACKWARD ON THE GROUND, SO THE GROUND PUSHES FORWARD WITH AN EQUAL FORCE. IF THE HORSE CAN PUSH BACK AGAINST THE GROUND WITH A FORCE GREATER THAN THE CART'S RESISTING FORCE, THEN THE HORSE WILL ACCELERATE!

Abbildung 5.3: Wechselwirkungsprinzip: Pferd und Wagen [17]

5.4 Aktionsprinzip als Bewegungsgleichung

Das Aktionsprinzip ist ein universelles Gesetz, das die Beschreibung aller Bewegungen erlaubt. Betrachten wir dazu das Aktionsgesetz (unter der Annahme einer konstanten Masse) noch einmal etwas genauer:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}. \quad (5.14)$$

Die verschiedenen Ausdrücke hinter dem ganz linken Gleichheitszeichen können alle dazu verwendet werden, die Änderung einer Bewegung zu beschreiben: als Änderung $d\vec{p}/dt$ des Impulses, als Änderung $d\vec{v}/dt$ der Geschwindigkeit oder als Beschleunigung \vec{a} . Auf der linken Seite, im Term \vec{F} , stecken die Kräfte als Ursachen für die Änderung der Bewegung. Hier können, je nach Art der Bewegung, die auftretenden Kräfte eingesetzt werden, auch muss es sich dabei nicht um eine einzelne Kraft handeln sondern es kann links eine Summe von Kräften stehen, die zu der Gesamtkraft \vec{F} zusammengefasst wird:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (5.15)$$

Gleichung (5.14) wird als *Bewegungsgleichung* bezeichnet, da mit ihrer Hilfe die Bewegung vollständig beschrieben werden kann. So können Sie z.B. (5.14) in die Form

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (5.16)$$

bringen. Damit haben Sie die Beschleunigung als Kraft pro Masse definiert. Diese Beschleunigung können Sie jetzt verwenden, um die Bewegung des Körpers durch das Weg-Zeit-Gesetz und das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz aus Kap. 4 zu beschreiben.

5.5 Beispiele für Kräfte

Um die Bewegungsgleichung (5.14) anwenden zu können, müssen wir uns zuerst die Ausdrücke für verschiedene Kräfte verschaffen.

5.5.1 Gewichtskraft

Allgegenwärtig ist die Gewichtskraft F_g , d.h. die Kraft, mit der ein Körper in Erdbodennähe von der Erde angezogen wird. Sie definieren wir nicht über die schwere Masse sondern, da wir die Gravitationsbeschleunigung g verwenden, formal über die träge Masse:

$$F_g = m \cdot g. \quad (5.17)$$

Betrachten wir Kräfte als vektorielle Größen, so wäre die korrekte Definition für die Gewichtskraft

$$\vec{F}_g = m \cdot \vec{g} \quad \text{mit} \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}, \quad (5.18)$$

wobei der Vektor der Gravitationsbeschleunigung normalerweise so gelegt ist, dass er senkrecht nach unten weist, entgegen der z -Achse eines kartesischen Koordinatensystems.

5.5.2 Federkraft – Hooke'sches Gesetz

Die Gewichtskraft kann mit einer Federwaage bzw. einem Kraftmesser bestimmt werden.⁴ Eine ideale Feder ist ein elastisches System, zu dessen Auslenkung oder Kompression eine Kraft benötigt wird. Wirkt diese Kraft nicht mehr auf die Feder ein, so kehrt die Feder in ihre Ruhelage zurück. Bei einer idealen Feder nimmt die Auslenkung x linear mit zunehmender Kraft F_{Feder} zu. Die Auslenkung x nimmt ferner mit zunehmender Federkonstante k linear ab, d.h. der Zusammenhang zwischen der auf eine Feder wirkenden Kraft F_{Feder} und der Auslenkung x lässt sich durch das Hooke'sche Gesetz beschreiben in der Form

$$F_{\text{Feder}} = -k \cdot x \quad (5.19)$$

mit k [N/m] als der die Feder charakterisierenden Federkonstanten. Diese gibt an, welche Kraft benötigt wird, um die Feder eine Längeneinheit auszulenken. Das negative Vorzeichen gibt an, dass es sich um eine rücktreibende Kraft handelt, die der Auslenkung entgegengesetzt ist: wird die Feder komprimiert, so wirkt die Kraft entgegen der Kompression und umgekehrt.

Setzen Sie die Federkraft (5.19) in die Bewegungsgleichung (5.14) ein, so ergibt sich eine mathematisch schwierige Situation. Die linke Seite der Gleichung enthält eine vom Ort abhängige Kraft $-kx$. Wenn wir eine Bewegung betrachten (und das wollen wir, sonst bräuchten wir diesen Ausdruck gar nicht in die Bewegungsgleichung einzusetzen), so ist die Auslenkung x eine Funktion der Zeit, d.h. auch die Kraft ist eine Funktion der Zeit: $F(t) = -kx(t)$. Auf der rechten Seite der Bewegungsgleichung steht die Änderung der Bewegung, z.B. ausgedrückt durch die Ableitung dv/dt der Geschwindigkeit nach der Zeit:

$$-k \cdot x(t) = m \frac{dv}{dt}. \quad (5.20)$$

⁴Die Bezeichnung Federwaage ist eigentlich nicht korrekt, da eine Waage zur Bestimmung einer Masse verwendet wird. Eine Federwaage ist jedoch nicht in der Lage, eine Masse zu messen sondern nur die durch die Masse auf die Feder ausgeübte Kraft. Eine Federwaage gibt damit die schwere Masse und würde auf dem Mond zu einer anderen Masse eines Körpers führen als auf der Erde. Die Bezeichnung Kraftmesser ist daher die korrekte, auch wenn Sie gelegentlich Federwaagen antreffen können. Bei diesen wird die gemessene Kraft durch g geteilt als Masse angezeigt.

Diese Gleichung können wir nicht einfach lösen, da die Bewegung auf der linken wie auf der rechten Seite auftritt: links explizit als Ort in Abhängigkeit von der Zeit, rechts indirekt dadurch, dass die Geschwindigkeit die Ableitung des Ortes nach der Zeit ist: $v = dx/dt$. Diesen Zusammenhang können wir verwenden, um (5.20) in einer anderen Form zu schreiben:

$$-k \cdot x(t) = m \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad (5.21)$$

oder zusammengefasst

$$-\omega^2 x(t) = \frac{d^2x}{dt^2} \quad (5.22)$$

mit $\omega^2 = k/m$. Jetzt haben wir auf beiden Seiten die die Bewegung beschreibende Funktion $x(t)$ stehen: auf der linken Seite explizit, auf der rechten Seite als zweite Ableitung der Funktion nach der Zeit. Dieser Typ von Gleichung ist eine *Differentialgleichung*. Eine Differentialgleichung ist eine Bestimmungsgleichung für eine Funktion (in diesem Fall $x(t)$), in der die Funktion selbst und Ableitungen dieser Funktion auftreten. Gleichung (5.22) ist eine *Differentialgleichung zweiter Ordnung*, da in ihr die zweite Ableitung der gesuchten Funktion auftritt.⁵

Verbal besagt (5.22), dass wir eine Funktion $x(t)$ suchen, deren zweite Ableitung d^2x/dt^2 die Funktion $x(t)$ selbst multipliziert mit einem Faktor $-k/m = -\omega^2$ ist. Funktionen, deren zweite Ableitung wieder die Funktion selbst sind, sind relativ selten; die Ihnen jedoch auch aus der Schule bekannten Beispiele sind die Winkelfunktionen Sinus und Kosinus:

$$x = x_o \cdot \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = x_o \cdot \omega \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -x_o \cdot \omega^2 \sin \omega t \quad (5.24)$$

und

$$x = x_o \cdot \cos \omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = -x_o \cdot \omega \sin \omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -x_o \cdot \omega^2 \cos \omega t, \quad (5.25)$$

wobei sich der Vorfaktor ω in den einzelnen Ableitungen jeweils aus der inneren Ableitung der Winkelfunktion ergibt. Betrachten wir nur den Sinus. Dann erkennen wir, dass die letzte Gleichung in der Zeile genau unserer Differentialgleichung entspricht, d.h. die Funktion $x = x_o \cdot \sin \omega t$ ist eine Lösung der Differentialgleichung.

⁵Differentialgleichungen treten u.a. immer dann auf, wenn man die Entwicklung eines Systems beschreiben will. Einfache Beispiele sind das exponentielle Wachstum in einer Bakterienpopulation oder der radioaktive Zerfall, vgl. Abschn. ???. In beiden Fällen handelt es sich um gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung. Dabei bedeutet 'gewöhnlich', dass wir eine Funktion in Abhängigkeit von einer Variablen suchen, d.h. z.B. die Zahl der Bakterien in Abhängigkeit von der Zeit. Die Differentialgleichung ist erster Ordnung, wenn Sie nur einen Zusammenhang zwischen der gesuchten Funktion und ihrer ersten Ableitung beschreibt und keine höheren Ableitungen enthält. Für das Wachstum einer Bakterienpopulation N erhalten wir als Differentialgleichung

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N \quad (5.23)$$

mit $N(t)$ als der gesuchten Funktion und λ als der Wachstumsrate. In der Biologie treten Differentialgleichungen z.B. in der Populationsdynamik oder in der Beschreibung von Ökosystemen auf. Diese Differentialgleichungen suchen nach Funktionen, die von mehreren Variablen abhängen können. So hängt z.B. das Wachstum einer Bakterienpopulation nicht nur von der Teilungsrate der Bakterien ab sondern von zusätzlichen Variablen wie dem Nährstoffangebot, konkurrierenden Bakterienpopulationen und möglichen schädigenden Einflüssen. Betrachten wir statt Bakterien Hasen, so lässt sich ebenfalls eine Differentialgleichung für die Hasenpopulation aufstellen. Eine Größe, die die Zahl der Hasen beeinflusst, ist die Zahl der Füchse: viele Füchse jagen auch viele Hasen, d.h. sie reduzieren die Population. Die Füchse müssen also in der Differentialgleichung für die Hasen auftreten. Allerdings ist die Zahl der Füchse nicht konstant. Gibt es viele Hasen, so haben die Füchse reichlich Nahrung und vermehren sich entsprechend schneller. Also benötigen wir auch eine Differentialgleichung, die die Entwicklung der Fuchspopulation beschreibt – und in dieser Differentialgleichung muss die Hasenpopulation als 'Nahrungsquelle' auftreten. Damit haben wir zwei gekoppelte Differentialgleichungen, die die Entwicklung der Hasen- und der Fuchspopulation beschreiben und die gemeinsam gelöst werden müssen. Differentialgleichungen werden also auch benötigt um Jäger–Beute–Modelle zu beschreiben.

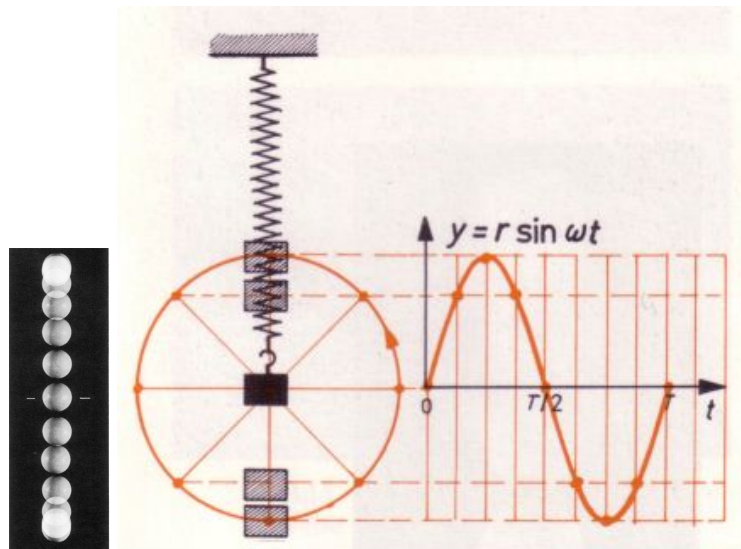


Abbildung 5.4: Federpendel: links Stroboskopaufnahme, rechts Darstellung als Projektion einer Kreisbewegung [44]

Für die Geschwindigkeit der Masse erhalten wir aus der Definition der Geschwindigkeit (4.2) für die Geschwindigkeit

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega \cdot x_o \cdot \cos \omega t \quad \text{bzw.} \quad v = \frac{dx}{dt} = -\omega \cdot x_o \cdot \sin \omega t . \quad (5.26)$$

Die formale Argumentation mag Ihnen etwas wie Hexen-Ein-mal-Eins vorkommen. Daher sollten wir versuchen, uns die Lösung physikalisch zu veranschaulichen. Beginnen wir mit der konkreten Situation: eine Masse wird an einer Feder ausgelenkt (halten Sie die Masse bitte einen Moment in dieser ausgelenkten Lage fest). Jetzt wirkt eine rücktreibende Kraft $-kx$ auf die Masse, die diese wieder in die Ruhelage der Feder zurück ziehen will. Lassen Sie die Masse jetzt los, so wird sie durch diese Kraft beschleunigt. Dabei nimmt die Auslenkung zwar ab, es bleibt jedoch eine beschleunigende Kraft so lange, wie die Feder aus ihrer Ruhelage ausgelenkt ist. Die Geschwindigkeit der Masse nimmt also zu, bis sie die Ruhelage der Feder erreicht hat. Dann wirkt zwar keine Kraft mehr auf die Masse (die Auslenkung verschwindet ja), aufgrund ihrer Trägheit bewegt sich die Masse jedoch weiter und beginnt, die Feder zu komprimieren. Dadurch entsteht eine der Bewegung entgegengesetzte (eben rücktreibende) Federkraft, die die Masse abbremst. Dieser Vorgang setzt sich fort bis die Masse abgebremst und die Feder maximal komprimiert ist. Dann haben wir die gleiche Situation wie zu Beginn der Bewegung: die Masse ist in Ruhe und die rücktreibende Kraft der Feder ist maximal. Damit ergibt sich wieder eine Beschleunigung der Masse in Richtung auf die Ruhelage, die beschleunigende Kraft verschwindet zwar in der Ruhelage jedoch schießt die Masse aufgrund ihrer Trägheit über die Ruhelage hinaus und der Vorgang setzt sich fort. Aus dieser Situation, eine an einer Feder befestigte Masse wird ausgelenkt, hat sich eine Schwingung dieser Masse um die Ruhelage ergeben. Eine Schwingung ist ein periodischer Vorgang und lässt sich mathematisch durch eine periodische Funktion beschreiben, eben den Sinus oder den Kosinus. Welche der beiden Funktionen wir verwenden, hängt davon ab, wann wir anfangen, uns die Bewegung anzusehen. Der Kosinus wäre eine angemessene Beschreibung für die hier dargestellte Situation: wir beginnen mit der ausgelenkten Masse. Den Sinus müssten wir verwenden, wenn die Schwingung (bzw. unsere Beobachtung derselben) gerade mit einer von Null verschiedenen Geschwindigkeit in der Ruhelage ist.

Abbildung 5.4 zeigt im linken Teil eine Stroboskopaufnahme einer an einer Feder schwingenden Masse. Aus dem unterschiedlichen Abstand aufeinander folgender Punkte erkennt man, dass die Bewegung nicht mit gleichförmiger Geschwindigkeit erfolgt. Stattdessen ist die

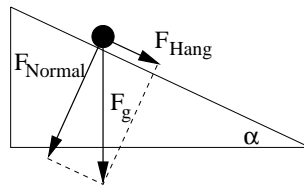


Abbildung 5.5: Zerlegung der Gewichtskraft in eine Hangabtriebs- und eine Normalkraft

Geschwindigkeit in der Nähe der Nulllage maximal und wird an den Umkehrpunkten der Bewegung, d.h. den Punkten maximaler Auslenkung, Null. Mit dieser Information können wir die Größe ω anschaulich interpretieren. Dazu gehen wir von der Lösung (5.24) aus. Zur Zeit $t = 0$ erhalten wir $x_{t=0} = x_o \cdot \sin 0 = 0$, d.h. die Masse ist nicht ausgelenkt sondern befindet sich in der Ruhelage. An der gleichen Stelle gilt wegen (5.26) für die Geschwindigkeit $v_{t=0} = v_o \cdot \cos 0 = v_o$, d.h. die Geschwindigkeit nimmt den maximalen Wert an. Da sowohl Sinus als auch Kosinus periodische Funktionen sind, werden die gleichen Werte jeweils dann wieder angenommen, wenn ωt ein Vielfaches von π ist. Ist $\omega t = \pi$, so erhalten wir für den Ort $x_{\omega t=\pi} = x_o \cdot \sin \pi = 0$ und für die Geschwindigkeit $v_{t=\omega t=\pi} = v_o \cdot \cos \pi = -v_o$. Der Körper befindet sich für $\omega t = \pi$ wieder in der Ruhelage, bewegt sich jetzt aber in die entgegengesetzte Richtung. Für $\omega t = 2\pi$ erhalten wir für den Ort $x_{\omega t=2\pi} = x_o \cdot \sin 2\pi = 0$ und für die Geschwindigkeit $v_{\omega t=2\pi} = v_o \cdot \cos 2\pi = v_o$; der Körper befindet sich wieder in der Ruhelage und mit der Geschwindigkeit in die gleiche Richtung wie am Anfang der Bewegung. Wie können daher eine Schwingungsdauer T definieren mit $\omega T = 2\pi$ oder

$$T = \frac{2\pi}{\omega} . \quad (5.27)$$

Berücksichtigen wir die oben eingeführte Abkürzung $\omega = \sqrt{k/m}$, so erhalten wir für die Schwingungsdauer des Federpendels

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} , \quad (5.28)$$

d.h. die Schwingungsdauer eines Federpendels nimmt mit zunehmender Masse m und mit abnehmender Federkonstante k zu und sie ist unabhängig von der maximalen Auslenkung x_o der Masse. Statt der Schwingungsdauer T kann auch die Frequenz als Zahl der Schwingungen pro Zeiteinheit verwendet werden:

$$f = \frac{1}{T} [\text{Hz}] . \quad (5.29)$$

Die Einheit der Frequenz ist 1/s oder abgekürzt Hz (sprich Hertz).

Gleichung (5.22) wird auch als Schwingungsgleichung bezeichnet. Wir werden vor der Behandlung der Optik noch genauer auf Schwingungen und Wellen eingehen und dabei auf die hier durchgeführten Überlegungen zurück greifen.

5.5.3 Hangabtriebskraft

Betrachten wir einen Körper auf einer Rampe. Dann wirkt auf ihn die Gravitationskraft. Die Rampe verhindert, dass der Körper im freien Fall senkrecht nach unten fallen kann. Stattdessen rollt er die Rampe hinab. Dabei wird er jedoch nicht mit der Gravitationsbeschleunigung g beschleunigt, sondern nur mit der Komponente der Gewichtskraft, die parallel zur Rampe wirkt. Diese Hangabtriebskraft F_{Hang} ist gegeben zu

$$F_{\text{Hang}} = F_g \cdot \sin \alpha = mg \cdot \sin \alpha . \quad (5.30)$$

Abbildung 5.5 zeigt die Zerlegung der Gravitationskraft F_g in eine Hangabtriebskraft F_{Hang} und eine Normalkraft F_{Normal} .

Die Hangabtriebskraft ist um so größer, je größer die Masse m des Körpers ist und je größer die Neigung α des Hanges. Die Grenzfälle für die Neigung sind $\alpha = 0^\circ$, d.h. die Horizontale: dann verschwindet die Hangabtriebskraft und die Normalkraft ist mit der Gravitationskraft identisch (und bewirkt keine Bewegung). Im anderen Grenzfall $\alpha = 90^\circ$ (Vertikale) verschwindet die Normalkraft und die Hangabtriebskraft ist mit der Gewichtskraft identisch: der Körper bewegt sich im freien Fall.

Beschleunigen wir eine Masse durch die Hangabtriebskraft, so lässt sich die Bewegungsgleichung schreiben als

$$mg \sin \alpha = ma_{\text{Hang}} , \quad (5.31)$$

d.h. wir erhalten für die Beschleunigung, die die Masse aufgrund der auf sie wirkenden Gewichtskraft an einem Hang mit der Neigung α erfährt

$$a_{\text{Hang}} = g \cdot \sin \alpha . \quad (5.32)$$

5.5.4 Normalkraft

Die Normalkraft ist die Komponente der Kraft, die senkrecht zur Auflagefläche wirkt. Sie ist gegeben als

$$F_{\text{Normal}} = F_g \cdot \cos \alpha = mg \cdot \cos \alpha . \quad (5.33)$$

Die Normalkraft ist um so größer, je größer die Masse m ist und je geringer die Neigung α des Hanges ist.

Während die Hangabtriebskraft zur Beschreibung der Bewegung benötigt wird, kann die Normalkraft nicht zu einer Bewegung führen, da sie ja senkrecht auf die Unterlage gerichtet ist. Daher ist es auch nicht sinnvoll, wie bei der Hangabtriebskraft eine Beschleunigung einzuführen.

Die Normalkraft ist jedoch notwendig zur Beschreibung der Reibung, d.h. wenn wir statt der Kugel in der obigen Abbildung einen Klotz verwenden, könnten wir mit Hilfe der Normalkraft die Reibung zwischen Klotz und Rampe bestimmen und überprüfen, ob diese Reibungskraft größer ist als die Hangabtriebskraft (dann bliebe der Klotz liegen) oder kleiner (dann würde er die Rampe hinab gleiten).⁶

5.5.5 Haft- und Gleitreibung



Reibungskräfte sind unterschiedlicher Natur. Die molekularen Kräfte zwischen der Rampe und dem Klotz führen zu einer Haftreibung, die einmal überwunden werden muss, bevor sich der Klotz überhaupt in Bewegung setzen kann. Die Haftreibung lässt sich schreiben als

$$F_{\text{Haft}} = \mu_{\text{Haft}} F_{\text{Normal}} \quad (5.34)$$

mit μ_{Haft} als einem dimensionslosen Haftreibungskoeffizienten, der von den Eigenschaften der beteiligten Materialien abhängt. Eine Anwendung für die Haftreibung findet sich im Reibungsklettern (Abbildung aus [24]).

Ebenfalls von den Eigenschaften der beide Körperoberflächen hängt die Gleitreibung ab. Sie ist gegeben durch

$$F_{\text{Gleitr}} = \mu_{\text{Gleitr}} F_{\text{Normal}} \quad (5.35)$$

mit μ_{Gleitr} als dimensionslosem Gleitreibungskoeffizienten.

⁶Mit diesem scheinbar so theoretischen Problem kämpfen Sie bei Eisregen an jeder Einfahrt. Normalerweise macht Ihnen die leichte seitliche Steigung im Gehweg nichts aus, da die Reibung zwischen den Schuhen und den Gehwegplatten groß genug ist, um Sie gegen die Hangabtriebskraft auf geradem Kurs zu halten. Bei Eisregen dagegen ist die Haftreibung zwischen der Eisfläche und der Schuhsohle geringer als die Hangabtriebskraft – was zu einer entsprechenden Ablenkung der Bewegung führt.

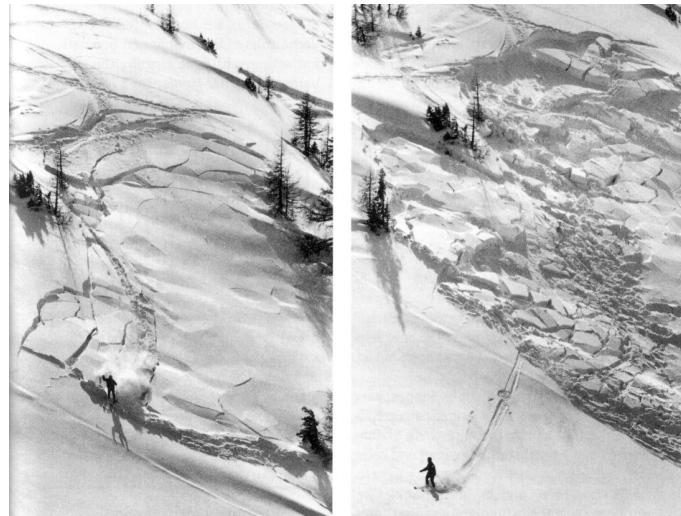


Abbildung 5.6: Skifahrer-Lawine [39]

Beide Reibungskräfte nehmen zu mit zunehmender Normalkraft (d.h. bei gleicher Hangneigung mit zunehmender Masse) sowie mit zunehmendem Reibungskoeffizienten.

In der Regel ist der Haftreibungskoeffizient größer als der Gleitreibungskoeffizient:

$$\mu_{\text{Haft}} > \mu_{\text{Gleit}} . \quad (5.36)$$

Dieser Zusammenhang lässt die Tatsache, dass eine Schneebrett-Lawine durch eine kleine Ursache (z.B. ein über das Schneefeld laufendes Tier oder ein Skifahrer wie in nebenstehender Abbildung aus Munter, Werner, 2003, Pohl & Schellhammer) ausgelöst werden kann. Zwar handelt es sich bei Schnee und Eis nicht um feste Körper, jedoch bilden sich bei Schnee Schichten aus: jeder neue Niederschlag lagert sich auf dem vorhandenen ab, seine Oberfläche wird jedoch durch Sonneneinstrahlung, Anschmelzen und anschließendes Gefrieren modifiziert. Dadurch bilden sich Trennflächen zwischen Schichten unterschiedlichen Niederschlags. Die Eigenschaften der Schichten bestimmen den Haftreibungskoeffizienten zwischen ihnen, die Neigung des Hanges bestimmt dann für diesen Haftreibungskoeffizienten ob der Schnee abgleitet oder nicht. Lawinengefahr besteht dann, wenn die Hangneigung derart ist, dass der Haftreibungskoeffizient groß genug ist, um den Schnee in der Ruhelage zu halten, der Gleitreibungskoeffizient jedoch so klein ist, dass der Schnee, einmal in Bewegung gekommen, abgleiten kann. Wird dann durch eine kleine Störung etwas Schnee hangabwärts bewegt, so gleitet dieser und die Reibung ist nicht groß genug, ihn wieder abzubremsen – der Schnee kann den gesamten Hang hinab gleiten. Dabei stört er das empfindliche Gleichgewicht der umgebenden ‘Schneepakete’, so dass auch diese Abgleiten.⁷

Der formale Ansatz (5.35) für die Gleitreibung ist sehr einfach, da die Kraft nicht vom Ort oder der Geschwindigkeit abhängt. Setzt man diesen Ansatz in die Bewegungsgleichung (5.14) ein, so kann diese einfach durch Integration gelöst werden:

$$\begin{aligned} m \cdot a = F &\Rightarrow m \cdot a = m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot \mu_{\text{Gleit}} \\ &\Rightarrow a = \mu_{\text{Gleit}} \cdot g \cos \alpha . \end{aligned} \quad (5.37)$$

In der Ebene ($\alpha = 0$) ergibt sich dann für die durch die Gleitreibung ausgeübte Beschleunigung

$$a_{\text{Gleit}} = \mu_{\text{Gleit}} \cdot g . \quad (5.38)$$

⁷Diese Erklärung für eine Lawine ist sehr einfach. Sie lässt sich auf einige Lawinen anwenden, für die Auslösung anderer Lawinentypen dagegen ist die Spannung in der Schneedecke entscheidend: ihre Auslösung lässt sich eher mit einem an einem Faden auf einer Rampe liegenden Klotz vergleichen. Der Ski- oder Snowboardfahrer durchtrennt diesen Faden und der Klotz rutscht ab. Für nähere Informationen siehe z.B. <http://wa.slf.ch/index.php?id=118>, <http://geo4.uibk.ac.at/users/schmidt/diparb/lawinen/klasslaw.html> oder <http://www.obergailtal.at/PDF/Lawinenkunde.pdf>

Haftreibung Gleitreibung Rollreibung	Stokes'sche Reibung	Newton'sche Reibung
$F_R = \mu F_{\text{Normal}}$ mit F_r Reibungskraft μ Reibungskoeffizient F_{Normal} Normalkraft	$F_R = -\beta v$ mit F_R Reibungskraft β Zähigkeitskoeffizient v Geschwindigkeit	$F_R = -c_w' v^2$ mit F_R Reibungskraft c_w' Widerstandskoeffizient v Geschwindigkeit
Rauigkeit der Oberfläche	laminare Strömung	turbulente Strömung

Tabelle 5.1: Verschiedene Formen der Reibung

5.5.6 Andere Reibungsansätze

In (5.35) sind wir davon ausgegangen, dass die Reibung unabhängig von den Eigenschaften des Körpers wie Masse, Geschwindigkeit oder Geometrie, ist und nur von dem Reibungskoeffizienten μ_{Gleit} zwischen der Unterlage und der Auflagefläche des Körpers abhängt. Dieser Ansatz ist praktisch, wenn es darum geht zu beschreiben, wie sich die Reibung an der Kontaktfläche zwischen Körper und Unterlage in Ruhe und bei Bewegung auswirkt. Bewegt sich der Körper in einem kontinuierlichen Medium, z.B. im Wasser, so tritt Reibung zwischen den Molekülen dieses Mediums und der Oberfläche des Körpers auf. Um die durch diese Reibung bewirkten abbremsenden Kräfte auf den Körper genauer quantifizieren zu können, gibt es zwei Ansätze zur Beschreibung der Reibung auf bewegte Körper:

- die Stokes'sche Reibung: sie ist anwendbar auf kleine Körper, die sich langsam bewegen. Die Reibungskraft hängt linear von der Geschwindigkeit v des Körpers ab, in den Reibungskoeffizienten β geht die Geometrie des Körpers ein. Stokes'sche Reibung wird auch als Flüssigkeitsreibung oder innere Reibung bezeichnet. Bei der Stokes'schen Reibung wird der Körper umströmt ohne dass sich Wirbel bilden.
- die Newton'sche Reibung, auch als Strömungswiderstand beschreibbar: sie ist anwendbar, wenn sie ausgedehnte Körper schnell in einem kontinuierlichen Medium bewegen. Die Reibungskraft hängt ab vom Quadrat der Geschwindigkeit und von einem Widerstandsbeiwert, in den die Geometrie des Körpers eingeht. Im Gegensatz zur Stokes'schen Reibung bilden sich hier hinter dem umströmten Körper Wirbel aus.

Die Unterschiede zwischen diesen beiden Reibungsansätzen werden in Abschn. ?? deutlicher werden; die insgesamt in diesem Kapitel besprochenen Reibungsansätze sind in Tab. 5.1 zusammengefasst.

Stokes'sche Reibung

Der Ansatz von Stokes verwendet werden, um die Bewegung eines Körpers zu beschreiben, der sich nicht zu schnell durch ein viskoses Medium (Gas oder Flüssigkeit) bewegt. Für diese

Stokes'sche Reibungskraft gilt in

$$\vec{F}_{\text{Stokes}} = -\beta \vec{v} \quad \text{mit} \quad \beta \left[\frac{\text{N}}{\text{m/s}} \right] = \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right] \quad (5.39)$$

mit β als einem von den Eigenschaften des Mediums und der Geometrie des bewegten Körpers abhängigen Koeffizienten. Das Minuszeichen zeigt, wie auch bei der Federkraft, an, dass die Reibungskraft der Bewegung entgegengesetzt ist, also als verzögernde Kraft wirkt. Bei der eindimensionalen Bewegung können Sie die Vektorpfeile wieder weg lassen. Das Stokes'sche Reibungsgesetz findet seine Anwendung z.B. im Kugelfallviskosimeter mit dem sich die Viskosität von Flüssigkeiten bestimmen lässt, vgl. Abschn. 10.7.2.

Einsetzen der Reibungskraft (5.39) in die Bewegungsgleichung (5.14) führt auf

$$-\beta v = m \frac{dv}{dt} \quad (5.40)$$

oder umgestellt

$$v(t) = -\frac{\beta}{m} \frac{dv}{dt}. \quad (5.41)$$

Hierbei handelt es sich um eine Gleichung, in der die die Bewegung beschreibende Größe $v(t)$ und ihre Ableitung dv/dt vorkommen, also wieder um eine Differentialgleichung. In diesem Fall ist es eine Differentialgleichung erster Ordnung, da nur die erste Ableitung auftritt. Verbal besagt diese Differentialgleichung, dass wir eine Funktion $v(t)$ suchen, deren Ableitung bis auf einen Vorfaktor $-m/\beta = \lambda$ gleich der Funktion ist. Aus der Schulmathematik kennen Sie eine Funktion, deren Ableitung wieder auf die Funktion führt, das ist die Exponentialfunktion:

$$v = v_o \cdot e^{\lambda t} \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = v_o \cdot \lambda e^{\lambda t}, \quad (5.42)$$

wobei sich das λ vor der Exponentialfunktion im rechten Teil aus der inneren Ableitung ergibt. Einsetzen von (5.42) in (5.40) zeigt, dass (5.42) Lösung der Bewegungsgleichung ist. Für die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit gilt also

$$v(t) = v_o \cdot e^{-\frac{\beta}{m} t}, \quad (5.43)$$

wobei v_o die Anfangsgeschwindigkeit ist.

Mathematisch bedeutet (5.43), dass in Anwesenheit einer Stokes'schen Reibungskraft die Bewegung eines Körpers immer langsamer wird, seine Geschwindigkeit fällt exponentiell gegen Null ab.

Das können wir auch physikalisch einsehen. Betrachten wir dazu einen Körper, der sich mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegt. Dann wirkt eine der Bewegung entgegengesetzte Reibungskraft auf ihn, die um so größer ist, je größer seine Geschwindigkeit ist. Diese Reibungskraft bewirkt eine Verzögerung der Bewegung, d.h. die Geschwindigkeit nimmt ab. Damit nimmt auch die Reibungskraft ab und die Verzögerung wird geringer, d.h. die Geschwindigkeit nimmt langsamer ab. Dieser Vorgang setzt sich so lange fort, wie die Geschwindigkeit des Körpers von Null verschieden ist, jedoch wird die Verzögerung und damit die Geschwindigkeitsänderung im Laufe der Zeit immer geringer: die Geschwindigkeit geht langsam gegen Null, wie wir es auch formal durch die abfallende Exponentialfunktion erhalten haben.

Eine Anwendung dieses Stokes'schen Reibungsansatz ist z.B. der Fall von Gegenständen in Flüssigkeiten oder der Fall von Pollen in Luft. Hier lässt sich die Bewegung nicht durch den freien Fall alleine beschreiben, sondern die Reibung muss ebenfalls berücksichtigt werden. Das bedeutet, dass im Aktionsgesetz zwei Kräfte einzusetzen sind, die Gravitationskraft und die Reibungskraft:

$$mg - \beta v = m \frac{dv}{dt}. \quad (5.44)$$

Diese Gleichung ist formal schwieriger zu behandeln als (5.40), daher wollen wir uns mit der formalen Lösung nicht aufhalten sondern versuchen, die Situation physikalisch zu behandeln: wird ein Körper in einer gewissen Höhe losgelassen, so hat er eine Anfangsgeschwindigkeit Null und es wirkt nur die Gravitationskraft auf ihn, die ihn nach unten beschleunigt. Sobald die Geschwindigkeit des Körpers von Null verschieden ist, wirkt auch die Reibungskraft, die der Gravitationskraft entgegen gesetzt ist. Anfangs ist die Reibungskraft aufgrund der geringen Geschwindigkeit ebenfalls klein, mit zunehmender Geschwindigkeit des fallenden Körpers nimmt die Reibungskraft zu – aber nur bis zu dem Punkt, an dem die Reibungskraft entgegengesetzt gleich der Gravitationskraft ist: dann ist die Summe der beiden Kräfte Null, d.h. auf den Körper wirkt keine weitere Beschleunigung und er fällt mit gleichförmiger Geschwindigkeit v_{end} . Diese Bewegung ist einfach zu beschreiben, da sie durch eine konstante Geschwindigkeit v_{end} charakterisiert ist. Diese erhalten wir aus (5.44), indem wir die rechte Seite gleich Null setzen (die Geschwindigkeit ändert sich ja nicht mehr):

$$mg - \beta v_{\text{end}} = 0 . \quad (5.45)$$

Umformen liefert

$$v_{\text{end}} = \frac{mg}{\beta} . \quad (5.46)$$

Die Endgeschwindigkeit eines Körpers, der unter dem Einfluss einer Stokes'schen Reibung fällt, ist also gegeben als der Quotient aus der Gewichtskraft mg und dem Reibungskoeffizienten β . Als Konsequenz fallen bei gleichem Reibungskoeffizienten β Körper mit größerer Masse schneller als solche mit geringer Masse. Umgekehrt fallen bei gleicher Masse Körper bei kleinem Reibungskoeffizienten schneller als bei großem.

Newton'sche Reibung (Strömungswiderstand)

Eine andere Form der Reibung entsteht durch den *Strömungswiderstand* – hierbei beschreiben wir die Bewegung schneller großer Körper in einem viskosen Fluid. Die verzögernde Kraft entsteht durch die sich hinter dem bewegten Körper ausbildende Wirbel. Diese Widerstandskraft wird in der Hydrodynamik noch einmal genauer behandelt werden, vgl. Abschn. 10.7.3. Formal lässt sie sich schreiben als:

$$F_{\text{Luftw}} = -\frac{1}{2} c_w \rho A v^2 = -c'_w \cdot v^2 \quad (5.47)$$

mit ρ als der Dichte des Körpers, v als seiner Geschwindigkeit, A als seiner Querschnittsfläche und c_w als dem Widerstandsbeiwert (ja, das ist der Wert, mit dem Autobauer auch manchmal werben – weil ein kleiner Widerstandsbeiwert eine kleine Reibungskraft bedeutet und damit der Spritverbrauch zum Überwinden der Reibung geringer ist); sowie $c'_w = A\rho c_w/2$ als Abkürzung.

Einsetzen in die Bewegungsgleichung liefert formal noch größere Unannehmlichkeiten als bei der Stokes'schen Reibung, da hier die Geschwindigkeit quadratisch in die Differentialgleichung eingeht und nicht linear wie bei Stokes. Interessant ist wieder der Grenzfall des Falls mit konstanter Geschwindigkeit (hier z.B. ein Fallschirmspringer in Luft). Dann verschwindet in der Bewegungsgleichung wieder die rechte Seite und es bleiben auf der linken Seite die Reibungskraft und die Gravitationskraft

$$mg - \frac{1}{2} c_w \rho A v_{\text{end}}^2 = 0 \quad (5.48)$$

oder aufgelöst nach v_{end} :

$$v_{\text{end}} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho A c_w}} = \sqrt{\frac{mg}{c'_w}} . \quad (5.49)$$

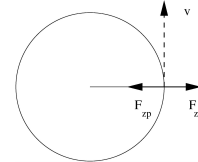
Ein Fallschirmspringer möchte eher den Fall genießen als nachher das Abbremsen am geöffneten Schirm und ist daher bestrebt, eine möglichst hohe Reibungskraft und damit eine geringe

Geschwindigkeit v_{end} zu erreichen (außerdem ist bei kleinem v_{end} der Ruck des sich öffnenden Fallschirms nicht so stark). Von den physikalischen Größen in der Gleichung für die Endgeschwindigkeit kann er die Gravitationsbeschleunigung g und die Luftdichte ϱ überhaupt nicht und seine eigene Masse m nur begrenzt beeinflussen. Größeren Einfluss hat er jedoch auf die Fläche A , die er in Fallrichtung weisen lässt und damit auch den Widerstandsbeiwert c_w : der Fallschirmspringer muss sich also möglichst wenig aerodynamisch formen, um langsamer zu fallen. Einige Pflanzensamen sind von Natur aus wenig aerodynamisch gestaltet damit die Fallgeschwindigkeiten gering und die zum Fall benötigten Zeiten groß werden. In dieser verlängerten Fallzeit können sie dann mit dem Wind über größere Entfernungen transportiert werden.

5.5.7 Eine Scheinkraft: Zentrifugalkraft

Wenn Sie einen Stein an einem Seil um den Kopf wirbeln, empfinden Sie eine radial nach außen gerichtete Kraft, die als *Zentrifugalkraft* (oder Fliehkraft) bezeichnet wird: der Stein will vom Zentrum der Bewegung entfliehen. Andere Beispiele, in denen wir von einer Zentrifugalkraft reden, sind das Karussell oder die beim um Kurven fahren empfundenen Kräfte.

Die Zentrifugalkraft empfinden wir als eine nach außen gerichtete Kraft – wir empfinden sie als eine solche, denn es handelt sich nicht um eine reale Kraft. Auf den Stein wirkt die durch das Seil ausgeübte Kraft (beim Karussell wird die Kraft durch die Struktur übertragen, beim Planeten wirkt die Gravitationskraft). Diese Kräfte verhindern, dass sich der Abstand des Körpers vom Mittelpunkt des Kreises (Drehpunkt) vergrößert. Sie werden als *Zentripetalkräfte* F_{ZP} bezeichnet. Wäre die Zentrifugalkraft real, so wäre sie der Zentripetalkraft genau entgegengesetzt, d.h. die Kräfte würden sich aufheben und der Körper würde sich, gemäß Trägheitsgesetz, auf einer Geraden tangential vom Kreis wegbewegen. Das entspricht aber nicht der beobachteten Kreisbewegung. Die Zentrifugalkraft ist daher eine *Scheinkraft*: die Trägheit des Körpers würde ihn auf einer Geraden verharren lassen, vgl. Abb. 5.7. Durch das Seil (die Gravitation, die Struktur des Karussells) wird jedoch eine Kraft auf den Körper ausgeübt, die ihn auf die Kreisbahn zwingt. Was Sie im Seil als *Zentrifugalkraft* spüren, ist die nach Wechselwirkungsgesetz der Zentripetalkraft entgegen gesetzte Gegenkraft. Für die Zentrifugalkraft gilt



$$F_Z = \frac{mv^2}{r}, \quad (5.50)$$

d.h. die Zentrifugalkraft ist um so größer,

- je größer die Masse m des Körpers,
- je größer die Geschwindigkeit v des Körpers, und
- je kleiner der Radius r der Bahn des Körpers.

Aus der Sicht des Steines (oder eines auf einem Karussell befindlichen Beobachters) gibt es für die Zentripetal- und die Zentrifugalkraft keine Ursachen, er kann sie nur als eine Art nach außen gerichtete Gravitationskraft und eine nach innen gerichtete Gegenkraft interpretieren. Für einen Beobachter außerhalb des Karussells dagegen ist nur die Zentripetalkraft real, die den Stein bzw. den auf dem Karussell sitzenden entgegen seiner Trägheit auf die Kreisbahn zwingen. Kräfte, die wie die Zentrifugalkraft nur von der Wahl des Bezugssystems abhängen, heißen Trägheitskräfte oder Scheinkräfte.

Eine Laboranwendung der Zentrifugalkraft ist die *Zentrifuge*. Da die Zentrifugalkraft genau wie die Gewichtskraft der Masse proportional ist, hat sie analoge Wirkungen: in einer Flüssigkeit schwebende Teilchen setzen sich in Abhängigkeit von ihrer Masse und Größe im Schwerfeld verschieden schnell ab (Sedimentation). Entsprechendes geschieht an den Seitenwänden eines schnell rotierenden Gefäßes. Ist die Rotationsgeschwindigkeit groß, so kann die Zentrifugalkraft ein Vielfaches der Schwerkraft betragen: bei einer Zentrifuge mit

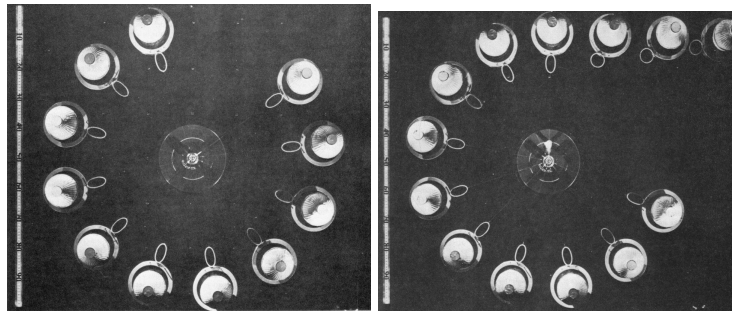
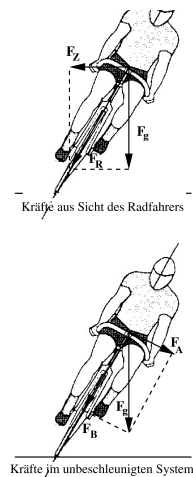


Abbildung 5.7: Ein Körper wird an einer Schnur im Kreis bewegt (links). Lässt man die Schnur los, so bewegt sich der Körper auf Grund seiner Trägheit tangential zum Kreis fort [42]

2000 Umdrehungen pro Sekunde erfährt ein Teilchen, das auf einer Kreisbahn von 1 cm umläuft, eine Zentrifugalkraft, die dem 160 000 fachen der Gewichtskraft entspricht.

Eine weitere Anwendung ist das Kurvenfahren auf dem Fahrrad oder auf Inline-Skates. In beiden Fällen legen Sie sich ‘in die Kurve’, wobei die Neigung um so größer werden muss, je größer die Geschwindigkeit ist, vgl. neben stehende Abbildung aus [20]. Aus der Sicht des Radfahrers liegt das Problem in einer Zentrifugalkraft F_Z , die ihn aus der Kurve heraus tragen will und der er sich dadurch widersetzt, dass er seinen Schwerpunkt nicht mehr über der Auflage (den Rädern) hat sondern ihn derart in die Kurve kippt, dass die Summe F_R aus Gavitationskraft F_g und Zentrifugalkraft F_Z wieder genau auf die Auflage weisen. Der Radfahrer behauptet also, dass seine Kurvenfahrt nur durch ein geschicktes Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und Gravitationskraft erreichen lässt. Eine Spottdrossel, die sich dieses Manöver von der übergeordneten Warte des unbeschleunigten Bezugssystems ansieht, argumentiert dagegen: beim Kurvenfahren wirkt auf den Radfahrer eine einzige Kraft, nämlich die Gravitationskraft F_g . Die wirkt immer und ändert nichts an der Richtung des Radfahrers solange dieser aufrecht fährt und sein Schwerpunkt über der Auflage liegt. Erst wenn sich der Radfahrer zur Seite neigt bewirkt die Gravitationskraft eine ablenkende Kraftkomponente F_A , die für die Kurvenfahrt verantwortlich ist. Eine Zentrifugalkraft muss aus der Sicht der Drossel nicht eingeführt werden: die Bewegung ist beschleunigt, da sich die Richtung der Geschwindigkeit des Radfahrers ändert, und die dafür benötigte Kraft ist die durch die Neigung nicht ausgeglichene Gravitationskraft. Eine zweite Kraft tritt nicht auf, denn der aufrechte Radfahrer würde aufgrund seiner Trägheit gerade aus fahren – dabei ist keine Kraft im Spiel.

Je stärker sich der Radfahrer in die Kurve legt, um so größer wird die ablenkende Kraft F_A und um so kleiner die auf den Boden wirkende Kraft F_B . Die Normalkomponente dieser Kraft geht jedoch in die Reibungskraft ein: wird sie geringer, so ist auch die Reibungskraft gering – daher kann der Radfahrer auf feuchtem und schlecht griffigen Belag auch nicht mit großer Geschwindigkeit in eine enge Kurve gehen.



5.5.8 Allgemeines Gravitationsgesetz

Allzeit vorhandene Kraft ist die Gravitationskraft. Für den Spezialfall eines Körpers in der Nähe der Erdoberfläche haben wir sie in Abschn. 5.5.1 als Gewichtskraft kennen gelernt.

Die Gravitationskraft ist jedoch universeller. Sie basiert auf der Tatsache, dass sich zwei Massen anziehen. Wir hatten diese Situation bereits im Zusammenhang mit dem Wechselwirkungsgesetz diskutiert: der Ball wird von der Erde angezogen und mit einer gleich großen entgegengesetzten Kraft zieht auch der Ball die Erde an. Diese Massenanziehung ist uni-

versell: auch zwei Bälle ziehen sich gegenseitig an. Der Nachweis (und die Bestimmung der Gravitationskonstanten) erfolgt mit der Gravitationsdrehwaage von Cavendish.

Die Gravitationskraft oder Massenanziehung zwingt die Planeten auf die Bahn um die Sonne, den Mond und Satelliten auf die Bahn um die Erde, und den Apfel zum Fall. Aus den Beispielen erkennt man, dass Gravitation kein spezielles Phänomen der Erde ist sondern eine allgemeine Eigenschaft von Massen, daher auch die Bezeichnung Massenanziehung. Newton formulierte dies im *allgemeinen Gravitationsgesetz*:

$$F_G = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} \quad (5.51)$$

mit M und m als den Massen der beteiligten Körper und r als ihrem Abstand. γ ist die allgemeine Gravitationskonstante, $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$. Die Anziehung zwischen zwei Körpern wächst daher mit der Masse der Körper und nimmt mit dem Quadrat des Abstands zwischen ihnen ab.

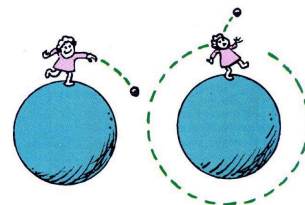
Für die Anziehungskraft an der Oberfläche eines Planeten können wir dessen Masse, seinen Radius und die universelle Gravitationskonstante zu einer neuen Konstanten zusammenfassen:

$$F_G = \frac{\gamma \cdot M}{r^2} \cdot m = m \cdot g \quad \text{mit} \quad g = \frac{\gamma \cdot M}{r^2} . \quad (5.52)$$

Für die Erde ergibt sich mit $M_E = 5.69 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ und $r_E = 6350 \text{ km}$ für die (bereits bekannte) Gravitationsbeschleunigung $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. Für die entsprechende Konstante an der Oberfläche anderer Himmelskörper ergibt sich z.B.

- Mond: $M_M = 7.35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, $r_M = 1738 \text{ km}$ und damit $g_M = 1.62 \text{ m/s}^2$, d.h. die Gravitationsbeschleunigung und damit die Gewichtskraft an der Oberfläche des Mondes beträgt nur ca. 1/6 von dem Wert an der Erdoberfläche.
- Sonne: $M_S = 1.99 \cdot 10^{31} \text{ kg}$, $r_S = 696\,000 \text{ km}$ und damit $g_S = 274 \text{ m/s}^2$, d.h. die Gravitationsbeschleunigung und damit die Gewichtskraft an der Oberfläche der Sonne betragen ca. das 28fache der entsprechenden Werte an der Erdoberfläche.
- Mars: $M_{\text{Mars}} = 6.4 \cdot 10^{23} \text{ kg}$, $r_{\text{Mars}} = 3397 \text{ km}$ und damit $g_{\text{Mars}} = 3.7 \text{ m/s}^2$.

Den Zusammenhang zwischen Gravitationskraft und Planetenbewegung können Sie sich aus dem waagerechten Wurf klar machen, dessen Idee auf Newton zurück geht: werfen Sie einen Stein, so können Sie die Bewegung in einen waagerechten Anteil und die vertikale Fallbewegung zerlegen. Wie weit der Stein in waagerechter Richtung kommt, hängt von der Geschwindigkeit ab, mit der Sie ihn werfen: je größer die Geschwindigkeit, um so weiter der während der zum Fall benötigten Zeit zurückgelegte Weg in horizontaler Richtung. Werfen Sie schnell genug (ca. 8 km/s oder 29 000 km/h), so krümmt sich die Erdoberfläche genau unter dem fallenden Stein weg → der Stein fällt um die Erde und ist zum Satelliten geworden. Auf den Satelliten wirkt dann die Gravitationskraft als die Kraft, die ihn entgegen seiner Trägheit von der gradlinigen Bahn in eine Kreisbahn zwingt. Aus der Sicht des Satelliten verbleibt er auf seiner Bahn nur deshalb, weil die Gravitationskraft durch eine entgegengesetzte aber gleich große Zentrifugalkraft kompensiert wird:



$$\gamma \frac{M_{\text{Erde}} \cdot m_{\text{Satellit}}}{r^2} = \frac{m_{\text{Satellit}} v^2}{r} , \quad (5.53)$$

wobei r vom Erdmittelpunkt aus gemessen wird. Mit Hilfe dieses Kräftegleichgewichts können Sie die Eigenschaften der Satellitenbahn (Geschwindigkeit, Flughöhe) bestimmen.

5.6 Impulserhaltung

Impulserhaltung folgt aus der Kombination von Aktions- und Wechselwirkungsgesetz: der Impuls $p = mv$ ist gleich dem Kraftstoß. Bei einer Wechselwirkung (Stoß) zweier Körper ist auf Grund des Wechselwirkungsgesetz für die Gesamtdauer der Wechselwirkung Kraft gleich Gegenkraft. Da die Dauer der Wechselwirkung für beide beteiligten Körper gleich ist, sind auch die beiden Kraftstöße gleich. Dann müssen auch die während der Wechselwirkung zwischen den Körpern übertragenen Impulse gleich sein:

$$F_1 = F_2 \quad \Leftrightarrow \quad F_1 \Delta t = F_2 \Delta t \quad \Leftrightarrow \quad \Delta p_1 = \Delta p_2 . \quad (5.54)$$

Allgemein gilt für die *Impulserhaltung*

$$\sum_i \vec{p}_{i,v} = \sum_i \vec{p}_{i,n} : \quad (5.55)$$

Der Gesamtimpuls (die Summe der Impulse der am Stoß beteiligten Körper) vor dem Stoß ist gleich dem Gesamtimpuls nach dem Stoß. An dieser Stelle ist es sinnvoll, den Impuls mit Vektoren zu schreiben: wenn z.B. zwei Billardkugeln mit einander wechselwirken, so fliegen sie nicht unbedingt gradlinig auseinander sondern in beliebigen Winkeln, d.h. wir haben es nicht mit einer gradlinigen sondern in diesem Fall mit einer zweidimensionalen (und im allgemeinen Fall mit einer dreidimensionalen) Bewegung zu tun. Wenn Sie mit einmal versuchen, mit zwei Münzen oder zwei Bällen Stoßprozesse durchzuführen, werden Sie feststellen, wie schwierig es ist, einen Stoß derartig auszuführen, dass sich beide Körper entlang einer Geraden bewegen: der Regelfall ist der schiefe Stoß, daher ist die Aussage, dass Impulserhaltung in vektorieller Form betrachtet werden muss, sinnvoll.

Lediglich in einigen Spezialfällen reduziert sich die Bewegung auf eine gradlinige Bewegung und wir können für die Impulserhaltung schreiben

$$\sum_i p_{i,v} = \sum_i p_{i,n} , \quad (5.56)$$

bzw. bei Beschränkung auf zwei Körper

$$m_{1,v}v_{1,v} + m_{2,v}v_{2,v} = m_{1,n}v_{1,n} + m_{2,n}v_{2,n} \quad (5.57)$$

oder

$$m_1v_1 + m_2v_2 = \text{const} . \quad (5.58)$$

5.6.1 Rückstoßprinzip

Beispiele für die Impulserhaltung sind vielfältig – auch in der Biologie. Das einfachste Beispiel für Impulserhaltung ist die Trennung zweier Massen (*Rückstoßprinzip*). Stellen Sie sich vor, Sie befinden sich in der Mitte eines zugefrorenen Sees, das Eis ist so glatt, dass die Haftreibung verschwindet. Dann haben Sie keine Möglichkeit, sich durch 'Abstoßen' vom Boden vorwärts zu bewegen. Wenn Sie jedoch einen Gegenstand (möglichst großer Masse) von sich fort schleudern, so können Sie sich gleichsam von diesem Gegenstand abstoßen: da sie dem Gegenstand während des Kraftstoßes einen Impuls p übertragen haben, überträgt der Gegenstand auf Sie einen gleich großen, aber entgegengesetzten Impuls $-p$. Als Impulsbilanz ergibt sich damit

$$mv_1 = -mv_2 \quad \text{bzw.} \quad 0 = mv_1 + mv_2 . \quad (5.59)$$

Die rechte Version der Impulserhaltung erinnert Sie daran, dass der Gesamtimpuls erhalten bleibt. Dieser war vor dem Abstoßen Null, da sowohl Sie als auch der später fort geschleuderte Gegenstand in Ruhe waren und damit einen Impuls Null hatten. Und er ist nach dem Abstoßen Null, da zwar ihr Impuls und der des fort geschleuderten Gegenstandes von Null verschieden sind, jedoch entgegen gesetzt gleich sind, d.h. in der Summe wieder Null ergeben.

Eine Anwendung der vektoriellen Form

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \quad \text{bzw.} \quad 0 = \vec{p}_1 - \vec{p}_2 \quad (5.60)$$

der Impulserhaltung ist hier nicht notwendig, da wir nur zwei Körper betrachten, die sich in entgegengesetzter Richtung bewegen – d.h. die gesamte Bewegung erfolgt entlang einer Geraden.

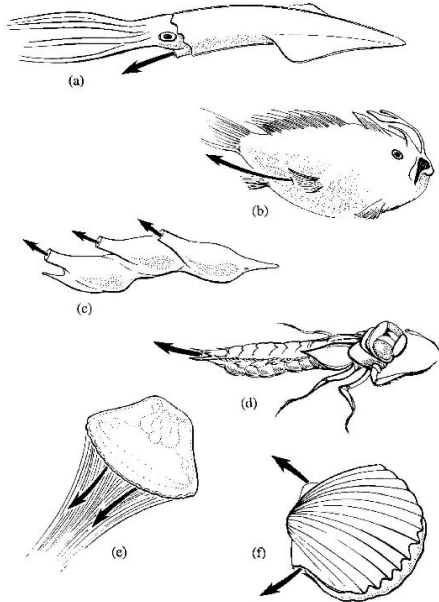


FIGURE 4.14. Jet propelled animals: (a) squid, (b) frogfish, (c) a trio of salps, (d) dragonfly nymph, (e) jellyfish, and (f) scallop.

Das Rückstoßprinzip ist für einen Astronauten im Weltraum die einzige Möglichkeit, sich fort zu bewegen. Es wird auch bei Raketen angewendet, wobei die eigentliche Raketengleichung jedoch komplizierter ist, da sich die Masse der Rakete durch die Verbrennung des Kraftstoffs verändert.

Auch im Tierreich findet das Rückstoßprinzip Anwendung. Vogel [48] nennt als Beispiele den zehnfüßigen Tintenfisch, Puppen von Libellen, Quallen, oder die Kammmuschel, vgl. auch nebenstehende Abbildung. In allen diesen Beispielen ist die formale Behandlung des Rückstoßes etwas komplizierter, da nicht ein Gegenstand weggeschleudert wird, sondern über einen längeren Zeitraum eine Flüssigkeit ausgestoßen wird. Korrekt könnte man dann mit einem Massenstrom (vgl. Kapitel über Hydrodynamik) rechnen, für viele Abschätzungen reicht es jedoch aus, sich die über einen gewissen Zeitraum ausgestoßene Masse als ein Massenpaket vorzustellen und damit genau so zu rechnen, wie sie es oben mit dem Schlittschuhläufer getan haben.

Ein weiteres, allerdings komplexeres Beispiel, ist ein explodierender Feuerwerkskörper. Auch hier

handelt es sich um Massentrennung: die Einzelmasse Feuerwerkskörper zerfällt in eine große Zahl Bruchstücke. Der Gesamtimpuls der Bruchstücke muss dann wieder gleich dem Impuls des Feuerwerkskörpers vor dem Zerbersten sein. Die große Zahl der Bruchstücke ist jedoch nicht der einzige Unterschied zum Schlittschuhläufer: während beim Schlittschuhläufer der Gesamtimpuls Null ist, hat der Feuerwerkskörper bereits einen von Null verschiedenen Impuls. Nach der Explosion muss dieser Gesamtimpuls als die Summe der Impulse der Bruchstücke wieder vorhanden sein. Als Konsequenz bewegt sich der Massenmittelpunkt der Bruchstücke weiter entlang der Bahn, entlang derer auch der vollständige Feuerwerkskörper geflogen wäre, also entlang einer Wurfparabel. Den Feuerwerkskörper kann man übrigens nur in der vektoriellen Darstellung des Impulses rechnen, da sich die Bruchstücke in alle Raumrichtungen bewegen können, die Bewegung also dreidimensional ist.

5.6.2 Inelastischer Stoß



Beim ineleastischen Stoß handelt es sich um einen Stoß zwischen zwei (oder mehr) Körpern, die durch den Stoßprozess zu einem Körper verschmelzen. In jedem Fall muss die Summe der Impulse vor dem Stoß gleich dem Impuls der Gesamtmasse nach dem Stoß sein (der Gesamtimpuls vor dem Lunch ist gleich dem nach dem Lunch) :

$$\sum_i m_i v_{i,v} = \left(\sum_i m_i \right) \cdot v_n \quad \text{bzw.} \quad \sum_i \vec{p}_{i,v} = \vec{p}_n \quad (5.61)$$

Wie beim Feuerwerkskörper lässt sich die Gleichung allgemein nur in vektorieller Form behandeln.

Für den Spezialfall, dass sich zwei Körper gradlinig aufeinander zu bewegen gilt:

$$m_1 v_{1,v} - m_2 v_{2,v} = (m_1 + m_2) v_n \quad \text{bzw.} \quad \vec{p}_{1,v} + \vec{p}_{2,v} = \vec{p}_n . \quad (5.62)$$

Beim inelastischen Stoß bleibt die Gesamtenergie des Systems nicht erhalten, da ein Teil der kinetischen Energie (s. Kap. ??) der beiden Körper in Verformungsarbeit beim Verschmelzen der Körper umgewandelt wird.

5.6.3 Elastischer Stoß

Beim elastischen Stoß dagegen bleibt die kinetische Energie der beteiligten Körper als kinetische Energie erhalten, die Körper verändern sich beim Stoß nicht und bleiben als Einzelkörper bestehen. In diesem Fall gilt für die Impulserhaltung beim Stoß von einer großen Zahl von Körpern

$$\sum_i m_i v_{i,v} = \sum_i m_i v_{i,n} \quad \text{bzw.} \quad \sum_i \vec{p}_{i,v} = \sum_i \vec{p}_{i,n} \quad (5.63)$$

bzw. für den Spezialfall, dass nur zwei Körper miteinander wechselwirken

$$m_1 v_{1,v} + m_2 v_{2,v} = m_1 v_{1,n} + m_2 v_{2,n} \quad \text{bzw.} \quad \vec{p}_{1,v} + \vec{p}_{2,v} = \vec{p}_{1,n} + \vec{p}_{2,n} . \quad (5.64)$$

Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Beispielen stehen wir hier jedoch vor einem formalen Problem: wie sollen wir den Gesamtimpuls vor dem Stoß nach dem Stoß auf die beiden Körper neu verteilen? Dies ist alleine mit der Impulserhaltung nicht möglich, dazu muss zusätzlich die Energieerhaltung berücksichtigt werden. Daher finden sich Aufgaben zum elastischen Stoß auch erst im folgenden Abschnitt, in dem Energie und Energieerhaltung besprochen werden.

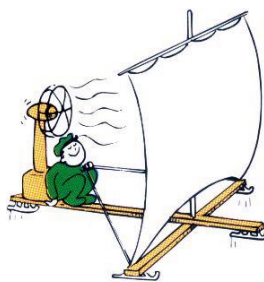
5.7 Aufgaben

5.7.1 Fragen

1. Welche der beiden Formen von Masse ist eine fundamentalere Größe, die träge Masse oder die schwere Masse? Hat jeder Körper mit einer schweren Masse auch eine träge Masse? Hat jeder Körper mit träger Masse auch eine schwere Masse?
2. Was ist der Hauptunterschied zwischen dem alltäglichen Gebrauch des Wortes Trägheit und seiner Bedeutung in der Physik?
3. Wer hat den größeren Impuls: ein Elefant, der fest auf der Stelle stehend an einem Baum knabbert, oder eine Maus, die durch ein Labyrinth läuft?
4. Wie ist der lineare Impuls definiert?
5. Warum sind Supertanker so schwer zu bremsen und zu manövrieren?
6. Was hat den größeren Impuls, ein am Kai liegender Supertanker oder ein Motorboot, das einen Wasserskiläufer zieht?
7. Drücken Sie Newton's zweites Gesetz (Aktionsgesetz) mit Hilfe des Impulses aus.
8. Ein Astronaut trainiert in voller Ausrüstung an den 'Craters of the Moon' in Idaho und springt von einer Plattform. Er trifft mit einer Geschwindigkeit von 5 m/s auf den Boden. Später, auf dem Mond, springt er von der Landefähre und trifft den Boden mit der gleichen Geschwindigkeit. Ist sein Impuls auf dem Mond größer oder kleiner als auf der Erde?
9. Erklären Sie (in physikalischen Begriffen) den Sinn von Nackenstützen in PKWs. Für welche Art von Kollision werden diese insbesondere benötigt.

10. Was ist der Zusammenhang zwischen Kraft und Trägheit?
11. Welche Art von Bewegung wird durch eine konstante, von Null verschiedene Kraft erzeugt?
12. Eine Kraft wirkt auf einen bewegten Körper. Wie (wenn überhaupt) unterscheidet sich die Beschleunigung wenn die Kraft senkrecht zur Bewegung wirkt von der Situation, in der die Kraft parallel zur Bewegung wirkt?
13. Beschreiben Sie die Bewegung eines Balls, der eine Rampe gerade hinauf rollt, mit Hilfe der Begriffe Geschwindigkeit und Beschleunigung. Was können Sie aus dieser Bewegung im Bezug auf die auf den Ball wirkenden Kräfte schließen?
14. Zwei Personen drücken in entgegen gesetzter Richtung gegen einen Ball. Woran können Sie erkennen, ob eine der Personen eine größere Kraft ausübt als die andere?
15. Ein Auto beschleunigt mit 4 m/s . Welche Beschleunigung ergibt sich, wenn das Auto ein vergleichbares zweites im Schlepp hat?
16. Wie verändert sich die Beschleunigung eines Objektes, wenn die Kraft die gleiche bleibt, seine Masse aber halbiert (verdoppelt) wird?
17. Wie unterscheiden sich die Konzepte von Masse und Gewicht? Wie sind die beiden Größen mit einander verbunden?
18. Wie verändert sich das Gewicht eines Objekts, wenn sich seine Masse verdoppelt?
19. Wie ändert sich das Gewicht eines Objekts, wenn Sie es von der Erde in die Space Station versetzen?
20. Wenn Sie einen Beutel Kartoffeln mit der Aufschrift 2.5 kg kaufen, kaufen Sie dann die Kartoffeln nach Masse oder Gewicht?
21. Wie groß ist die Beschleunigung auf einen Fallschirmspringer, der seine Endgeschwindigkeit erreicht hat?
22. Es wird häufig behauptet, dass Newton's Trägheitsgesetz nur in Abwesenheit von Reibung gilt. Ist das korrekt? Begründen Sie.
23. Ist die Kraft, die die Sonne auf die Erde ausübt, größer, kleiner oder gleich der Kraft, die die Erde auf die Sonne ausübt? Begründen Sie.
24. Warum rollen Kanonen rückwärts, wenn sie gefeuert werden?
25. In welche Richtung weist die Beschleunigung, wenn der Körper langsamer wird?
26. Welche Bewegung führt ein Fahrzeug, dass plötzlich auf eine Eisfläche gerät, aus? Annahme: die Reibungskräfte verschwinden in dem Moment vollständig.
27. Ein 2 kg Ball wird horizontal mit einer Geschwindigkeit von 12 m/s geworfen. Gleichzeitig fällt ein 1 kg Ball aus der gleichen Höhe. Welcher Ball trifft zuerst auf den Boden?
28. Ein 1 kg Ball wird horizontal mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s geworfen. Gleichzeitig wird ein 2 kg Ball aus der gleichen Höhe mit der Hälfte der horizontalen Geschwindigkeit geworfen. Welcher der beiden Bälle erreicht den Boden als erster?
29. Eine Physikstudentin baut unmittelbar nach Ankunft auf dem Planeten X das Gorilla-Schieß-Experiment (vgl. Abbildung ??) auf. Dabei ist ihr allerdings nicht aufgefallen, dass die Gravitationskraft auf Planet X stärker ist als auf der Erde. Muss sie ihren Versuchsaufbau verändern? Wenn ja, wie? Wenn nein, warum?

30. Wie groß ist die Gesamtkraft auf ein Flugzeug, das sich mit einer Geschwindigkeit von 800 km/h gleichförmig in östlicher Richtung bewegt?
31. Welche der folgenden Situationen führt zu einer größeren Änderung des Impulses: eine Kraft von 2 N, die für 10 s wirkt, oder eine Kraft von 3 N, die für 6 s wirkt?
32. Drücken Sie Newton's erstes Gesetz mit Hilfe des Impulses aus.
33. Ein Ast erzeugt eine aufwärts gerichtete Kraft auf einen Apfel. Was ist nach Newton's drittem Gesetz die dazu gehörige Gegenkraft?
34. Warum benötigt ein Schmied einen Amboss, wenn er ein Hufeisen bearbeitet?
35. Wenn Sie einem Buch einen Stoß geben, so rutscht es über den Tisch und kommt nach einiger Zeit zur Ruhe. Wie ist diese mit Newton's Trägheitsgesetz vereinbar?
36. Welche Kräfte wirken auf ein Fahrzeug, das sich mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer geraden Straße bewegt?
37. Warum scheint der am Rückspiegel hängende Talisman sich nach hinten zu bewegen, wenn das Auto beschleunigt?
38. Wenn Hunde aus dem Wasser kommen, schütteln sie sich oftmals trocken. Erklären Sie die Physik hinter diesem Vorgang
39. Erklären Sie (in physikalischen Begriffen) den Sinn und die Funktion eines Sicherheitsgurtes.
40. Eissegeln bei Flaute: Sonniges – und damit windstilles – Hochdruckwetter über dem zugefrorenen Dümmer. Um seine Manöver trotzdem trainieren zu können, montiert ein Eissegler ein Gebläse auf seinem Fahrzeug (s.u.). Der Luftstrom (Geschwindigkeit 30 m/s; pro Minute wirft das Gebläse 12 kg Luft aus) trifft vollständig auf das Segel. (a) Welche Kraft übt dieser Luftstrom auf das Segel aus? (b) Welche Geschwindigkeit hat der Eissegler (Gesamtmasse Fahrzeug und Segler 100 kg) nach 5 Minuten? (c) Wie ändert sich die Situation, wenn nur die Hälfte des Luftstroms auf das Segel trifft, die andere Hälfte jedoch ungenutzt daran vorbei streicht [22]?



41. Die Gravitationsbeschleunigung an der Oberfläche eines Planeten ist halb so groß wie die an der Erdoberfläche. Der Radius des Planeten beträgt die Hälfte des Erdradius. Wie verhält sich die Masse des Planeten zu der der Erde?
42. Welche der folgenden Aussagen ist wahr:
 - Wirkt eine Kraft auf einen Körper, so ändert sich dessen Geschwindigkeit.
 - Wirkt eine Kraft auf einen Körper, so ändert sich dessen Schnelligkeit.
 - Wirkt eine Kraft parallel zur Bewegung eines Körpers, so ändert sich dessen Schnelligkeit.

- Wirkt eine Kraft parallel zur Bewegung eines Körpers, so ändert sich seine Geschwindigkeit.
 - Wirkt eine Kraft senkrecht zur Bewegung eines Körpers, so ändert sich seine Schnelligkeit.
 - Wirkt eine Kraft senkrecht zur Bewegung eines Körpers, so ändert sich dessen Geschwindigkeit.
 - Wirkt eine Kraft in einem beliebigen Winkel zur Bewegung eines Körpers, so ändert sich dessen Schnelligkeit und die Richtung seiner Bewegung.
 - Wirkt eine Kraft in einem beliebigen Winkel zur Bewegung eines Körpers, so ändert sich dessen Geschwindigkeit.
43. Warum ist es beim Skifahren weniger gefährlich, wenn Sie in eine Wand aus Pulverschnee fahren als in eine Felswand. Gehen Sie davon aus, dass in beiden Fällen die Anfangsgeschwindigkeit die gleiche ist und Sie vollständig zur Ruhe kommen.
44. Beschreiben Sie die Impulsänderungen, die beim Dribbeln eines Basketballs auftreten.
45. Was erzeugt die größere Änderung im Impuls: eine Kraft von 3 N, die über 5 s wirkt, oder eine Kraft von 4 N, die über 2 s wirkt?
46. Wie können Sie den Rückstoß beim Abfeuern eines Gewehrs erklären?
47. Für welche der Personen in den folgenden Situation ist das erste Newton'sche Axiom (Trägheitsgesetz) gültig?
- (a) Eine Person in einem Flugzeug, das sich gradlinig mit konstanter Geschwindigkeit bewegt?
 - (b) Ein Fallschirmspringer, der gerade aus einem Flugzeug abgesprungen ist?
 - (c) Ein Fallschirmspringer, der bereits seine Endgeschwindigkeit erreicht hat, und mit konstanter Geschwindigkeit fällt?
 - (d) Der Pilot eines Flugzeugs, das gerade von der Startbahn abhebt?
 - (e) Ein Rennfahrer, der mit seinem Wagen auf einem Rundkurs fährt?
- Begründen Sie ihre Aussagen.
48. Ein Fahrzeug fährt mit konstanter Geschwindigkeit auf einer um 10° gegenüber der Horizontalen geneigten Straße. Welche Kräfte wirken auf das Fahrzeug?
49. Ein 2000 kg Flugzeug fliegt gleichförmig in konstanter Flughöhe. Welche Kräfte wirken auf das Flugzeug? Wie groß ist die von der Luft ausgeübte Auftriebskraft auf das Flugzeug?
50. Ein Ball auf der Ladefläche eines Lasters rollt in rückwärtige Richtung, wenn sich der Laster in Bewegung versetzt. Der Fahrer befindet sich relativ zum Laster in Ruhe und schließt daher, dass auf den Ball eine Kraft wirken muss. (a) Hat er recht? (b) Welche Kräfte wirken auf den Ball? (c) Bewegt sich der Ball im Bezug auf den Erdboden vorwärts oder rückwärts?
51. Ein Mädchen hält einen Ball bewegungslos in ihrer Hand. Geben Sie die auf den Ball wirkenden Kräfte und Gegenkräfte an. Jetzt wirft sie den Ball in die Luft. Welche Kräfte und Gegenkräfte wirken auf den fliegenden Ball?
52. Die Dichte von Wasser ist geringer als die von Fels oder Boden. Ist g über einem See kleiner oder größer als im Mittel?
53. Sind die Kräfte zwischen Erde und Mond ein Paar im Sinne von Newton's drittem Gesetz?

54. Welche Kraft (falls es eine gibt) treibt die Planeten entlang ihrer Bahnen?
55. Welche Kraft (wenn es eine gibt) bewirkt, dass die Planeten sich entlang kreisförmiger Bahnen bewegen?
56. Wenn Sie einen Apfel in die Mitte zwischen Erde und Mond legen, welche Beschleunigung erfährt er?
57. Gemäß allgemeinem Gravitationsgesetz nimmt die von der Erde auf ein Objekt ausgeübte Gravitationskraft mit zunehmendem Abstand ab. Wie weit reicht sie?
58. Warum bemerken zwei Personen die gravitative Anziehung zwischen sich nicht?
59. Die Sonne übt eine gravitative Anziehung auf den Mond aus. Umkreist der Mond die Sonne?
60. Warum können Sie die Beziehung $F = mg$ verwenden, wenn sich ein Objekt dicht am Erdboden befindet, müssen aber die Form $F = \gamma Mm/r^2$ verwenden, wenn das Objekt weit von der Erde entfernt ist?
61. Ein Klotz liegt auf einer schiefen Ebene, die Haftreibung zwischen Klotz und Ebene ist gerade so groß, dass der Klotz nicht abrutscht. Wie üblich, ist der Haftreibungskoeffizient größer als der Gleitreibungskoeffizient. Was passiert, wenn der Klotz ganz leicht Richtung Hang abwärts abgestoßen wird? Was passiert, wenn er Richtung Hang aufwärts gestoßen wird?
62. Wie würde sich die Mondbahn verändern, wenn die gravitative Anziehung auf den Mond langsam schwächer würde?
63. Geostationäre Satelliten stehen fest über einem Punkt der Erdoberfläche. Warum stürzen sie nicht ab?
64. Eine Person sitzt ohne Sicherheitsgurt in einem PKW. In jeder Rechtskurve rutscht sie nach links. Wirkt eine nach links gerichtete Kraft auf diese Person? Erklären Sie.
65. Welche Kraft/Kräfte wirken auf einen Stein, der an einem Band im Kreis geschleudert wird?
66. Welche Kraft erlaubt einer Person auf Inline-Skates das Kurvenfahren?
67. Welche Kraft ist dafür verantwortlich, dass ein Satellit die Erde umkreist?
68. Ein Kind fährt Karussell. In welche Richtungen weisen die folgenden Vektoren: (a) Geschwindigkeit, (b) Änderung der Geschwindigkeit, (c) Beschleunigung, und (d) Gesamtkraft.
69. Eine Ranke ist gerade stark genug, um Tarzan zu halten, wenn er unbewegt an dieser Ranke senkrecht nach unten hängt. Wenn Tarzan die gleiche Ranke verwendet, um sich von Baum zu Baum zu schwingen, reißt diese am untersten Punkt der Bewegung. Warum?
70. Stellen Sie sich vor, Sie schwingen einen Eimer in einer vertikalen Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Müssen Sie eine größere Kraft aufwenden, wenn der Eimer an der Spitze oder am untersten Punkt seiner Bahn ist? Begründen Sie.
71. Welche Kräfte erlauben es Ihnen, ein Fahrrad auf einer ebenen Fläche zu fahren?
72. Wie verändert sich die Gravitationskraft zwischen zwei Objekten wenn der Abstand zwischen ihnen halbiert wird?
73. Ein Astronaut schwebt in der Mitte einer Raumstation, er hat keine Relativgeschwindigkeit zur Raumstation. Kann er auf den Boden gelangen?

74. Wie funktioniert ein rotierender Rasensprenger?
75. Gemäß drittem Newton'schen Gesetz übt die Erde eine Kraft auf die Sonne aus. Bewegt sich die Sonne daher auf einer kreisförmigen Bahn während die Erde im Jahresverlauf um sie herum kreist? Wie kann dies verwendet werden, um zu bestimmen, ob andere Sterne Planeten haben
76. Ein Stein wird aus einer Höhe von 1.8 m über dem Boden auf dem Mars fallen gelassen. Er erreicht den Boden innerhalb von 1 s. Würde es eine kürzere, längere oder die gleiche Zeit dauern, wenn der Stein mit einer horizontalen Geschwindigkeit von 10 m/s geworfen wird?
77. Der Impuls eines Balls im freien Fall bleibt nicht erhalten. Warum ist das keine Verletzung der Impulserhaltung?
78. Ein Physikstudent läuft mit einem Impuls von 200 kg m/s auf ein ruhendes Riesenskateboard (gleiche Masse wie die Person) zu und springt auf selbiges. Vernachlässigen Sie die Reibung. Welchen Gesamtimpuls hat das System vor und nach dem Sprung auf das Board? Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich die Person nach dem Sprung weiter?
79. Sie stehen auf einem anfänglich in Ruhe befindlichen Riesenskateboard. Vernachlässigen Sie die Reibung. Wie groß ist der Impuls des Skateboards, wenn Sie sich mit einem Impuls von 150 kg m/s auf dem Board nach vorne bewegen?
80. Erklären Sie, warum Menschen, die von einem Ruderboot auf einen Anleger springen wollen, häufig im Wasser landen.
81. Ein Astronaut im Space Shuttle drückt sich von der Wand ab, um auf die andere Seite des Raumes zu gelangen. Welchen Einfluss hat dies auf das Space Shuttle?
82. Manchmal endet ein Stern in einer riesigen Explosion, einer Supernova. Was geschieht mit dem Impuls eines solchen Sterns?
83. Ein Feuerwerkskörper explodiert am obersten Punkt seiner Flugbahn. Erläutern Sie, was mit dem Gesamtimpuls aller Fragmente des Feuerwerkskörpers geschieht.

5.7.2 Aufgaben

1. Vor Beginn eines Raumfluges hat eine Astronautin eine Masse von 55 kg. In der Umlaufbahn wird bestimmt, dass eine Kraft von 100 N eine Beschleunigung von 1.9 m/s^2 bewirkt. Um das ursprüngliche Gewicht zu behalten, soll die Astronautin eine Diät beginnen oder mehr Süßigkeiten essen?
2. Spinnennetze (Kraft und Gegenkraft): Ein Verankerungsfaden im Netz einer Spinne (Masse 2 g) kann einer Kraft von 0.1 N standhalten. Beim Netzbau lässt sich die Spinne an ihrem eigenen Faden herab und krabbelt nach Erreichen der gewünschten Fadenlänge wieder an diesem hoch. Wie schwer darf eine sich im untersten Punkt des Fadens verfangende Fliege maximal sein, wenn die Spinne (a) gerade wieder auf dem Weg nach oben ist, (b) bereits wieder am Befestigungspunkt des Fadens angekommen ist, und (c) ihr Netz mit insgesamt 6 Verankerungsfäden fertig gestellt hat?
3. Was sind die größte und die kleinste Kraft, die Sie durch Kombination einer 5 N Kraft und einer 8 N Kraft erhalten können?
4. Welche mittlere Kraft muss ein Sprinter aufwenden, um innerhalb von 1 s auf eine Geschwindigkeit von 9 m/s zu beschleunigen? Vergleichen Sie die Kraft mit der Gewichtskraft.

5. Ein 140 kg Football-Spieler läuft mit einer Geschwindigkeit von 8 m/s. Welcher Impuls ist nötig, um ihn zu stoppen?
6. Ein 1400 kg schweres Auto hat eine Geschwindigkeit von 108 km/h. Innerhalb von 7 s kann das Fahrzeug abgebremst werden. Wie groß sind der dafür benötigte Impuls und die mittlere Kraft?
7. Ein Pitcher fängt einen Baseball ($m = 145$ g) mit einer Geschwindigkeit von 45 m/s. Wie groß ist die mittlere auf seinen Handschuh ausgeübte Kraft, wenn der Ball innerhalb von 0.2 s abgebremst wird?
8. Die Beschleunigung einer 50 kg Frau beim Absprung beträgt 20 m/s². Wie groß ist die vom Boden auf die Frau ausgeübte Kraft? Wie groß ist diese Kraft im Vergleich zur Gewichtskraft?
9. Welche Kraft benötigen Sie, um einem 1000 kg PKW eine Beschleunigung von 3 m/s² zu erteilen?
10. Ein Baseball der Masse 0.15 kg wird vom Schläger mit einer Kraft von 5000 N getroffen. Wie groß ist die Beschleunigung?
11. Ein Baseball (Masse 0.15 kg, anfänglich in Ruhe) wird abgeschlagen. Seine Geschwindigkeit nach Abschlag ist 40 m/s, der Schläger war während des Abschlags 10^{-3} s in Kontakt mit dem Ball. Wie groß ist die mittlere auf den Ball ausgeübte Kraft?
12. Ein Auto mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s fährt gegen einen Baum. (a) Ein nicht angegurteter Mitfahrer wird mit dem Kopf gegen die Windschutzscheibe geschleudert und innerhalb von 0.02 s auf Ruhe abgebremst. Die Kontaktfläche zwischen Kopf und Windschutzscheibe beträgt $6 \cdot 10^{-4}$ cm², die Masse des Kopfes 5 kg. Bestimmen Sie die auf den Kopf ausgeübte Kraft und die ausgeübte Kraft pro Flächeneinheit. (b) Ein anderer Mitfahrer (Masse 70 kg) trägt einen Sicherheitsgurt und wird innerhalb von 0.5 s abgebremst. Die Kontaktfläche beträgt 0.1 m². Bestimmen Sie ebenfalls die mittlere auf den Menschen wirkende Kraft und die Kraft pro Fläche. Vergleichen Sie die beiden Ergebnisse.
13. Ein anfänglich ruhender Golfball der Masse $m = 47$ g wird mit einer Kraft von 2600 N über einen Zeitraum von $1.25 \cdot 10^{-3}$ s beschleunigt. Wie groß ist die Endgeschwindigkeit des Balles?
14. Angezogene Erde (Actio = reactio): Nach dem Wechselwirkungsprinzip übt ein Ball die gleiche Anziehungskraft auf die Erde aus wie die Erde auf den Ball. Betrachten Sie einen Ball mit einer Masse von 10 g und bestimmen Sie die Beschleunigung, die die Erde (Masse = $5.97 \cdot 10^{24}$ kg) nach diesem Gesetz erfährt, wenn sie auf den Ball zufällt? Wie lange dauert es, bis die Erde die Strecke von 1 mm durchfallen hat?
15. Ein menschlicher Oberschenkelknochen bricht, wenn eine komprimierende Kraft von mehr als $2 \cdot 10^5$ N auf ihn wirkt. Eine Person mit einer Masse von 60 kg landet auf einem Bein, so dass sich eine entsprechende Kraft auf den Oberschenkel ergibt. (a) Wie groß darf eine Beschleunigung maximal sein, um keinen Bruch zu erzeugen? (b) Das Wievielfache der Gravitationsbeschleunigung ist dies?
16. Ein 0.5 kg schwerer Ball befindet sich anfangs in Ruhe. Eine Kraft von 10 N wirkt für 2 s auf den Ball ein. Wie groß ist seine Geschwindigkeit?
17. Ein Hockey-Spieler mit einer Gewichtskraft von 1600 N wird innerhalb von 1 s von 6 m/s auf Ruhe abgebremst. (a) Bestimmen Sie die Masse des Hockey-Spielers. (b) Wie groß ist seine Mittlere Beschleunigung? (c) Welche Kraft ist erforderlich, um ihm diese Beschleunigung zu erteilen?

18. Der Fuß eines Läufers trifft mit einer abwärts gerichteten Geschwindigkeit von 10 m/s auf den Boden. Die Masse von Fuß und Bein betrage 9 kg; sie wird beim Auftreffen auf den Boden vollständig abgebremst. Bestimmen Sie die auf den Fuß wirkende Beschleunigung, wenn er (a) auf weichem Untergrund über eine Strecke von 0.03 m abgebremst wird, (b) auf hartem Untergrund über eine Strecke von 0.005 m.
19. Eine Frau mit einer Masse von 55 kg springt von einem Tisch der Höhe 1 m. (a) Welche Geschwindigkeit hat sie unmittelbar vor dem Auftreffen auf den Boden? (b) Wenn sie mit gerade gehaltenem Körper auf dem Boden landet, wird sie innerhalb einer Strecke von 0.15 m abgebremst. Wie groß ist die mittlere Kraft, die während dieser Abbremsung auf die Frau wirkt? (c) Wenn sie während des Auftreffens Körper und Beine beugt, so erfolgt die Abbremsung über eine Strecke von 0.5 m. Welche mittlere Kraft wirkt nun auf sie?
20. Ein Raumfahrer der Masse $m = 90$ kg hat auf einem kürzlich entdeckten Planeten ein Gewicht von 1080 N. Wie groß ist die Gravitationsbeschleunigung auf diesem Planeten?
21. Welche mittlere Kraft benötigen Sie, um einen PKW der Masse 900 kg in 7 s auf eine Geschwindigkeit von 108 km/h zu beschleunigen?
22. Welchen Impuls benötigen Sie, um ein 1200 kg Auto von einer Geschwindigkeit von 30 m/s auf Ruhe abzubremsen?
23. Ein PKW durchfährt eine Kurve vom Krümmungsradius $r = 50$ m. Bei welcher Geschwindigkeit kommt er ins Schleudern, wenn der Reibungskoeffizient $\mu = 0.2$ beträgt?
24. Ein Mensch springt von einem 3 m hohen Hindernis. In dem Moment, in dem seine Füße den Boden berühren, geht er in eine Kniebeuge, durch die der Rumpf gleichförmig beschleunigt wird. (a) Welche Geschwindigkeit hat die Person in dem Moment, in dem ihre Füße auf dem Boden auftreffen? (b) Welche Kraft üben die Beine während der Beschleunigungsphase auf den Rumpf aus? (c) Schätzen Sie die Kraft ab, die sich auf den Rumpf ergeben würde, wenn die Person mit durch gestreckten Beinen springt.
25. Klassisches Karrussell mit Gondeln: Welche Winkelgeschwindigkeit ist erforderlich, um die an 7 m langen Seilen hängenden Gondeln um einen Winkel von 45° gegenüber der Vertikalen auszulenken? Welche lineare Geschwindigkeit hat die Gondel dort? Werden leere Gondeln, Gondeln mit Kindern und Gondeln mit schwergewichtigen Fahrgästen um verschiedene Winkel ausgelenkt? Begründen Sie.
26. Ein kleiner Wassertropfen im Nebel hat einen Radius von 10^{-3} cm. Er erreicht in Luft eine Endgeschwindigkeit, die durch das Stoke'sche Gesetz bestimmt ist. Bestimmen Sie diese (Dichte des Wassers 1 g/cm³, Viskosität $\eta = 10^{-4}$ g/cm²s). Bestimmen Sie außerdem die charakteristische Zeit τ_0 , mit der ein aus der Ruhe startender Tropfen sich der Endgeschwindigkeit nähert.
27. Schätzen Sie die Flugbahn ab, die Sie erhalten, wenn Sie einen Apfel mit einer horizontalen Geschwindigkeit von 10 km/s werfen.
28. Vergleichen Sie die Masse und das Gewicht eines Flugpassagiers am Boden mit den entsprechenden Werten in einer Flughöhe von 12 km. (Gravitationskonstante $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N m²/kg², Radius der Erde $r_E = 6350$ km, Masse der Erde $M_E = 5.69 \cdot 10^{24}$ kg)
29. Die Masse des Mars beträgt $6.42 \cdot 10^{23}$ kg, die Gravitationsbeschleunigung an seiner Oberfläche beträgt 3.62 m/s². Wie groß ist der Radius des Mars? (Universelle Gravitationskonstante $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻²).
30. Die Erde sei als eine gleichförmige Kugel mit einem Radius von $r = 6.38 \cdot 10^3$ km betrachtet. Bestimmen Sie die Erdmasse aus G und g . (Universelle Gravitationskonstante $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻², Gravitationsbeschleunigung $g = 9.81$ m/s².)

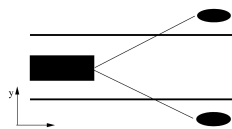
31. Eine Frau der Masse 60 kg geht mit konstanter Geschwindigkeit einen Hügel mit einer Steigung von 45° hinauf. Welche Kraft muss sie parallel zum Boden ausüben, wenn sie (a) in gerader Linie geht, (b) einem zick-zack-Kurs folgt, der zu einem effektiven Anstiegswinkel von 30° führt?
32. Ein Mann mit einer Masse von 60 kg möchte auf Eis laufen. Der Reibungskoeffizient zwischen seinen Schuhen und dem Eis beträgt 0.1. Welche Beschleunigung kann sich dieser Mensch maximal erteilen?
33. Ein Mädchen mit einer Masse von 40 kg fährt auf Skiern einen Hang mit einer Neigung von 37° relativ zur Horizontalen hinab. Der Reibungskoeffizient zwischen ihren Skiern und dem Schnee beträgt 0.1. Welche Beschleunigung erfährt sie?
34. Sprung aus größerer Höhe (Kraftstoß): Bei einem Sprung aus größerer Höhe soll man nicht mit steif durch gestreckten Beinen aufkommen sondern beim Aufprall 'in die Knie' gehen. Begründung: bei geradem Aufprall wird der Kopf (genauer das Gehirn) sonst von der Wirbelsäule 'aufgespießt'.
Zur Betrachtung der Bewegung vereinfachen wir die relevanten Körperteile zu einem physikalischen Modell. Die Zwischenwirbelscheiben wirken als Stoßdämpfer in der Wirbelsäule, d.h. Sie können sich die Wirbelsäule auch als einen festen Stab (zusammengesetzt aus den Wirbelkörpern) und einer Feder (zusammengesetzt aus den Zwischenwirbelscheiben) vorstellen. Diese 'Feder' kann um maximal 3 cm zusammengedrückt werden. Der Kopf (Masse 4 kg) ist eine auf diese Konstruktion fallende Kugel. Um nicht aufgespießt zu werden, muss der Kopf innerhalb der 3 cm, um die die Zwischenwirbelfeder komprimiert werden kann, von seiner Aufprallgeschwindigkeit auf Null abgebremst werden. Die Abbremsung bei einem Sprung aus 0.2 m Höhe erfolgt in 30 ms. Welche Kraft wirkt dabei auf den Kopf? Halten Sie einen Sprung mit durchgestreckten Knien unter diesen Bedingungen für sinnvoll? Wie weit müssen Sie 'in die Knie' gehen (bzw. welchen 'Bremsweg' benötigt Ihr Kopf), damit die Kraft das Doppelte der Gewichtskraft nicht überschreitet? Wie weit müssten Sie bei einem Sprung aus 1 m Höhe in die Knie gehen, um diesen Wert nicht zu überschreiten? Müssen Sie dazu mit angewinkelten Knien springen oder was machen Ihre Beine während des Sprunges und Aufpralls?
35. Die Mittelpunkte zweier 10 kg Kugeln befinden sich in einem Abstand von 0.1 m. (a) Wie groß ist die Gravitationskraft zwischen den beiden. (b) Wie groß ist diese Kraft im Vergleich zur Gewichtskraft auf eine der beiden Kugeln?
36. Ein 50 N Block liegt auf einer flachen, horizontalen Fläche. (a) Wenn eine horizontale Kraft von 20 N auf ihn ausgeübt wird, bleibt er in Ruhe. Wie groß ist der Reibungskoeffizient mindestens? (b) Der Block beginnt zu rutschen, wenn die Kraft 40 N beträgt. Wie groß ist der Haftreibungskoeffizient? (c) Der Block rutscht weiter, wenn eine konstante Kraft von 32 N auf ihn ausgeübt wird. Wie groß ist der Gleitreibungskoeffizient?
37. Planet Y hat eine Radius von $1/3$ dessen der Erde und eine Masse von $(1/3)^3 = 1/27$ der der Erde. Wie viel wiegt ein 70 kg Astronaut auf Y?
38. Eine 55 kg Frau möchte ein stationäres Seil hinunterrutschen, das eine maximale Kraft von 400 N halten kann. Welche maximale Beschleunigung darf die Frau erreichen, damit das Seil sicher hält?
39. Während einer Kollision wird ein 1000 kg Auto innerhalb von 2 s von einer Geschwindigkeit von 20 m/s auf Ruhe abgebremst. (a) Wie groß ist die Beschleunigung? (b) Wie groß ist die verzögernde Kraft
40. Ein 7500 N Pferd ist in der Lage, eine horizontale Kraft von 6500 N auf eine Last auszuüben. Wie groß ist der Reibungskoeffizient zwischen Hufen und Boden? (Annahme:

die vom Pferd auf die Last ausgeübte Kraft ist dadurch begrenzt, dass das Pferd ins Rutschen kommt.)

41. Ein 50 kg Container liegt auf horizontaler Fläche mit einem Haftreibungskoeffizienten von 0.3 und einem Gleitreibungskoeffizienten von 0.25. Was sind die minimalen Kräfte, um den Container in Bewegung zu versetzen und um ihn in Bewegung zu halten?
42. Ein 1000 N Schlitten befindet sich auf horizontaler Fläche, der Haftreibungskoeffizient zwischen Schnee und Schlitten beträgt 0.3, der Gleitreibungskoeffizient 0.15. Bestimmen Sie die Kraft, die notwendig ist, um den Schlitten in Bewegung zu versetzen. Welche Kraft muss aufgewendet werden, um den Schlitten in Bewegung zu halten?
43. Geostationärer Satellit (Gravitationsgesetz, Zentripetalkraft): Ein geostationärer Satellit (z.B. MeteoSat) steht scheinbar fest über einem Punkt am Äquator. Von außen auf die Erde gesehen bedeutet dies, dass der Satellit einmal in 24 Stunden um die Erde kreist. Bestimmen Sie die Flughöhe eines solchen Satelliten. Die benötigten Konstanten sind: Erdradius $r_E = 6350$ km, Masse der Erde $M_E = 5.69 \cdot 10^{24}$ kg, Masse des Satelliten $m_s = 1$ t sowie die allgemeine Gravitationskonstante $\gamma = 6.673 \cdot 10^{-11}$ N m² kg⁻². Wie ändert sich die Flughöhe des Satelliten in Abhängigkeit von seiner Masse?
Zu Zeiten des Kalten Krieges wollten die Amerikaner einen geostationären Satelliten über Moskau (geographische Breite von 62°15') stationieren. In welcher Höhe hätte dieser fliegen müssen?
44. Ein 5000 N Wagen wird von einem Pferd über einen matschigen Weg gezogen. der Reibungskoeffizient zwischen den Wagenrädern und dem Boden beträgt 0.2. (a) Welche Kraft muss das Pferd ausüben, wenn sich der Wagen mit konstanter Geschwindigkeit bewegt? (b) Der Wagen wird aus der Ruhe innerhalb von 5 s auf eine Geschwindigkeit von 5 m/s beschleunigt. Welche Kraft muss das Pferd dabei auf den Boden ausüben?
45. Eine Kurve mit Radius 900 m hat eine geneigte Fläche, so dass bei einer Geschwindigkeit von 30 m/s keine Reibung benötigt wird. Was ist der Neigungswinkel der Kurve?
46. Eine Frau läuft auf einer Kreisbahn mit Radius 100 m mit einer Geschwindigkeit von 8 m/s. Wie groß ist ihre Beschleunigung, in welche Richtung weist sie?
47. Ein Junge fährt mit dem Fahrrad eine Kurve mit Radius 200 m mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s. (a) Wie groß ist die auf ihn wirkende Beschleunigung und welche Richtung hat sie? (b) Junge und Fahrrad haben zusammen eine Masse von 70 kg. Welche Kraft ist für die Kurvenfahrt erforderlich?
48. Eine Zentrifuge zum Test der menschlichen Toleranz gegenüber Beschleunigungen hat eine Gondel in einem Abstand von 16 m von der Drehachse. Welche Geschwindigkeit ist erforderlich, um eine horizontale Beschleunigung von 11 g zu erzeugen?
49. Ein PKW fährt um eine ebene Kurve mit Radius 250 m. Der Haftreibungskoeffizient zwischen Reifen und Straße ist 0.4. Bei welcher Geschwindigkeit beginnt der PKW zu schleudern?
50. Eine Zentrifuge rotiert mit 5000 Umdrehungen pro Sekunde, die Teilchen bewegen sich auf einer Bahn mit einem Radius von 1 cm. Berechnen Sie die Zentrifugalkraft und vergleichen Sie diese mit der Gravitationskraft.
51. Reibungsklettern: ein guter Kletterschuh hat einen Haftreibungskoeffizienten μ_{Haft} von 2.75. Wie steil darf die Felsplatte maximal sein, damit der Kletterer sie ersteigen kann?
52. Ein Kletterer der Masse $m = 90$ kg befindet sich auf einer Felsplatte mit einer Neigung von 60°. Berechnen Sie die Hangabtriebskraft und die Normalkraft zum Fels. Der Kletterer steigt diese Platte ohne zur Hilfenahme der Hände nach oben. Welchen Reibungskoeffizienten müssen die Sohlen seiner Kletterschuhe haben, damit er nicht

abrutscht? Wäre es sinnvoll, bei dieser Steigung die Hände zur Hilfe zu nehmen? (Hinweis zur letzten Frage: die Platte hat keine Risse, Mulden oder sonstiges, an denen die Hände zu greifen können, sie können nur zur Abstützung eingesetzt werden, der Haftreibungskoeffizient für Hände auf Fels beträgt nur $1/10$ dessen von Kletterschuhen auf Fels. Bei der Beantwortung der Frage müssen Sie den Kletterer nicht als Massenpunkt sondern als ausgedehnten Körper betrachten, bei dem sich die Gesamtkraft auf mehrere Auflagepunkte verteilt.)

53. Fallschirmspringer (Fall mit Reibung): Ein Fallschirmspringer (90 kg) springt in 3000 m Höhe aus dem Flugzeug ab. Berechnen Sie Fallzeit und Aufprallgeschwindigkeit beim freien Fall. Der reale Fallschirmspringer erreicht aufgrund der Reibung schnell einen Grenzwert für die Geschwindigkeit. Bestimmen Sie diesen aus dem Luftwiderstand für einen Wert $c'_w = 2.25 \text{ kg/m}$. Wie lange dauert der Fall dann (vernachlässigen Sie die kurze Beschleunigungs- und Abbremsstrecke und schätzen Sie den Wert unter der Annahme ab, dass die Grenzgeschwindigkeit über die gesamte Strecke beibehalten wird).
54. Skaters Beschleunigung (Aktionsgesetz, Hangabtriebskraft): Ein Skater (65 kg) steht auf einem Hügel (Höhe 12.5 m, Neigung des Bodens gegenüber der umgebenden Ebene 12°) und lässt sich diesen herab rollen. Bestimmen Sie die auf den Skater wirkenden Kräfte. Nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit erreicht er die Ebene? Wie ändern sich diese Werte für einen flacheren Hügel (6° Neigung)?
55. Treideln (Aktionsgesetz vektoriell): Ein Salzkahn (Masse 600 kg) wird in einem Kanal von zwei Pferden getreidelt (s.u.): Das Pferd am rechten Flussufer zieht mit einer Kraft von $\vec{F}_r = (100 \text{ N}, -30 \text{ N})$, das Pferd am linken Flussufer mit einer Kraft $\vec{F}_l = (150 \text{ N}, 30 \text{ N})$. (a) Welche Gesamtkraft wirkt auf den Kahn? (b) Welche Beschleunigung können die Pferde dem Kahn erteilen? (c) Der Widerstand, den das Wasser der Bewegung des Kahns entgegen setzt, wächst mit der Geschwindigkeit. Wie groß wird diese Widerstandskraft, wenn die Pferde unter Aufwendung der oben gegebenen Kräfte den Kahn nicht mehr beschleunigen sondern nur in einer gleichförmigen Bewegung halten könnten? (d) Die Pferde können über längere Zeiträume maximal die oben gegebenen Kräfte aufwenden. Gleichzeitig soll der Kahn möglichst schnell zu seinem Ziel gelangen. Sollten die Leinen zwischen Kahn und Pferd möglichst kurz oder lang sein oder ist die Leinenlänge egal?



56. Ein Gehweg ist horizontal, an einer Auffahrt hat er einen Neigungswinkel von 3° . Normalerweise gehen Sie ohne die Neigung überhaupt wahr zunehmen über die Auffahrt. Während eines Eisregens stellen Sie jedoch fest, dass Sie die Auffahrt nicht passieren können, ohne zur Seite wegzurutschen. Wie groß ist der Reibungskoeffizient zwischen Ihren Schuhsohlen und dem Eis?
57. Ein Pflanzensamen ($m = 0.1 \text{ g}$) fällt von einem 10 m hohen Baum. Die auf ihn wirkende Reibungskraft lässt sich als Stokes'sche Reibung beschreiben mit einem Reibungskoeffizienten $\beta = 10 \text{ kg/s}$. Bestimmen Sie die maximale Fallgeschwindigkeit des Samens. Wie lange benötigt der Samen bis zum Erdboden unter der Annahme, dass er sich entlang der gesamten Fallstrecke mit der maximalen Fallgeschwindigkeit bewegt (wir vernachlässigen die Beschleunigung ganz am Anfang). Wie weit kann er von einem Wind mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s während dieser Zeit mitgeführt werden? Vergleichen Sie mit der Zeit, die der Samen im freien Fall bis zum Erdboden benötigen würde. Wie weit würde ihn der Wind dann versetzen können?

58. Seeadler auf Fischfang (inelastischer Stoß): Ein Seeadler (Masse 6 kg) fliegt mit einer Geschwindigkeit von 8 m/s direkt oberhalb der Wasseroberfläche und greift sich einen träge in der Sonne ruhenden Dorsch (Masse 2 kg). Welche Geschwindigkeit hat der Seeadler anschließend?
Ein anderer Dorsch (ebenfalls Masse 2 kg, zusätzlich Grundkenntnisse in Physik) weiß, dass der Seeadler abstürzt, wenn seine Geschwindigkeit geringer als 5.1 m/s wird. Der Dorsch beschließt daher zur Rettung seines Lebens den Seeadler beim Versuch des Beutegreifens zum Absturz zu bringen. Er schwimmt mit einer Geschwindigkeit von 4 m/s, weiß aber nicht, ob er von dem Adler weg oder auf ihn zu schwimmen soll. Geben Sie ihm den rettenden Tip.
59. Ein 10 g schwerer Feuerwerkskörper bewegt sich gradlinig gleichförmig mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}_{FK} = (3, 3, 3)$ m/s. Er zerplatzt in drei Bruchstücke, von denen das erste die Masse $m_1 = 2$ g und die Geschwindigkeit $\vec{v}_1 = (-1, 2, -3)$ und das zweite die Masse $m_2 = 5$ g und die Geschwindigkeit $\vec{v}_2 = (2, 4, 2)$ hat. Welche Geschwindigkeit hat das dritte Bruchstück?
60. Ein Schimpanse der Masse $m_S = 12$ kg bewegt sich gleichförmig gradlinig mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_S = (5, 7)$ m/s. Ein völlig verschrecktes Schimpansenjunges ($m_J = 4$ kg) kommt mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}_J = (-2, -6)$ m/s auf das Muttertier zu gerannt und klammert sich an dieses. Mit welcher Geschwindigkeit bewegen sich die beiden (gemäß Impulserhaltung) weiter?
61. Eine Billardkugel trifft eine zweite Billardkugel und wird beim Stoß um 45° aus ihrer Ursprungsrichtung abgelenkt. Zeigen Sie, dass im Fall einer elastischen Kollision die zweite Billardkugel im Winkel von 90° zur ersten fliegen muss. (Hinweis: der Impuls ist eine vektorielle Größe.)

Kapitel 6

Arbeit, Energie, Leistung

Die Newton'schen Gesetze ermöglichen zwar eine vollständige Beschreibung der Bewegungen und ihrer Ursachen, sind jedoch in ihrer Anwendung häufig etwas mühsam, z.B. dadurch, dass selbst einfache Kräfte wie die Federkraft auf eine Differentialgleichung führen. Viele Sachverhalte lassen sich durch die Anwendung von *Erhaltungssätzen* nicht ganz so detailliert dafür aber formal wesentlich einfacher beschreiben. Als Beispiel haben Sie die Impulserhaltung kennen gelernt – hier haben wir uns nicht für die Details des Stoßprozesses selbst oder die sich aus dem Kraftstoß ergebende Beschleunigung interessiert, sondern nur für den vor und nach dem Stoß vorhandenen Impuls. Als noch universelleres Werkzeug lernen Sie in diesem Abschnitt die Energieerhaltung kennen.

6.1 Definitionen

6.1.1 Arbeit

Definition 21 Die Arbeit W ist definiert als die längs eines Weges aufgewandte Kraft multipliziert mit dem Weg.

Das einfachste Beispiel ist die beim Anheben einer Masse geleistete *Hubarbeit*: hier wird Arbeit geleistet, da die Masse um ein Stück h gegen die Gravitationskraft $F_g = m \cdot g$ angehoben wird und wir erhalten für die Hubarbeit $W_{\text{Hub}} = mgh$.

Auch wenn dieses Beispiel noch zu einfach ist, um eine formale Definition der Arbeit zu erhalten, können wir es zumindest verwenden, um die Einheit der Arbeit anzugeben. Da Arbeit als ein Produkt aus Kraft und Weg definiert ist, muss die Einheit das Produkt aus N und m sein, also ein Newtonmeter Nm. Für das Newtonmeter wird häufig eine Abkürzung verwendet, das Joule J. Mit W als Formelzeichen für die Arbeit erhalten wir

$$\text{Arbeit : } W \text{ [Nm]} = [\text{J}] . \quad (6.1)$$

Bei der formalen Definition der Arbeit müssen wir eine Feinheit berücksichtigen: wir betrachten nur die Kraft entlang des Weges. Heben wir ein Fass senkrecht hoch, so verrichten wir Hubarbeit gegen die Gewichtskraft. Rollen wir das Fass dagegen eine Rampe hoch, so verrichten wir auch Hubarbeit, aber nicht gegen die Gewichtskraft sondern gegen die Hangabtriebskraft. Bei der Definition der Arbeit interessiert uns also nur die Kraftkomponente parallel zum Weg. Formal können wir dies sehr einfach dadurch angeben, dass wir nicht das Produkt aus den skalaren Größen Kraft und Weg bilden sondern uns daran erinnern, dass beide Größen vektorielle Größen sind. Wenn wir das *Skalarprodukt* verwenden (vgl. Abschn. 2.1.4, auf Seite 18 finden Sie ein Beispiel für die Berechnung der Arbeit mit Vektoren), so wird diese Beschränkung auf die Kraftkomponente parallel zum Weg direkt berücksichtigt:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot \cos \theta = F_{\parallel} \cdot s . \quad (6.2)$$

Das Skalarprodukt $\vec{F} \cdot \vec{s}$ besagt dabei, dass nur die Kraftkomponente entlang des Weges betrachtet wird.

Selbst diese Definition ist noch etwas zu einfach, da es Situationen gibt, in denen die Kraft nicht konstant ist sondern sich mit dem Ort ändert, also selbst vom Weg abhängt. Das einfachste Beispiel ist die Federkraft (5.19) aus Abschn. 6.2.3. In diesem Fall gilt als ganz allgemeine Definition für die Arbeit

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (6.3)$$

Die Integration bedeutet, dass sie den Gesamtweg in sehr viele kleine Wegstückchen $\Delta\vec{s}$ zerlegen. Innerhalb eines jeden dieser kleinen Wegstückchen ist die Kraft \vec{F} konstant, d.h. entlang eines kleinen Wegstückchens $\Delta\vec{s}$ wird eine kleine ‘Arbeitsportion’ $\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{s}$ verrichtet. Die gesamte geleistete Arbeit erhalten Sie, wenn Sie alle Arbeitsportionen aufsummieren:

$$W = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{s}_i. \quad (6.4)$$

Lassen wir unsere Wegstückchen unendlich klein werden, so muss die Summe durch ein Integral ersetzt werden und es ergibt sich die allgemeine Definition für die Arbeit in (6.3).

6.1.2 Energie

Definition 22 Energie E ist die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten.

Man kann Energie daher auch als gespeicherte Arbeit bezeichnen. In Abhängigkeit von der Art der Arbeit gibt es unterschiedliche Formen der Energie. Die Einheit der Energie ist ebenfalls das Joule J bzw. Newtonmeter Nm.

6.1.3 Leistung

Definition 23 Die Leistung P beschreibt die pro Zeit geleistete Arbeit.

Formal ergibt sich die Leistung also als

$$P = \frac{W}{t}. \quad (6.5)$$

Die Einheit der Leistung ist das Watt [W] mit $1 \text{ W} = 1 \text{ J/s}$.

6.2 Arbeit: Beispiele

6.2.1 Hubarbeit

Arbeit wird stets gegen eine Kraft verrichtet. Das einfachste Beispiel ist das Anheben einer Masse gegen die Gewichtskraft. Dabei wird Hubarbeit verrichtet. Heben Sie die Masse senkrecht um die Höhe h an, so wird eine *Hubarbeit*

$$W_{\text{Hub}} = F_g \cdot h = mg \cdot h \quad (6.6)$$

verrichtet. Die geleistete Hubarbeit W_{Hub} nimmt linear mit der Höhe h zu, um die die Masse m gehoben wird. Sie nimmt ferner linear zu mit der Masse m des angehobenen Körpers vgl. rechten Teil von Abb. 6.1.

Wenn Sie eine Masse m um eine bestimmte Strecke Δh anheben, so verrichten Sie immer die gleiche Arbeit $W_{\text{Hub}} = mg\Delta h$. Dabei ist es egal, ob Sie die Masse vom Erdboden um 1 m nach oben heben oder von einer Höhe von 2 m über dem Erdboden um einen Meter auf eine Höhe von 3 m anheben. Diese Unabhängigkeit der geleisteten Arbeit von der Ausgangshöhe müssen wir auch bei der Definition der potentiellen Energie bedenken.

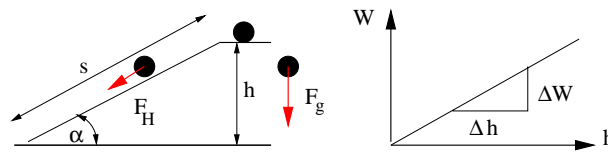


Abbildung 6.1: Schiefe Ebene (links) und Abhängigkeit der Hubarbeit von der Höhe

Schieben Sie die Masse eine schiefe Ebene hoch, so ist die Strecke, entlang derer Sie die Masse verschieben, durch die Länge $s = h / \cos \alpha$ der Ebene gegeben, vgl. Abb. 6.1. Allerdings wird die Arbeit auf der schiefen Ebene nicht gegen die Gravitationskraft sondern gegen die Hangabtriebskraft $F_H = mg \cos \alpha$ verrichtet. Die Arbeit ist damit

$$W = F_H \cdot s = mg \cos \alpha \cdot \frac{h}{\cos \alpha} = mgh \quad (6.7)$$

d.h. die *Hubarbeit hängt nur von der überwindenen Höhendifferenz ab, nicht jedoch davon, wie Sie diese überwinden*. Die physikalische Arbeit, die sie beim Besteigen eines Berges aufwenden müssen, ist also unabhängig davon, ob Sie eine relativ lange flache Route zum Gipfel nehmen oder eine steile Wand hoch klettern – ebenso wie es beim Erklimmen eines Hochhauses egal ist, ob sie konventionell das Treppenhaus benutzen (Treppe als schiefe Ebene) oder sich als Fassadenkletterer betätigen.

Bei der Gravitationskraft hängt die verrichtete Arbeit nur vom Ausgangs- und Endpunkt ab, nicht aber von dem dazwischen zurück gelegten Weg. Kräfte, die diese Eigenschaft haben, werden als *konservative Kräfte* bezeichnet. Konservativ ist hier im Wortsinne als bewahrend gemeint: dadurch, dass die geleistete Arbeit bei einer konservativen Kraft nur von den Endpunkten abhängt, kann kinetische Energie ohne Energieverlust in potentielle Energie umgewandelt werden und umgekehrt. Bei konservativen Kräften gilt also die Erhaltung der mechanischen Energie (Summe aus kinetischer und potentieller Energie).

6.2.2 Beschleunigungsarbeit

Um den Bewegungszustand eines Körpers zu ändern, ist gemäß Trägheitsgesetz eine Kraft zur Beschleunigung notwendig. Der quantitative Zusammenhang zwischen Kraft und Beschleunigung ist dabei durch das Aktionsgesetz (5.5) als $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ gegeben.

Bei der Beschleunigung wird eine Kraft \vec{F} gegen die Trägheit des Körpers aufgebracht. Diese Kraft wirkt entlang der gesamten Beschleunigungsstrecke. Letztere können wir mit Hilfe des Weg-Zeit-Gesetzes der Kinematik (4.18) bestimmen zu $\vec{s} = \vec{a}t^2/2$.

Die *Beschleunigungsarbeit* ist dann gegeben als

$$W_{\text{Beschl}} = \vec{F} \cdot \vec{s} = m\vec{a} \cdot \frac{\vec{a}}{2}t^2. \quad (6.8)$$

Berücksichtigen wir dabei das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz $\vec{v} = \vec{a}t$, so lässt sich die Beschleunigungsarbeit auch schreiben als

$$W_{\text{Beschl}} = m\vec{a} \cdot \frac{\vec{a}}{2}t^2 = \frac{m}{2}\vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{m}{2}v^2. \quad (6.9)$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, dass das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst das Quadrat des Betrages des Vektors ist – das können Sie einsehen, wenn Sie das Skalarprodukt wie in der Definition in Gleichung (2.16) in Abschn. 2.1.4 als das Produkt aus den Beträgen der Vektoren und dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels schreiben. Letzterer ist in diesem Fall 0° , d.h. der Kosinus wird 1 und das Skalarprodukt ist gleich dem Produkt der Beträge.

Nach (6.9) nimmt die Beschleunigungsarbeit W_{Beschl} linear zu mit der Masse m des beschleunigten Körpers und quadratisch mit dessen Geschwindigkeit v .

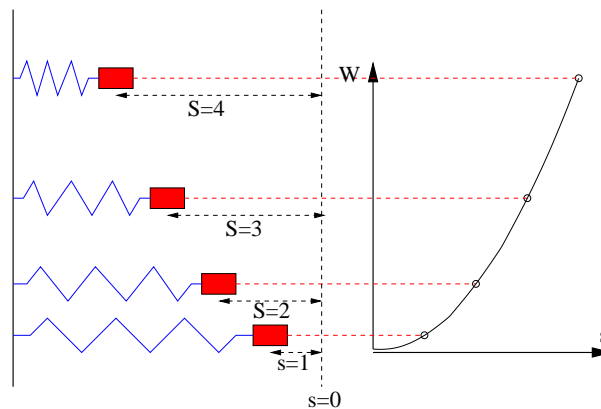


Abbildung 6.2: Arbeit beim Spannen einer Feder (links) und die sich ergebende quadratische Abhängigkeit zwischen Arbeit und Strecke, über die die Feder komprimiert wurde.

6.2.3 Arbeit beim Spannen einer Feder

Auch beim Spannen oder Dehnen einer Feder wird Arbeit verrichtet. In diesem Fall hängt die Kraft vom Weg s ab: je stärker Sie die Feder gespannt haben, um so größer wird die erforderliche Kraft $F = ks$, um die Feder noch etwas weiter zu spannen, vgl. Abb. 6.2. Bei einer vom Weg abhängigen Kraft müssen wir die allgemeine Definition (6.3) verwenden. In diesem Fall gehen wir jedoch davon aus, dass die die Kraft nur entlang des Weges wirkt. Dann können wir die Vektorpfeile weglassen und erhalten als Definition für die Arbeit

$$W_{\text{Feder}} = \int F ds . \quad (6.10)$$

Einsetzen der Kraft $F = ks$ liefert

$$W_{\text{Feder}} = \int ks ds = \frac{k}{2} s^2 . \quad (6.11)$$

Die beim Spannen einer Feder zu leistende Arbeit W_{Feder} hängt also quadratisch vom Weg s ab und linear von der Federkonstanten k . Die quadratische Abhängigkeit vom Weg ist im linken Teil von Abb. 6.2 gegeben.

6.2.4 Anwendungsbeispiele

Das Konzept der Arbeit kann verwendet werden, um technische Geräte wie Hebel, Wagenheber oder Flaschenzug zu verstehen, vgl. 6.3 In allen drei Beispielen ist Hubarbeit zu verrichten, wobei eine relativ große Masse entgegen ihrer Gewichtskraft angehoben werden soll. Die Konstruktionen von Hebel und Wagenheber sind physikalisch identisch: es wird ein Hebel derart eingesetzt, dass auf der einen Seite eine große Kraft über eine kurze Strecke wirkt, auf der anderen Seite eine kleinere Kraft über eine größere Strecke. Die Arbeit, d.h. das Produkt aus Kraft und Weg, ist auf beiden Seiten gleich. Durch Verlängerung des Weges auf der Seite, auf der die zum Heben benötigte Kraft auszuüben ist, kann mit einer geringeren Kraft die Arbeit geleistet werden, die auf direktem Weg eine zu große Kraft erfordern würde. Auch beim Flaschenzug wird diese Idee verwendet: durch die mehrfache Umlenkung des Seils wird sehr viel Seillänge unter Aufwendung einer relativ kleinen Kraft eingeholt. Die dabei verrichtete Arbeit hebt eine große Masse am anderen Seilende um ein entsprechend geringeres Stück, eben so, dass die Arbeit als Produkt aus Kraft und Weg konstant ist. Merke: mechanische Geräte wie Hebel oder Flaschenzug reduzieren zwar die aufzuwendende Kraft, da diese aber über einen längeren Weg aufzuwenden ist, ist die Arbeit die gleiche wie beim Anheben der Gegenstände ohne Verwendung dieser Hilfsmittel.

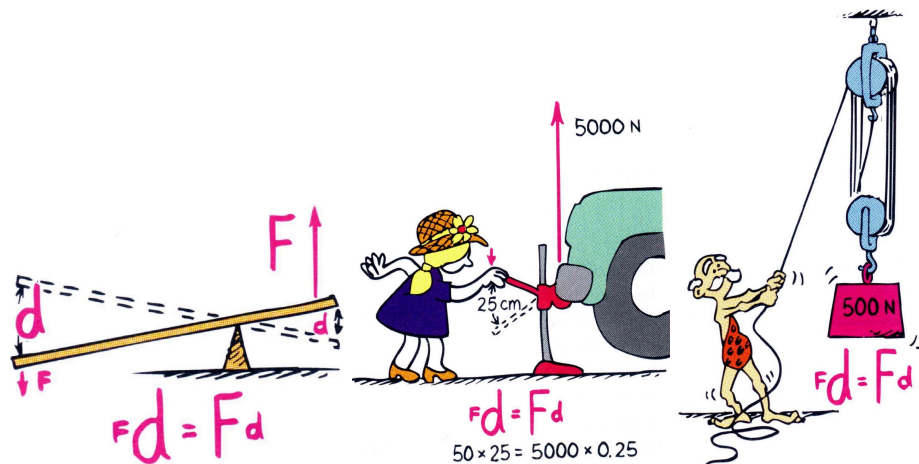


Abbildung 6.3: Hebel, Wagenheber und Flaschenzug als Beispiele für technische Geräte, die die Konstanz der Arbeit ausnutzen [22]

6.2.5 Begriffliche Probleme

Die Definition der Arbeit als die längs eines Weges verrichtete Kraft kollidiert mit der Alltagsvorstellung von Arbeit im Sinne eines Kraftaufwands. Das Tragen eines Buches (oder Kartoffelsacks) ist ebenso wenig Arbeit (im physikalischen Sinn) wie der nebenstehende Sträfling [22] Arbeit leistet: beim Tragen wirkt die Kraft, in diesem Fall die Gravitationskraft, senkrecht zur Bewegung, d.h. es gibt keine Kraftkomponente parallel zur Bewegung. Der Sträfling übt zwar eine Kraft auf die Wand aus, da sich diese aber nicht bewegt, gibt es weder einen Weg noch eine Kraftkomponente parallel dazu und die Arbeit ist ebenfalls Null.



Das Halten eines Gegenstands ist keine Arbeit im physikalischen Sinne, da die haltende Person z.B. durch einen Tisch oder ein Regal ersetzt werden kann. Letzteres ist eine statische Struktur, sie leistet sicherlich keine Arbeit beim Halten des Buches. Eine Person jedoch hat das Gefühl, Arbeit zu leisten, da sie eine Kraft aufwenden muss. Diese Arbeit ist jedoch die reine Haltearbeit der Muskulatur – die Knochen alleine bilden kein stabiles Gerüst, um den Gegenstand zu unterstützen. Stattdessen müssen die Knochen durch Muskeln an ihrer jeweiligen Stelle gehalten werden (die Notwendigkeit der Muskulatur zum Erhalt der Konfiguration der Knochen wird spätestens bei der Skelettierung deutlich). Als lebende biologische Materie benötigen die Muskeln dazu Energie (physikalische Definition s.u.). Beim Halten des Gegenstandes wird diese Energie jedoch nicht in physikalische Arbeit umgesetzt sondern in Wärme. Wenn die Muskeln einen Gegenstand heben würden, so ist der Energieeinsatz etwas größer: dann wird wieder der Großteil der Energie in den Muskeln in Wärme umgesetzt, ein kleiner Teil wird jedoch auch zum Anheben des Gegenstandes aufgewandt. In einer der folgenden Übungsaufgaben werden Sie am Beispiel des Energieinhalts einer Tafel Schokolade feststellen, wie viel physikalische Arbeit man damit verrichten kann – und wie (relativ) gering der Energiegehalt der Schokolade am Grundumsatz des Körpers ist. Daher ist der gefühlte Kraftaufwand bzw. die gefühlte eingesetzte Energie kein verwendbares Maß für die physikalische Arbeit. Wir werden in Kap. 8 nochmals auf diesen Punkt zurück kommen.

6.3 Energie

Definition 24 Energie ist gespeicherte Arbeit und damit die Fähigkeit eines Körpers, Arbeit zu verrichten.

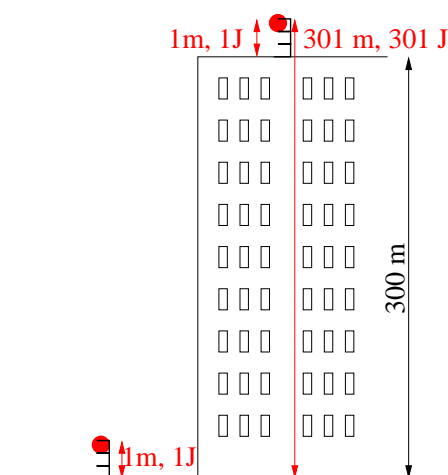


Abbildung 6.4: Potentielle Energie und Bezugsniveau, vgl. Text

6.3.1 Potentielle Energie

Die beim Anheben eines Körpers geleistete Hubarbeit ist die *potentielle Energie* dieses Körpers

$$E_{\text{pot}} = mgh . \quad (6.12)$$

Diese potentielle Energie kann verwendet werden, um Arbeit zu verrichten: so kann das in einen Stausee gehobene Wasser Arbeit verrichten, in dem es beim Abfließen einen Generator treibt, oder ein herunter fallender Stein kann Arbeit verrichten, indem er eine auf dem Boden liegende Feder komprimiert oder einen Pflöck in den Boden rammt.

Da die potentielle Energie von der Lage des Körpers (in diesem Fall der Höhe über einem Bezugsniveau) abhängt, wird die potentielle Energie als Lageenergie bezeichnet.

Bei der Definition der Hubarbeit haben wir gelernt, dass für die Arbeit nur die Hubstrecke von Bedeutung ist, nicht jedoch, von welcher Ausgangshöhe wir den Körper anheben. Das gleiche gilt für die potentielle Energie: wenn sie eine 1 kg Dose vom Fußboden auf ein 1 m hohes Regal heben, so ist die verrichtete Arbeit unabhängig davon, ob Sie dieses am Erdboden machen oder auf dem Dach eines 300 m hohen Wolkenkratzers, vgl. Abb. 6.4. In beiden Fällen haben Sie eine Arbeit von 1 J verrichtet. Entsprechend hat die Dose eine potentielle Energie von 1 J bezogen auf den jeweiligen Fußboden. wenn sie auf den Fußboden fällt, kann die Dose also jeweils eine Arbeit von 1 J verrichten. Rollt Ihnen die Dose vom Regal auf dem Hochhausdach jedoch über die Dachkante, so fällt sie bis auf den Erdboden (300 m Hochhaus plus 1 m Regalhöhe ergibt 301 m Fallhöhe) und kann eine Arbeit von 301 J verrichten. Die Dose auf dem Hochhausdach hat also eine unterschiedliche potentielle Energie je nachdem, ob sie diese auf den Erdboden oder auf den Fußboden beziehen – oder auf einen Balkon im 20. Stock. Bei der Bestimmung der potentiellen Energie ist es daher wichtig, die Bezugshöhe anzugeben. Diese sollte der Situation angemessen sein: heben Sie auf dem Dach des Hochhauses Gewichte ohne dass diese vom Dach fallen können, ist es sicherlich einfacher, als Bezugsniveau den Fußboden des Daches zu nehmen als den Erdboden. Nehmen Sie jedoch statt der Gewichte Wassereimer um ein Wasserrad am Erdboden anzutreiben, so müssen Sie auch den Erdboden als Bezugsniveau wählen. Als Faustregel: wählen Sie das Bezugsniveau so einfach wie möglich.

Die potentielle Energie kann auch verwendet werden, um einen Körper zu beschleunigen, d.h. um Beschleunigungsarbeit zu leisten: heben Sie einen Stein vom Erdboden an, so hat er eine gewisse potentielle Energie. Diese potentielle Energie hat, da sie durch Hubarbeit entstanden ist, ihren Ursprung im Schwerfeld der Erde. Beim hinab Fallen verrichtet dieses Schwerfeld Arbeit am Körper, in dem es ihn beschleunigt – die potentielle Energie im Schwerfeld wird in Beschleunigungsarbeit umgewandelt. Diesen Punkt werden wir im Zusammenhang mit der Energieerhaltung in Abschn. 6.4 noch genauer diskutieren.

Potentielle Energie wird auch als Lageenergie bezeichnet. Eine andere Situation, in der die geleistete Arbeit zu einer Lageveränderung des Körpers und damit zu potentieller Energie führt, ist die Feder. Eine gespannte Feder (oder ein gespannter Bogen) enthält ebenfalls potentielle Energie: wir müssen eine Kraft entlang eines Weges aufwenden, um die Feder zu spannen, und die gespannte Feder kann z.B. dadurch Arbeit verrichten, dass sie eine Masse weg katapultiert.

Die in der Feder gespeicherte Energie ist gleich der Arbeit, die wir zum Spannen der Feder aufwenden mussten, d.h. es ist

$$E_{\text{pot,Feder}} = \frac{k}{2}x^2. \quad (6.13)$$

6.3.2 Kinetische Energie

Die durch die Beschleunigungsarbeit induzierte Bewegung eines Körpers befähigt diesen ebenfalls, eine Arbeit zu verrichten: so kann er z.B. Hubarbeit verrichten, indem er eine Ebene heraufrollt oder über eine Winde eine Masse anhebt. Diese in der Bewegung eines Körpers gespeicherte Beschleunigungsarbeit wird als *kinetische Energie* oder *Bewegungsenergie*

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}v^2 \quad (6.14)$$

bezeichnet.

Die kinetische Energie hängt nur vom Betrag der Geschwindigkeit ab, nicht jedoch von der Richtung. Das heißt auch, dass die kinetische Energie sich nur dann ändert, wenn sich die Schnelligkeit des Körpers verändert, nicht aber, wenn sich nur die Bewegungsrichtung ändert. Bei der Kreisbewegung mit konstanter Geschwindigkeit ist auch die kinetische Energie konstant, obwohl es sich dabei um eine beschleunigte Bewegung handelt. Das mag auf den ersten Blick etwas irritieren, da bei einer beschleunigten Bewegung doch Beschleunigungsarbeit geleistet wird. Aber erinnern wir uns: bei der Kreisbewegung steht die Beschleunigung senkrecht auf der Geschwindigkeit und damit auch auf dem Weg (vgl. Abschn. 4.3). Damit steht auch die Kraft senkrecht auf Geschwindigkeit und Weg (vgl. Abschn. 5.5.7). Die Arbeit ist nach (6.2) jedoch definiert als das Produkt aus der längs eines Weges wirkenden Kraft. Dies ist bei der Kreisbewegung nicht gegeben, die Kraft ist stets senkrecht zum Weg, also wird auch keine Beschleunigungsarbeit geleistet. Die gleiche Argumentation gilt natürlich auch, wenn Sie mit dem Auto oder dem Fahrrad um eine Kurve fahren: so lange die Kraft nur eine Richtungsänderung aber keine Änderung der Schnelligkeit bewirkt, steht die Kraft senkrecht auf dem Weg und die Beschleunigungsarbeit verschwindet. Dann ist auch die kinetische Energie konstant. Erst wenn die Kraft eine Komponente parallel zum Weg hat, wird Beschleunigungsarbeit geleistet – dann ändert sich aber auch die Schnelligkeit und damit die kinetische Energie.

6.3.3 Weitere Energieformen

Kinetische Energie haben wir als eine Energieform kennen gelernt, die im Zusammenhang mit einer Bewegung auftritt. Rotation ist eine spezielle Bewegung, die in einem sich drehenden Rad enthaltene Bewegungsenergie wird als *Rotationsenergie* bezeichnet. Auf sie werden wir in Kap. 7 im Zusammenhang mit Drehbewegungen näher eingehen.

Im Zusammenhang mit dem Widerspruch zwischen dem Alltagsgebrauch des Begriffs Arbeit und der physikalischen Definition von Arbeit hatten wir bereits die Muskeln und *Wärmenergie* ins Spiel gebracht. Wärme ist die (ungeordnete) Bewegung der Atome und Moleküle eines Stoffes, d.h. die kinetische Energie der Atome bzw. Moleküle. Mit zunehmender Temperatur eines Gegenstands steigt die kinetische Energie der Atome seiner Bestandteile und die Wärmemenge im Gegenstand wird größer.

Wärmeenergie ist die Energieform, die sich am schwierigsten in andere Energieformen umwandeln lässt: zwar findet diese Umwandlung in jedem Verbrennungsmotor statt, jedoch ist der Wirkungsgrad (grob gesagt das Verhältnis aus nutzbarer anderer Energieform zur

eingesetzten Energie) relativ gering, d.h. ein großer Teil der Wärmeenergie verbleibt als Wärmeenergie.

Im Gegenzug wird Wärmeenergie jedoch in großen Mengen erzeugt: nicht nur die Muskeln wandeln die chemische Energie der Nahrung in Wärmeenergie um, auch bei der Reibung wird ein Teil der Energie in Wärme umgewandelt, eben die Bewegung der Moleküle und Atome an der Grenzfläche, an der die Reibung stattfindet. Da Reibung in praktisch allen realen Prozessen auftritt, wird stets ein Teil der Energie in Wärmeenergie umgewandelt.

Strom ist ebenfalls in der Lage, Arbeit zu verrichten (z.B. Elektromotor). Mit ihm verbunden ist die *elektrische Energie* (vgl. Kap. 11). Elektrische Energie wird z.B. im Elektromotor in Bewegungsenergie umgesetzt oder in der Herdplatte in Wärmeenergie.

6.4 Energieerhaltung

In Abschn. 5.6 haben wir den Impuls als eine Erhaltungsgröße kennen gelernt: der Gesamtimpuls eines Systems bleibt erhalten:

$$\sum_i \vec{p}_i = \text{const} . \quad (6.15)$$

Die Energie eines Systems ist ebenfalls eine Erhaltungsgröße:

$$\sum_i E_i = \text{const} \quad (6.16)$$

oder in Worten: die Gesamtenergie eines Systems bleibt erhalten.

6.4.1 Energieerhaltung beim Stoß

Diese relativ einfache formale Aussage können wir auf verschiedene Weise mit Leben füllen. Unter dem System können wir z.B. wie beim Impuls zwei Teilchen verstehen, die durch Stoß miteinander wechselwirken. Stöße können elastisch sein oder inelastisch. Beim *elastischen Stoß* bleibt die Bewegungsenergie erhalten: dann ist die gesamte kinetische Energie vor und nach dem Stoß die gleiche, jedoch kann während des Stoßes Energie von einem der Teilchen auf das andere übertragen werden

$$\frac{m_1}{2} v_{1,v} + \frac{m_2}{2} v_{2,v} = \frac{m_1}{2} v_{1,n} + \frac{m_2}{2} v_{2,v} . \quad (6.17)$$

Diese Gleichung benötigen Sie zusätzlich zur Impulserhaltung, wenn Sie beim elastischen Stoß die Energien und Impulse der beiden Teilchen nach dem Stoß bestimmen wollen.

Für den elastischen Stoß zwischen einer größeren Zahl von Körpern gilt entsprechend

$$\sum_i E_{\text{kin},i} = \text{const} \quad \text{oder} \quad \sum_i E_{\text{kin},i,v} = \sum_i E_{\text{kin},i,n} . \quad (6.18)$$

Beim elastischen Stoß, z.B. der Reflektion eines Tennisballs am Boden wie in Abb. 6.5 gezeigt, bleibt die mechanische Energie, d.h. die Summe aus kinetischer und potentieller Energie, erhalten. Die Bewegung des Balls verändert sich jedoch, da sich bei der Reflektion die Richtung der vertikalen Geschwindigkeitskomponente umkehrt. Also findet bei der Reflektion eine Beschleunigung des Balls statt. Die dazu benötigte Kraft ist parallel zur vertikalen Komponente der Bewegung (denn diese soll durch die Kraft geändert werden), d.h. es wird auch Beschleunigungsarbeit geleistet, da es eine Kraftkomponente parallel zum Weg gibt. Aus der neben stehenden Abbildung können wir uns veranschaulichen, wo die Beschleunigungsarbeit in die Bewegung eingeht und welche Kraft für die Reflektion verantwortlich ist. Im Moment des Aufpralls wird der Tennisball an der Kontaktfläche komprimiert. Dazu wird Verformungsarbeit benötigt. Sie können sich diese Situation auch in einem Modell vorstellen, in dem eine (nicht komprimierbare) Stahlkugel auf eine Feder fällt und diese komprimiert.

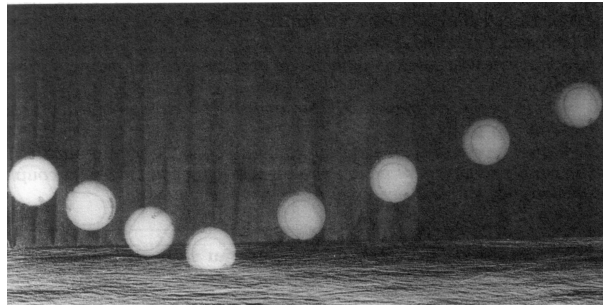


Abbildung 6.5: Reflektion eines Tennisballs am Boden [12]

Die kinetische Energie der Stahlkugel wird dann in potentielle Energie der Feder umgewandelt. Entsprechend wird die kinetische Energie des Tennisballs zur Kompression desselben verwendet. Da der Tennisball, wie auch die Feder, elastisch ist, bewirkt die Kompression eine rücktreibende Kraft. Diese beschleunigt den Tennisball in vertikaler Richtung nach oben, leistet also Beschleunigungsarbeit. Beim elastischen Stoß würde damit kinetische Energie verwendet werden, um Verformungsarbeit zu leisten. Die bei der Verformung gespeicherte Energie wird anschließend verwendet, um Beschleunigungsarbeit zu leisten, die als kinetische Energie in Erscheinung tritt. Beim Tennisball in der Abbildung ist diese Energieumwandlung nicht vollständig, da die kinetische Energie vor der Reflektion größer ist als danach (die Abstände zwischen den Ballaufnahmen werden kürzer, d.h. der während eines Zeitintervalls zurück gelegte Weg wird kleiner), d.h. die Verformung ist nicht vollständig reversibel und ein Teil der Energie geht in Wärme verloren (vgl. Übungsaufgabe).

Beim inelastischen Stoß gilt die Erhaltung der kinetischen Energie nicht. Hier wird ein Teil der kinetischen Energie in Verformungsarbeit umgewandelt und geht damit der Bewegungsenergie verloren. Diese umgewandelte Energie können Sie dadurch bestimmen, dass Sie aus der Impulserhaltung die Geschwindigkeit des beim Stoß entstandenen ‘Gesamtteilchens’ bestimmen, daraus dessen Geschwindigkeit und damit die kinetische Energie nach dem Stoß. Der Fehlbetrag gegenüber der kinetischen Energie vor dem Stoß ist dann die in die zur Verformung und zum Verschmelzen der Teilchen aufgebrauchte Energie. Oder formal für zwei Teilchen:

$$\frac{m_1}{2}v_{1,v} + \frac{m_2}{2}v_{2,v} = \frac{(m_1 + m_2)}{2}v_n + W_{\text{verform}} \quad (6.19)$$

und entsprechend für eine größere Zahl von Teilchen

$$\frac{1}{2} \sum_i m_{i,v} v_{i,v}^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i \right) v_n^2 + W_{\text{verform}} . \quad (6.20)$$

6.4.2 Ein Körper im Schwerfeld

Energieerhaltung gilt auch, wenn wir einen einzelnen Körper betrachten. Dessen Gesamtenergie kann sich aus verschiedenen Energieformen zusammensetzen. So hat der Körper beim schiefen Wurf aufgrund seiner Geschwindigkeit v eine kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$, aufgrund seiner Höhe h über dem Boden aber auch eine potentielle Energie $E_{\text{pot}} = mgh$. Betrachten wir eine Bewegung ohne Reibung, so ist die Gesamtsumme aus potentieller und kinetischer Energie, also die mechanische Energie, konstant:

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = mgh + \frac{m}{2}v^2 = \text{const} . \quad (6.21)$$

Diese Gleichung besagt, dass eine Zunahme der potentiellen Energie mit einer Abnahme der kinetischen Energie verbunden ist und umgekehrt.

Betrachten wir dies am Beispiel eines senkrechten Wurfs nach oben. Der Körper wird vom Boden abgeworfen, hat also eine potentielle Energie von Null. Dafür ist seine Geschwindigkeit jedoch groß und damit auch seine kinetische Energie. Beim Aufsteigen nimmt die Höhe über dem Erdboden zu, damit auch die potentielle Energie. Dann muss auf Grund der Energieerhaltung die kinetische Energie abnehmen, d.h. die Geschwindigkeit des Körpers wird geringer. Würden Sie nicht mit der Energie argumentieren sondern mit den Gleichungen aus der Kinematik, so würden Sie ebenfalls mit zunehmender Höhe eine Abnahme der Geschwindigkeit erwarten, da es sich um eine nach unten beschleunigte Bewegung mit Anfangsgeschwindigkeit handelt, für die das Geschwindigkeits-Zeit Gesetz (4.9)

$$v(t) = -gt + v_o \quad (6.22)$$

gilt. Die Zunahme von potentieller Energie auf Kosten der kinetischen Energie setzt sich so lange fort, bis die gesamte kinetische Energie in potentielle Energie umgewandelt ist. In diesem Moment ist der Körper am höchsten Punkt seiner Bahn (die potentielle Energie und damit die Höhe sind maximal). Von diesem Umkehrpunkt an wird die potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt, bis der Körper mit seiner Anfangsgeschwindigkeit wieder auf den Boden auftrifft. In diesem Prozess wird mit Hilfe der kinetischen Energie Hubarbeit verrichtet, die zu einer potentiellen Energie des Körpers führt. Diese potentielle Energie leistet dann Beschleunigungsarbeit, die wiederum als kinetische Energie des Körpers in Erscheinung tritt.

Wir können an diesem Beispiel die Energieerhaltung nicht nur, wie eben geschehen, qualitativ auf Plausibilität untersuchen, sondern auch quantitativ. Betrachten wir dazu einen Ball der Masse $m = 1$ kg, der mit einer Anfangsgeschwindigkeit $v_o = 50$ m/s aus einer Anfangshöhe $h_o = 0$ m senkrecht nach oben geschossen wird. Der Ball hat eine anfängliche kinetische Energie $E_{\text{kin},o} = \frac{1}{2}mv_o^2 = 1250$ J und eine anfängliche potentielle Energie $E_{\text{pot},o} = mgh_o = 0$ J. Damit ist seine Gesamtenergie zu Beginn

$$E_{\text{ges},o} = E_{\text{kin},o} + E_{\text{pot},o} = 1250 \text{ J} . \quad (6.23)$$

Nach 1 s Flugzeit erhalten wir aus dem Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz eine Geschwindigkeit von

$$v_1 = v_o - gt = 50 \text{ m/s} - 9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 1 \text{ s} = 40.19 \text{ m/s} \quad (6.24)$$

und damit eine kinetische Energie

$$E_{\text{kin},1} = \frac{1}{2}mv_1^2 = 807.6 \text{ J} . \quad (6.25)$$

In dieser einen Sekunde hat sich der Körper auch nach oben bewegt und wir erhalten für seine Flughöhe aus dem Weg-Zeit-Gesetz

$$h = -\frac{g}{2}t^2 + v_o t = -\frac{9.81 \text{ m/s}^2}{2} \cdot 1 \text{ s}^2 + 50 \text{ m/s} \cdot 1 \text{ s} = 45.1 \text{ m} \quad (6.26)$$

und damit für die potentielle Energie

$$E_{\text{pot},1} = mgh_1 = 442.4 \text{ J} . \quad (6.27)$$

Die Gesamtenergie nach 1 s ist damit

$$E_{\text{ges},1} = E_{\text{pot},1} + E_{\text{kin},1} = 442.4 \text{ J} + 807.6 \text{ J} = 1250 \text{ J} = E_{\text{ges},o} , \quad (6.28)$$

d.h. die Gesamtenergie ist die gleiche wie am Anfang der Bewegung – damit ist die Aussage der Energieerhaltung bestätigt. Sie können dieses Verfahren jetzt jeweils in Sekundenschritten weiter führen. Wir überlegen uns jedoch nur an Hand der Grundgleichungen der Kinematik bis zu welcher Höhe der Körper fliegen würde. In diesem Umkehrpunkt ist die Geschwindigkeit Null, d.h. aus dem Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz können wir die Flugzeit bestimmen:

$$0 = -gt_{\text{max}} + v_o \quad \Rightarrow \quad t_{\text{max}} = \frac{v_o}{g} = 5.1 \text{ s} . \quad (6.29)$$

Daraus ergibt sich die Flughöhe zu

$$h_{\max} = -\frac{g}{2}t_{\max}^2 + v_0 t_{\max} = 127.4 \text{ m} . \quad (6.30)$$

Die potentielle Energie im Umkehrpunkt ist auch gleichzeitig die Gesamtenergie:

$$E_{\text{ges,max}} = E_{\text{pot,max}} = mgh_{\max} = 1250 \text{ J} . \quad (6.31)$$

Damit haben wir uns davon überzeugt, dass die Gesetze der Kinematik, mit denen wir die Bewegung beschreiben, in Übereinstimmung mit dem Prinzip der Energieerhaltung sind.

In vielen Situationen kann uns die Energieerhaltung helfen, schneller zu einer Lösung eines Problems zu gelangen als wir es mit den Gesetzen der Kinematik könnten. Bei allen Bewegungen, die eine Veränderung der Höhe beinhalten (z.B. ein Skater rollt einen Hang hinab, Aufgabe 54 aus Kap. 5), kann die Lösung durch Anwendung der Energieerhaltung wesentlich einfacher gefunden werden als durch Bestimmung der Beschleunigung aus den Kräften und anschließende Anwendung einer Kombination von Weg-Zeit- und Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz. Mit Hilfe der Energie brauchen Sie für den Skater nur die potentielle Energie zu bestimmen als $E_{\text{pot}} = mgh$. Diese muss gleich der kinetischen Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2$ am Fuß des Hanges sein:

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 . \quad (6.32)$$

Auflösen nach v liefert für die Geschwindigkeit am Fuß des Hanges:

$$v = \sqrt{2gh} . \quad (6.33)$$

Diese Lösung hat gegenüber der Lösung mit Hilfe von Geschwindigkeits-Zeit- und Weg-Zeit-Gesetz den Vorteil, dass man sofort erkennt, dass die Neigung des Hanges nicht in die Lösung eingeht: die Geschwindigkeit des Skaters am Fuß des Hanges hängt nur von der Höhe, nicht jedoch vom Neigungswinkel ab, so, wie wir es von einer konservativen Kraft wie der Gravitationskraft, auch erwarten. Das ist bei Verwendung der Gleichungen aus der Kinematik nicht offensichtlich – bei Verwendung der Energieerhaltung schon, da die zur Verfügung stehende Energie die potentielle Energie ist und diese nur von der Höhe h abhängt.

6.4.3 Zusammenfassung Energieerhaltung

Die wesentlichen Beispiele für Energieerhaltung sind:

- Umwandlung mechanischer Energie von einer Form in eine andere (z.B. Achterbahn):

$$E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \text{const} . \quad (6.34)$$

oder: zu jedem Zeitpunkt ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant. Diese Erhaltung gilt nur bei Abwesenheit von Reibung. In Anwesenheit von Reibung würde kinetische Energie in Wärmeenergie umgewandelt und die mechanische Energie würde abnehmen.

- Elastischer Stoß: die gesamte kinetische Energie vor und nach dem Stoß ist gleich.

$$\Sigma E_{\text{kin,v}} = \Sigma E_{\text{kin,n}} \quad (6.35)$$

oder

$$\frac{m_1}{2}v_{1,v}^2 + \frac{m_2}{2}v_{2,v}^2 = \frac{m_1}{2}v_{1,n}^2 + \frac{m_2}{2}v_{2,n}^2 . \quad (6.36)$$

Beim elastischen Stoß gilt wieder die Erhaltung der mechanischen Energie, es wird voraus gesetzt, dass die Reibung verschwindet.

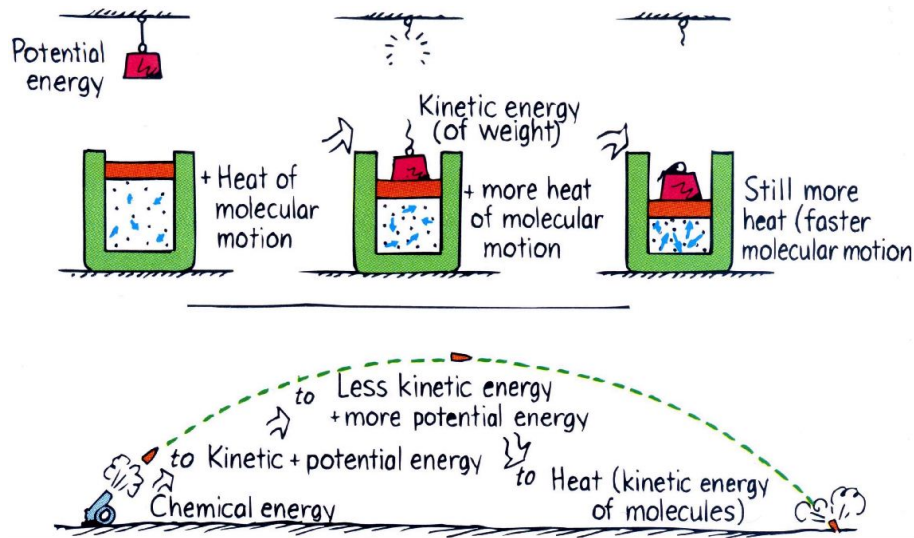


Abbildung 6.6: Umwandlung verschiedener Energieformen [22]: beim Abfeuern der Kanone wird chemische Energie in kinetische Energie umgewandelt. Diese verrichtet Hubarbeit und wird dabei in potentielle Energie umgewandelt. Im Scheitelpunkt der Bewegung ist nur noch potentielle Energie vorhanden; diese wird beim Absinken in kinetische Energie umgewandelt. Beim Auftreffen der Kugel auf den Boden wird diese Energie in Wärmeenergie umgewandelt.

- inelastischer Stoß: Energieerhaltung gilt nur für die Gesamtenergie, nicht aber für die mechanische Energie, da ein Teil der mechanischen Energie in Verformungsarbeit umgewandelt wird.

Energieerhaltung gilt immer – wenn die Gesamtenergie betrachtet wird. Für die mechanische Energie gilt Energieerhaltung nur für reibungsfreie Bewegungen und elastische Wechselwirkungen. Energieverluste durch Reibung tauchen als Wärme (thermische Energie) wieder auf, vgl. Abb. 6.6.

6.5 Leistung

Leistung im physikalischen Sinn ist definiert als Arbeit pro Zeit. Wenn Sie $n = 100$ Konservendosen (jeweils $m = 1$ kg) auf ein Regal ($h = 1$ m) heben, leisten Sie stets eine Hubarbeit von $W_{\text{Hub}} = n \cdot mgh = 981$ J, egal ob Sie diese Arbeit innerhalb von 5 min, 10 min oder 20 min erledigen. Die Leistung, die Sie dabei erbringen, ist jedoch unterschiedlich. Im ersten Fall beträgt sie $P = W/t = 981 \text{ J}/300 \text{ s} = 3.3 \text{ W}$ (die Glühlampe beim Fahrradvorderlicht hat eine Leistung von 2.4 W), in den anderen beiden Fällen ergeben sich 1.6 W bzw. 0.8 W (letzteres entspricht ungefähr dem Fahrradrücklicht).

Ein anderes Beispiel ist die Beschleunigungsarbeit: um auf ihrem Rennrad (zusammen mit Ihnen eine Masse $m = 80 \text{ kg}$) eine Geschwindigkeit $v = 15 \text{ m/s}$ zu erreichen, müssen Sie eine Beschleunigungsarbeit $W_{\text{beschl}} = \frac{1}{2}mv^2 = 9000 \text{ J}$ aufbringen. Benötigen Sie dafür 100 s , so beträgt die Leistung $P = W/t = 9000 \text{ J}/100 \text{ s} = 90 \text{ W}$ (auf dem Fahrradergometer kann ein Normalsterblicher ohne besonderes Ausdauertraining einen Maximalwert von ca. 250 W und eine Dauerbelastung von ca. 150 W erbringen – hat allerdings auch nicht mit dem Luftwiderstand zu kämpfen). Könnten Sie die Leistung des Motors von Nachbars Auto (90 kW) erbringen, so würden Sie die Beschleunigung innerhalb von $1/10 \text{ s}$ schaffen.

Die Leistung begegnet Ihnen im Alltagsgebrauch bei der Charakterisierung von Elektrogeräten. Bei einer Glühlampe hängt die geleistete Arbeit (d.h. die abgegebene Lichtmenge) von der Zeit ab, während der die Glühlampe brennt. Daher macht es keinen Sinn, die Glühlampe durch eine Arbeit zu charakterisieren. Die Leistung jedoch, d.h. die Arbeit, die

sie während einer Sekunde verrichtet, ist unabhängig von der Brenndauer und kann daher zur Charakterisierung verwendet werden. Auf die elektrische Leistung werden wir in Kap. 11 zurück kommen.

6.6 Aufgaben

6.7 Arbeit, Energie, Leistung

6.7.1 Fragen

1. Wie ist die Arbeit in der Physik definiert? Wie unterscheidet sich diese Definition vom Alltagsgebrauch?
2. Ein Kegler hebt eine Kugel vom Boden in eine Regal. Welche Größe(n) müssen Sie außer der Masse der Kugel kennen, um die dabei verrichtete Arbeit zu bestimmen?
3. Welche der beiden Kräfte verrichtet die größere Arbeit: eine 3 N Kraft, die über einen Weg von 3 m wirkt oder eine 4 N Kraft, die über einen Weg von 2 m wirkt?
4. Wieviel Arbeit verrichten Sie, wenn Sie einen Koffer durch die Hotelhalle tragen?
5. Im Gebirge winden sich Straßen normalerweise in Serpentina die Berge hinauf. Welchen Vorteil hat das gegenüber einem geraden hinauf fahren?
6. Arbeit bei der Kreisbewegung: Ein 100 g schwerer Stein wird an einer 1 m langen Leine mit einer Geschwindigkeit von 6 m/s im Kreis gewirbelt. Welche Arbeit wird dabei während einer Umdrehung verrichtet? Welche Leistung wird benötigt?
7. Erläutern Sie die Begriffe Arbeit, Energie und Leistung und den Zusammenhang zwischen diesen Begriffen. Geben Sie Beispiele und relevante Formeln.
8. Erläutern Sie das Prinzip der Energieerhaltung – verwenden Sie dabei insbesondere den Zusammenhang zwischen Arbeit und Energie.
9. Wie ändert sich die kinetische Energie eines Körpers, wenn seine Masse verdoppelt wird?
10. Wie ändert sich die kinetische Energie eines Objekts, wenn seine Geschwindigkeit verdoppelt wird?
11. Ein Objekt mit einer Geschwindigkeit von 4 m/s hat eine kinetische Energie von 40 J. Wie ändert sich die kinetische Energie, wenn die Geschwindigkeit auf 2 m/s verringert wird?
12. Ein Schlitten hat am Fuß eines Hügels eine kinetische Energie aus der Umwandlung seiner potentiellen Energie am Startort. Wie ändert sich die kinetische Energie, wenn der Schlitten aus der doppelten Höhe startet? Wie ändert sich seine Geschwindigkeit?
13. Wer hat die größere kinetische Energie: ein Supertanker am Kai oder ein Motorboot, das einen Wasserskiläufer zieht?
14. Ein rotes Auto hat eine Masse von 700 kg und eine Geschwindigkeit von 40 m/s, ein blaues Auto eine Masse von 1200 kg und eine Geschwindigkeit von 20 m/s. Welches Auto hat den größeren Impuls, welches die größere kinetische Energie?
15. Vergleichen Sie die kinetische Energie zweier identischer Körper unter den folgenden Bedingungen:
 - (a) Die Geschwindigkeit von Körper A ist doppelt so groß wie die von Körper B.

- (b) Körper A bewegt sich mit der gleichen Geschwindigkeit nach Norden, mit der sich Körper B nach Westen bewegt.
- (c) Körper A bewegt sich mit der gleichen Geschwindigkeit entlang einer geraden Linie, mit der sich Körper B entlang einer Kreisbahn bewegt.
16. Ein Objekt bewegt sich nach Süden. Eine nach Norden gerichtete Kraft wirkt auf das Objekt. Wird seine kinetische Energie zunehmen, abnehmen oder gleich bleiben?
17. Ein Objekt bewegt sich nach Osten. Wenn eine nach Süden gerichtete Kraft auf dieses Objekt wirkt, wird seine kinetische Energie dann zunehmen, abnehmen oder gleich bleiben?
18. Zwei Körper haben unterschiedliche Massen aber die gleiche kinetische Energie. Beide werden durch die gleiche verzögernde Kraft abgebremst. Welche kommt über eine kürzere Strecke zur Ruhe?
19. Zwei Körper haben unterschiedliche Massen aber den gleichen linearen Impuls. Beide werden mit der gleichen verzögernden Kraft abgebremst. Welcher kommt in der kürzeren Entfernung zur Ruhe?
20. Die Zugmaschine eines 30 Tonners verrichtet kontinuierlich Arbeit am Auflieger, selbst wenn sich dieser auf einer ebenen graden Autobahn bewegt. Warum gewinnt der Auflieger nicht kontinuierlich an kinetischer Energie?
21. Geben Sie mindestens drei Beispiele, in denen eine Kraft die kinetische Energie eines Körpers nicht ändert. Erklären Sie die Grundidee in diesen Beispielen.
22. Ist es möglich, den Impuls eines Körpers zu verändern ohne seine kinetische Energie zu ändern?
23. Welche der folgenden Kräfte bewirkt die größere Änderung in der kinetischen Energie: eine 5 N Kraft, die über eine Strecke von 3 m wirkt oder eine 4 N Kraft, die über eine Strecke von 4 m wirkt?
24. Welche der folgenden Aussagen ist wahr:
- Energieerhaltung gilt bei allen Prozessen – man muss nur die richtigen Energieformen identifizieren.
 - Beim freien Fall bleibt die Gesamtenergie erhalten.
 - Beim Fall mit Reibung bleibt die Gesamtenergie erhalten.
 - Beim freien Fall bleibt die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant.
 - Beim Fall mit Reibung bleibt die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant.
 - In Anwesenheit von Reibung gilt die Energieerhaltung nicht.
 - Bei Anwesenheit von Reibung gilt die Energieerhaltung, man muss nur den Anteil der thermischen Energie (Reibungswärme) korrekt berücksichtigen.
 - Beim elastischen Stoß bleibt die kinetische Energie erhalten.
 - Beim inelastischen Stoß bleibt die kinetische Energie erhalten.
 - Bei allen Stoßprozessen bleibt die kinetische Energie erhalten.
 - Bei allen Stoßprozessen bleibt die Gesamtenergie erhalten – man muss allerdings gegebenenfalls die thermische Energie (Verformungsarbeit) berücksichtigen.
 - Bei einer ungedämpften Schwingung wird fortwährend kinetische in potentielle Energie umgewandelt und umgekehrt, wobei die Summe der beiden konstant ist.

- Bei einer gedämpften Schwingung wird fortwährend kinetische in potentielle Energie umgewandelt und umgekehrt, wobei die Summe der beiden konstant ist.
- Bei einer gedämpften Schwingung wird fortwährend kinetische in potentielle Energie umgewandelt und umgekehrt, wobei die Summe der beiden mit der Zeit abnimmt.

25. Beschreiben Sie (verbal und formal) die folgenden physikalischen Prozesse durch die beteiligten Energieformen und die Umwandlungsprozesse. Beschreiben Sie auch, was für eine Bewegung sich ergibt und wie sich diese gegebenenfalls verändert.
- (a) Freier Fall eines Körpers im Vakuum.
 - (b) Fall eines Ahornsamens (freier Fall mit Reibung).
 - (c) Eine Kugel wird von einer Feder unter beliebigem Winkel abgeschossen (diskutieren Sie auch die Grenzfälle des horizontalen und des vertikalen Abschuss).
 - (d) Auftreffen eines Flummis auf den Erdboden.
 - (e) Auftreffen einer Knetgummikugel auf den Erdboden.
 - (f) Looping in einer Achterbahn.

Und in Erweiterung auf biologische Vorgänge:

- (a) Hochsprung.
 - (b) Abfahrtski.
 - (c) Langlaufski.
26. Ein Ball, der an einer vertikalen Feder hängt, lenkt diese aus. Wenn er aus dieser Position fällt, verringert sich seine gravitative potentielle Energie mgh . Allerdings finden Sie diese nicht vollständig als kinetische Energie wieder. Wohin verschwindet der Rest?
27. Unter welchen Bedingungen gilt die Energieerhaltung?
28. Was geschieht mit der Gesamtenergie eines Sterns, der in einer Supernova explodiert?
29. Die kinetische Energie eines Balls im freien Fall bleibt nicht erhalten. Warum ist das keine Verletzung des Prinzips der Energieerhaltung?
30. Nimmt die mechanische Energie eines Balls im freien Fall zu, ab oder bleibt sie konstant. Begründen Sie.
31. Eine Person mit einer Masse von 80 kg fällt eine Strecke von 10 m nach unten. Wieviel mechanische Energie gewinnt oder verliert er dabei?
32. Welche der folgenden Energien bleibt beim freien Fall eines Balls erhalten: die kinetische Energie, die gravitative potentielle Energie, der Impuls, oder die mechanische Energie
33. An welchem Punkt der Bahn eines idealen Pendels ist seine kinetische Energie maximal, an welchem die potentielle?
34. Wenn Reibung nicht vernachlässigt werden kann, welche Aussage können Sie dann im Bezug auf die von einem Pendel in aufeinander folgenden Schwingungen erreichte maximale Höhe machen?
35. Was geschieht mit der mechanischen Energie eines fallenden Balls wenn wir den Luftwiderstand nicht vernachlässigen können?
36. Beschreiben Sie die Energieumwandlungen, die die Erde auf ihrer elliptischen Bahn um die Sonne erfährt.

37. Ein Ball fällt aus einer Höhe von 10 m herab. Nach Reflektion am Boden erreicht er eine Höhe von 5 m. Ist irgendeine der folgenden Energien in dieser Bewegung erhalten geblieben: kinetische Energie, mechanische Energie oder potentielle Energie? Begründen Sie.
38. Stellen Sie sich ein Riesenkatapult vor, das ein Raumfahrzeug direkt bis zum Mond schleudern kann. Beschreiben Sie die Energieumwandlungen, die sich während eines solchen Fluges ereignen würden.
39. Eine Ameise, ein Elefant und ein Physikprofessor springen von einem Tisch. Vernachlässigen Sie die Reibung. Welche der folgenden Aussagen über die Bewegung der drei unmittelbar vor dem Auftreffen auf den Boden ist wahr:
- alle drei haben die gleiche kinetische Energie.
 - alle drei starten mit der gleichen potentiellen Energie.
 - alle drei haben den gleichen Impuls.
 - alle drei werden die gleiche abbremsende Kraft erfahren, wenn sie auf den Boden auftreffen.
 - alle drei haben die gleiche Geschwindigkeit.
40. Autobahnen in den Bergen der USA haben häufig ‘Notfallrampen’ für Laster, deren Bremsen versagen. Warum sind diese Rampen mit weichem Sand oder Kies bedeckt und nicht asphaltiert [?]?



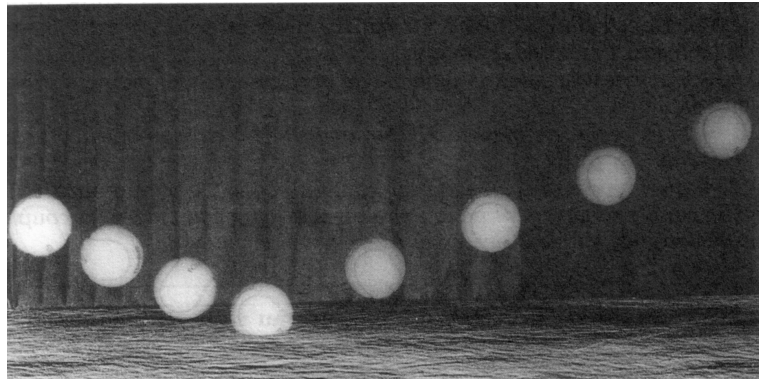
41. Sportler laufen manchmal am Strand um härter zu trainieren. Warum ist das Laufen auf weichem Sand so ermüdend?
42. Beschreiben Sie die Energieänderungen, die sich abspielen, wenn Sie ein Fahrzeug durch Bremsen zum Stillstand bringen.
43. Warum ist es nicht sinnvoll, eine potentielle Energie mit den Reibungskräften zu verbinden, so, wie wir es mit den Gravitationskräften getan haben?
44. Wie unterscheidet sich Leistung von Energie?

6.7.2 Aufgaben

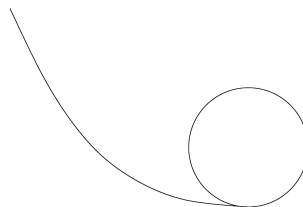
1. Ein Wanderfalke ($m = 1.2 \text{ kg}$) fliegt entlang eines Weges $\vec{s} = (3, 2, 0.5) \text{ km}$. Beim Flug muss der Falke Arbeit verrichten gegen die Gravitationskraft $\vec{F}_g = (0, 0, mg)$ und den Luftwiderstand, formuliert als eine Reibungskraft $\vec{F}_L = (4, 3, 1) \text{ N}$.
- (a) Welche Arbeit verrichtet der Falke?
 - (b) Wie groß ist seine potentielle Energie am Ende der Bewegung?
 - (c) Ist die Kraft konservativ?
 - (d) Geben Sie die Geschwindigkeit des Falken in vektorieller Form an, wenn der Falke eine Leistung von 30 W erbringen kann.

2. Wieviel Arbeit verrichtet eine 75 kg Person, die während einer Wanderung eine Höhe von 500 m gewinnt?
3. Ein 70 kg Mann rennt eine 3 m hohe Treppe in 2 s hoch. (a) Welche Arbeit verrichtet er dabei? (b) Was ist seine mittlere Leistung?
4. Ein Kind zieht ein Spielzeugauto mit einer Kraft von 10 N, die in einem Winkel von 20° gegenüber der Horizontalen angreift, auf der Horizontalen über eine Strecke von 6 m. Welche Arbeit verrichtet das Kind dabei?
5. Ein Mädchen schiebt eine 40 N Box mit konstanter Geschwindigkeit 10 m über den ebenen Boden. Welche Arbeit verrichtet sie dabei wenn der Gleitreibungskoeffizient 0.2 beträgt?
6. Schokolade (Arbeit, Energie, Leistung): Eine 100 g Tafel Schokolade hat einen Energiegehalt von 2400 kJ. (a) Bis zu welcher Höhe kann eine Person (Masse 80 kg) sich mit dieser Energie 'heben' (können Sie damit eher auf einen Deich oder den Mount Blanc krabbeln)? (b) Bis zu welcher Geschwindigkeit könnte sich diese Person auf einem Fahrrad (Masse 15 kg) beschleunigen. (c) Wie lange könnte eine 60 W Glühlampe mit dieser Energie leuchten?
7. Wie ändert sich die potentielle Energie einer 50 kg Frau, die eine Treppe mit einer Höhe von 3 m über eine horizontale Strecke von 5 m hinauf steigt?
8. Wieviel Energie wird benötigt, um eine 75 W Lampe 8 h brennen zu lassen?
9. Bestimmen Sie die kinetische Energie eines 84 kg Sprinters, der sich mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s bewegt.
10. Wieviel Arbeit verrichtet das Gravitationsfeld an einem Baseball ($m = 145$ g), der aus einer Höhe von 8 m herunter fällt?
11. Eine 2 kg Masse liegt am obersten Punkt einer 4 m hohen, reibungsfreien Rutsche. Wie groß ist die kinetische Energie der Masse am untersten Punkt der Rutsche?
12. Ein 0.4 kg Ball fällt aus einer Höhe von 5 m. Wie groß ist seine kinetische Energie wenn er auf dem Boden auftrifft?
13. Ein 1000 kg schwerer, sich reibungsfrei bewegender Achterbahnzug startet aus Ruhe aus einer Höhe von 20 m. Wie groß ist seine Geschwindigkeit, wenn er sich auf der Spitze eines 12 m hohen Hügels befindet?
14. Ein 4 kg Spielzeug-Auto mit einer Geschwindigkeit kollidiert mit einem ruhenden 1 kg schweren Spielzeug-Auto. Die beiden rollen gemeinsam mit einer Geschwindigkeit von 4 m/s weiter. Welcher Anteil an kinetischer Energie geht bei dieser Kollision verloren. Was geschieht mit dieser Energie?
15. Wieviel Energie verbraucht ein CD-Spieler mit einer Leistung von 15 W innerhalb von 8 h?
16. Wieviel Energie verbraucht ein Föhn mit einer Leistung von 300 W innerhalb von 3 min?
17. Ein 40 kg Mädchen wird auf Skiern von einem Schlepplift einen 100 m hohen Hügel hinauf gezogen. Sie war ursprünglich in Ruhe, beim Trennen vom Schlepplift hat sie eine Geschwindigkeit von 1 m/s. Welche Arbeit hat der Lift am Mädchen verrichtet?
18. Beim Stabhochsprung verwendet der Sportler den Stab um seine kinetische Energie in potentielle Energie umzuwandeln. Ein guter Läufer läuft mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s. Vernachlässigen sie den zusätzlichen Höhengewinn, den der Sportler durch Einsatz seiner Arme erreicht. Bis zu welcher Höhe kann er seinen Schwerpunkt allein durch den Anlauf heben?

19. Bestimmen Sie die Aufprallgeschwindigkeit eines Apfels, der von einem Ast in 10 m Höhe (ohne Reibung) auf den Boden fällt (a) aus der Energieerhaltung und (b) aus den aus der Kinematik bekannten Gleichungen. Könnten Sie die beiden Verfahren anwenden, wenn die Reibung berücksichtigt werden muss? Auf welche Weise können Sie die Aufprallgeschwindigkeit bei Anwesenheit von Reibung noch ermitteln?
20. Die Abbildung zeigt eine Stroboskopaufnahme des Aufprall eines Tennisballs. Die Skalen der Abbildung sind durch den Durchmesser des Tennisballs von 67 mm bestimmt sowie die Zeit von 4 ms zwischen den Blitzen [?].
- Bewegt sich der Ball von links nach rechts oder von rechts nach links?
 - Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Balls vor dem Aufprall und nach dem Aufprall.
 - Bestimmen Sie die Horizontal- und Vertikalgeschwindigkeiten des Balls vor und nach dem Aufprall.
 - Bestimmen Sie die Beschleunigung des Balls beim Aufprall, die Gesamtzeit des Kontakts zwischen Ball und Auflage beträgt 3 ms).
 - Bestimmen Sie den auf den Ball wirkenden Kraftstoß (Masse des Tennisballs $m = 60$ g).
 - Beschreiben Sie die während abgebildeten der Bewegung auftretenden Energieformen.
 - Gilt die Energieerhaltung?



21. Looping-Bahn (Energieerhaltung): Ein verspieltes Möwenjunges hat eine Vorliebe für den antriebslosen Kunstflug entwickelt, d.h. es lässt sich mit angelegten Schwingen einfach von Trägheits- und Gravitationskräften bestimmen ohne irgendwelche Flugbewegungen zu machen. Seine Spezialität sind Loopings, bei denen der Kreis einen Radius R hat. Aus welcher Höhe muss die Möwe starten?



22. Doppelter Flummi (elastischer Stoß): Zwei Flummis fallen übereinander aus 1 m Höhe auf den Boden (wurde in der Vorlesung vorgeführt). Der untere Flummi hat eine Masse von 10 g, der obere eine von 1 g. Wie hoch springt der obere Flummi?

23. Achterbahn (Leistung, Energieerhaltung): Ein vollbesetzter Achterbahnzug (Masse 3 t) wird innerhalb von 30 s auf den ersten (und höchsten) 20 m hohen 'Hügel' geschleppt. (a) Welche Arbeit verrichtet der Motor dabei? Vergleichen Sie die Leistung des Motors mit der einer 7 W Energiesparlampe. Wie lange könnte diese bei gleicher geleisteter Arbeit brennen? (b) Welche Geschwindigkeit hat die Bahn, nachdem sie diesen Hügel 'herabgefallen' ist? (c) Wie hoch darf ein Looping innerhalb dieser Achterbahn maximal sein, wenn die Bahn an dessen Spitze eine Geschwindigkeit von 1.5 m/s haben soll?
24. Potentielle Energie, kinetische Energie, Energie in Feder: Bei einem Flipper wird die Kugel durch eine gespannte Feder beschleunigt. (a) Wie groß ist die Arbeit W , die sie aufbringen müssen, um die Feder mit Federkonstante $k = 1000 \text{ N/m}$ um 2 cm zu komprimieren. (b) Wie groß ist die kinetische Energie, die eine Kugel der Masse $m = 10 \text{ g}$ durch die Feder erhält? (c) Angenommen, die Feder würde die Kugel senkrecht nach oben beschleunigen. Bis zu welcher Höhe würde die Kugel gelangen?
25. Eine Frau fährt, aus der Ruhe startend, mit Skiern einen 20 m hohen Hügel hinab. Wie groß ist ihre Geschwindigkeit am Fuß des Hügels wenn die Reibung vernachlässigbar ist.
26. Ein Kind auf einer Schaukel erreicht eine maximale Höhe von 1.2 m. Wie groß ist seine Geschwindigkeit am tiefsten Punkt der Schaukelbewegung? (Reibungskräfte vernachlässigen!)
27. Ein 4.5 N Lachs schwimmt eine Entfernung von 5 m eine Fischtreppe hinauf. Auf ihn wirkt eine Reibungskraft von 1.3 N. Die Fischtreppe überbrückt eine Höhendifferenz von 0.5 m. (a) Welche Arbeit muss der Lachs gegen die Reibung verrichten? (b) Wie groß ist die Änderung der potentiellen Energie des Fisches? (c) Wie groß ist die insgesamt vom Lachs beim Passieren der Fischtreppe verrichtete Arbeit?
28. Wasser fließt über die Oberkante der Niagarafälle (Höhe 59.9 m) mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Wassers am Fuß der Fälle? Vergleichen Sie mit der Anfangsgeschwindigkeit.
29. Ein Schlitten gleitet aus Ruhe 100 m einen Hang hinunter, der einen Winkel von 30° gegenüber der Horizontalen hat. Am Fuß des Hanges hat der Schlitten eine Geschwindigkeit von 20 m/s. Welcher Anteil der Energie geht als Reibung verloren?
30. Ein Mensch kann langfristig mechanische Arbeit mit einer Rate von 8 W/kg Körpergewicht verrichten. Wie schnell kann er treppauf laufen?
31. Ein Mädchen mit einer Masse von 80 kg klettert ein 8 m langes Seil mit konstanter Geschwindigkeit in 15 s hinauf. Wie groß ist die dabei aufgebrauchte Leistung?
32. Reisegeschwindigkeiten für Fische mittlerer Größe betragen typischerweise 0.35 m/s. Die mittlere Leistung eines Fisches sei 4.5 W/kg. Betrachten Sie einen Fisch mit einer Masse von 0.4 kg. (a) Was ist die mittlere vom Fisch aufgebrauchte Leistung? (b) Was ist die mittlere, vom Fisch auf das Wasser ausgeübte Kraft? (c) Welche Arbeit verrichtet der Fisch innerhalb von 10 min?
33. Wenn ein Lachs auf einen Stromschnelle trifft, hat er zwei Möglichkeiten, dieses Hindernis zu überwinden: wenn er schnell genug schwimmen kann, schwimmt er die Stromschnelle hinauf. Kann er dies nicht, so springt er vom Fuß der Stromschnelle auf eine Höhe, in der die Strömungsgeschwindigkeit gering genug ist, um gegen sie an zu schwimmen.
Ein Lachs hat eine maximale Schwimmggeschwindigkeit von 5 m/s in unbewegtem Wasser. Das Wasser am Fuß und am höchsten Punkt der Stromschnelle ist in Ruhe. (a) Was ist die maximale Höhe einer Stromschnelle, die der Lachs hinauf schwimmen kann?

- (b) Die Stromschnelle überwinde eine Höhendifferenz von 1 m. Wie groß ist die Geschwindigkeit des Fisches relativ zum Flussbett am Fuß der Stromschnelle? (c) Die Stromschnelle überwinde eine Höhendifferenz von 2 m. Was ist die minimale Höhe in die der Fisch springen muss, damit er den Rest des Weges gegen den Strom schwimmen kann? (d) Wie groß muss die Geschwindigkeit des Fisches in dem Moment, in dem er das Wasser verlässt sein, damit er die in (c) bestimmte Höhendifferenz überspringen kann?
34. In einem Fluss findet sich eine 6 m hohe Stromschnelle. Um Lachsen wie dem in der vorherigen Aufgabe die Passage dieser Stromschnelle zu ermöglichen wird eine Fischtreppe angelegt, die aus einer Serie von geneigten Fließabschnitten und dazwischen liegenden Ruhetümpeln besteht, in denen das Wasser nahezu in Ruhe ist. Wenn Sie jeden Tümpel zusammen mit einem Fließabschnitt als Stufe betrachten: wie viele Stufen sind mindestens erforderlich, damit der Fisch die Fischtreppe passieren kann, ohne aus dem Wasser springen zu müssen.
35. Ein (etwas älterer) Weltrekord für den 5000 m-Lauf liegt bei 796.6 s. Das entspricht einer mittleren Geschwindigkeit von 6.28 m/s. Bestimmen Sie die von einem 80 kg gegen den Luftwiderstand verrichtete Arbeit und die zugehörige Leistung. Für den Widerstandsbeiwert können Sie ansetzen $c = 89.7 \text{ N s/m}$. Vergleichen Sie mit der Rate der durch metabolische Prozesse zusätzlich bereit gestellten Energie von 3330 W.
36. Pumpspeicherkraftwerk: Wasser wird zu Zeiten geringen Bedarfs an elektrischer Energie in ein hoch gelegenes Reservoir gepumpt. Bei großem Bedarf an elektrische Energie wird dieses Wasser wieder abgelassen und treibt am Fuß des Reservoirs Turbinen. Nehmen Sie an, dass das Pumpspeicherwerk einen Wirkungsgrad von 80% hat. Wie viel Wasser wird dann benötigt, um 100 MW für 2 h zu erzeugen, wobei die Fallhöhe des Wassers 40 m beträgt?

Kapitel 7

Drehbewegung

Körper können sich nicht nur von einem Ort zu einem anderen bewegen (Translation) sondern auch rotieren (Rotation) – ohne Änderung des Ortes (z.B. sich drehende Schallplatte) oder unter Änderung des Ortes (z.B. Fahrradreifen, Dose rollt einen Hang hinunter).

Bei den bisherigen Betrachtungen von Bewegungen haben wir es uns einfach gemacht und den Körper als einen Massenpunkt behandelt: die Masse des Körpers ist in seinem Schwerpunkt konzentriert, die Ausdehnung des Körpers kann vernachlässigt werden. Bei der Behandlung der Drehbewegungen werden wir auch den Übergang vom Massenpunkt zum ausgedehnten Körper machen.

7.1 Grundbegriffe

Zur Beschreibung der Rotation verwendet man ähnliche Begriffe und Gesetze wie auch bei der Beschreibung der Translation. Die Grundgröße der Translation ist der Weg \vec{s} . Bei der Rotation tritt an seine Stelle der Drehwinkel φ .¹ Die anderen Größen der Translation sind die Geschwindigkeit als die erste Ableitung des Weges nach der Zeit und die Beschleunigung als die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit bzw. die zweite Ableitung des Weges nach der Zeit. Bei der Drehbewegung führen wir entsprechend die Rotationsgeschwindigkeit oder Winkelgeschwindigkeit ω ein sowie die Winkelbeschleunigung α , jeweils als erste bzw. zweite Ableitung des Drehwinkels nach der Zeit. Winkel, Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung sind damit die Grundgrößen der Drehbewegung. Sie sind ausreichend für eine kinematische Beschreibung.

In der Dynamik haben wir als zusätzliche Größen bei der Translation die träge Masse m eingeführt als die Eigenschaft eines Körpers, mit der er sich einer Bewegungsänderung widersetzt. Bei der Rotation tritt an seine Stelle das Trägheitsmoment I als Widerstand eines Körpers gegen die Änderung seiner Drehbewegung. Das Trägheitsmoment I enthält die Masse m des Körpers sowie seinen quadrierten Abstand r^2 von der Drehachse. Die Bewegungsgröße (Impuls, $\vec{p} = m\vec{v}$) der Translation als Produkt aus Geschwindigkeit \vec{v} und Masse m wird bei der Rotation zum Drehimpuls $\vec{L} = I\vec{\omega}$ als Produkt aus Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und Trägheitsmoment I . Bei der Translation wird die Änderung der Bewegung durch eine Kraft \vec{F} hervorgerufen. Bei der Rotation tritt an die Stelle der Kraft ein Drehmoment \vec{M} , in das außer der Kraft \vec{F} auch ihr Abstand \vec{r} vom Drehpunkt eingeht. So, wie die Kraft gleich der zeitlichen Ableitung des Impulses ist, ist das Drehmoment gleich der zeitlichen Ableitung des Drehimpulses. So wie Geschwindigkeit bei der Translation zur kinetischen Energie oder Bewegungsenergie führt, gibt es auch bei der Rotation eine kinetische Energie der Bewegung, die Rotationsenergie.

Die Tabelle 7.1 gibt die verschiedenen die Translation und Rotation beschreibenden

¹Bei der Behandlung von Drehbewegungen werden alle Winkel im Bogenmaß angegeben, s. Abschn. 2.4.1. Die Begründung hierfür wird weiter unten deutlich.

Translation	Rotation
Weg s	Winkel φ
Geschwindigkeit $v = s/t$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = \varphi/t$
Beschleunigung $a = v/t$	Winkelbeschleunigung $\alpha = \omega/t$
(träge) Masse m	Trägheitsmoment I
Kraft $F = ma = dp/dt$	Drehmoment $M = rF = dL/dt$
Impuls $p = mv$	Drehimpuls $L = I \cdot \omega$
kin. Energie $E = mv^2/2$	Rotationsenergie $E = I\omega^2/2$

Tabelle 7.1: Zusammenhang zwischen den physikalischen Größen der Translation und der Rotation

Größen. Alle Größen, und damit alle Gleichungen, sind in skalarer Form gegeben, die vektorielle Form wird, wo benötigt, im folgenden Text gegeben.

7.2 Kinematik (Beschreibung der Bewegung)

Der (Dreh)Winkel φ beschreibt den bei der Rotation überstrichenen Winkel. Die Verwendung eines Winkels ist bei einem rotierenden Körper sinnvoller als die Verwendung eines Weges: der überstrichene Winkel ist für alle Punkte auf einer Schallplatte gleich – der Weg dagegen für die Punkte nahe der Drehachse kleiner als für die am äußeren Rand, vgl. Abb. 7.1. Daher wäre die Angabe des zurückgelegten Weges s nur dann sinnvoll, wenn man gleichzeitig mit angibt, bei welchem Abstand r von der Drehachse er gemessen wurde. Diese beiden Größen sind es aber auch, die den Drehwinkel bestimmen:

$$\varphi = \frac{s}{r}. \quad (7.1)$$

Bei dieser Gleichung ergibt sich der Winkel automatisch im Bogenmaß, da das Bogenmaß ja gemäß (2.74) über das Verhältnis von Bogenlänge s zu Radius r definiert ist.

Die Geschwindigkeit haben wir in der Kinematik in (4.2) als die Änderung des Ortes mit der Zeit definiert:

$$\vec{v} = \frac{\text{Änderung des Ortes}}{\text{Zeitintervall}} = \frac{d\vec{s}}{dt}. \quad (7.2)$$

Für die *Winkelgeschwindigkeit* ω verwenden wir eine entsprechende Definition:

$$\omega = \frac{\text{Änderung des Winkels}}{\text{Zeitintervall}} = \frac{d\varphi}{dt} \quad \left[\frac{1}{s} \right]. \quad (7.3)$$

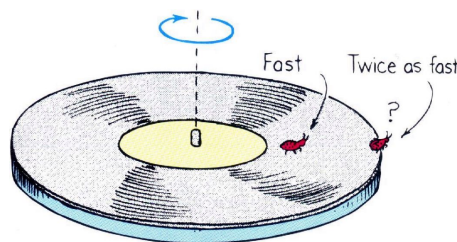


Abbildung 7.1: Die Geschwindigkeit v hängt vom Abstand des Käfers von der Drehachse ab, die Winkelgeschwindigkeit ω nicht [22]

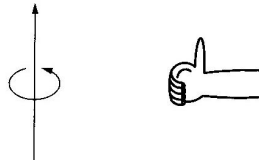


Abbildung 7.2: Definition eines Rechtssystems über die Rechte-Hand-Regel

Die Winkelgeschwindigkeit beschreibt also die Änderung des Winkels mit der Zeit. Ihre Einheit ist $1/s$, da der Winkel keine Einheit hat. Bei der Kreisbewegung ist die Winkelgeschwindigkeit mit der Geschwindigkeit verbunden über

$$v = r \cdot \omega . \quad (7.4)$$

Dies lässt sich aus (7.1) herleiten. Dort war $s = \varphi \cdot r$. Ableiten nach der Zeit ergibt

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(\varphi \cdot r) = r \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega . \quad (7.5)$$

Da der Abstand r von der Drehachse konstant ist, kann er im letzten Schritt vor die Differentiation gezogen werden.

Bei Drehbewegungen (und anderen periodischen Vorgängen) wird häufig die *Frequenz* angegeben als die Zahl der Umdrehungen pro Sekunde. Die Frequenz f ist mit der Winkelgeschwindigkeit ω verbunden über die Gleichung

$$\omega = 2\pi \cdot f . \quad (7.6)$$

Diese Gleichung können Sie sich leicht klar machen: wenn sich ein Körper einmal pro Sekunde dreht (d.h. $f = 1/s$), so wird dabei ein voller Kreis beschrieben, d.h. es wird ein Winkel von 2π überstrichen. Die Winkelgeschwindigkeit wäre also $2\pi/s$.

Physikalisch sind die Definitionen von Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit ähnlich, formal unterscheiden sie sich dadurch, dass die Geschwindigkeit als Vektor definiert ist, wir für die Winkelgeschwindigkeit bisher jedoch nur eine skalare Form kennen gelernt haben. Bei der Translation weist der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} in die Richtung, in die sich das Teilchen zum jeweiligen Zeitpunkt bewegt. Bei der Rotation würde der Vektor der Geschwindigkeit \vec{v} eines Punktes auf dem Körper ebenfalls zu jedem Zeitpunkt die Richtung angeben, in die sich das Teilchen bewegt. Dieser Vektor würde sich bei einer Rotation mit konstanter Winkelgeschwindigkeit (z.B. drehende Schallplatte) während der Bewegung ständig in der Richtung, nicht jedoch im Betrag ändern. Um diese Komplikation zu vermeiden, führt man für die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ einen Vektor ein, der in seiner Richtung mit der Drehachse übereinstimmt und in seinem Betrag mit der Definition der Winkelgeschwindigkeit in (7.3). Die Übereinstimmung mit der Drehachse alleine reicht nicht aus, um die Bewegung eindeutig zu beschreiben, da wir dann noch nicht wissen, ob der Körper links herum oder rechts herum rotiert. Der Vektor $\vec{\omega}$ wird daher so festgelegt, dass aus seiner Richtung auch die Richtung der Drehbewegung deutlich wird: die Richtung von $\vec{\omega}$ parallel zur Drehachse ist so festgelegt, dass wenn der Daumen der gekrümmten rechten Hand in Richtung der Drehachse zeigt, die restlichen Finger den Drehsinn der Bewegung beschreiben (Rechte-Hand-Regel, vgl. Abb. 7.2). Damit ist die Festlegung der Richtung der Winkelgeschwindigkeit eine Konvention und nicht vergleichbar mit der Bewegungsrichtung eines Körpers mit der Geschwindigkeit \vec{v} . In vektorieller Form gilt für den Zusammenhang zwischen der Bahngeschwindigkeit \vec{v} und der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} . \quad (7.7)$$

(Das Kreuzprodukt zwischen Vektoren wurde in Abschn. 2.1.5 näher erläutert.) Dieser Zusammenhang ist konsistent mit der oben gegebenen Definition für die Richtung von $\vec{\omega}$: die drei

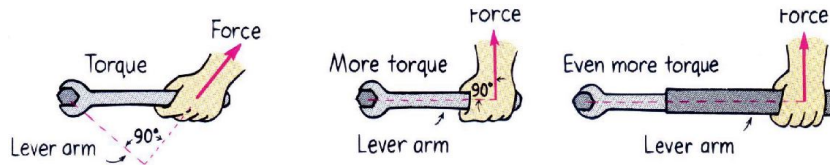


Abbildung 7.3: Für ein Drehmoment sind die Kraftkomponente senkrecht zum Hebelarm und die Länge des Hebelarms bestimmend [22]

Vektoren \vec{v} , $\vec{\omega}$ und \vec{r} bilden gemäß Definition des Kreuzprodukts ein Rechtssystem. Insbesondere steht bei der Kreisbewegung der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} senkrecht auf dem Ortsvektor \vec{r} , so dass durch (7.7) automatisch auch (7.3) erfüllt wird. Außerdem ist der Geschwindigkeitsvektor \vec{v} senkrecht zu der durch $\vec{\omega}$ beschriebenen Drehachse – was ebenfalls sinnvoll ist, da \vec{v} in der Ebene der Bewegung liegt, die Drehachse aber senkrecht dazu steht.

Bei der Translation haben wir die Beschleunigung als die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit definiert:

$$\vec{a} = \frac{\text{Änderung der Geschwindigkeit}}{\text{Zeitintervall}} = \frac{d\vec{v}}{dt}. \quad (7.8)$$

Entsprechend können wir die Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$ definieren als die Änderung der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ mit der Zeit:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (7.9)$$

Wie die Beschleunigung bei der Translation kann die Winkelbeschleunigung eine Änderung des Betrages der Winkelgeschwindigkeit bewirken oder eine Änderung der Richtung der Winkelgeschwindigkeit. Der erste Fall entspricht der Veränderung der Drehzahl bei fester Drehachse, der zweite Fall einer Änderung der Drehachse. Ist die Winkelbeschleunigung parallel zur Winkelgeschwindigkeit ($\vec{\alpha} \parallel \vec{\omega}$), so ändert sich nur die Drehzahl (der Betrag der Winkelgeschwindigkeit), nicht aber die Richtung der Drehachse und damit die Lage der Drehebene im Raum. Steht die Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$ senkrecht auf der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$, so verändert sich die Richtung von $\vec{\omega}$, d.h. die Richtung der Drehachse, nicht aber der Betrag. Bei beliebigem Winkel zwischen Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung ändert sich sowohl der Betrag der Winkelgeschwindigkeit als auch die Lage der Bahnebene im Raum.

7.3 Dynamik: Ursache von Drehungen

Newton's Aktionsgesetz $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ beschreibt die von einer Kraft \vec{F} an einer trägen Masse m bewirkte Änderung der Bewegung durch die Beschleunigung \vec{a} . Dieser Zusammenhang gilt für die Translation. Bei der Rotation haben wir ebenfalls eine Änderung der Bewegung durch eine Beschleunigung, die Winkelbeschleunigung α . Wir müssen uns nun überlegen, welche physikalische Größe für die Änderung einer Drehbewegung verantwortlich sein kann.

7.3.1 Drehmoment

An Hand eines Schraubenschlüssels können wir uns veranschaulichen, dass die Angabe der Kraft alleine nicht ausreicht, um die Änderung einer Drehbewegung korrekt zu beschreiben, vgl. Abb. 7.3. Zum einen spielt der Abstand r zwischen dem Drehpunkt und dem Angriffspunkt der Kraft an der Schraube eine Rolle: eine Kraft, die am Drehpunkt angreift, führt zu keiner Winkelbeschleunigung. Außerdem wird die Wirkung der Kraft (und damit die Winkelbeschleunigung) um so größer, je weiter entfernt vom Drehpunkt die Kraft angreift: daher fasst man den Schraubenschlüssel am Ende an oder verlängert sogar seinen Griff, z.B. durch

ein aufgestecktes Rohr. Diesen Abstand zwischen dem Drehpunkt und dem Angriffspunkt der Kraft bezeichnet man als Hebelarm.

Aber nicht nur der Hebelarm beeinflusst die von einer gegebenen Kraft bewirkte Änderung der Bewegung sondern auch die Richtung der Kraft. Greift die Kraft senkrecht zum Hebelarm an, so erfolgt die gewünschte Änderung der Bewegung. Eine Kraft, die parallel zum Hebelarm wirkt, bewirkt dagegen keine Winkelbeschleunigung – sie kann höchstens zu einer Translationsbewegung des Hebels führen. Von Kräften, die unter einem beliebigen Winkel zum Hebelarm angreifen, bewirkt jeweils die Kraftkomponente senkrecht zum Hebelarm die Änderung der Drehbewegung.

An die Stelle der Kraft als die bei der Translation eine Beschleunigung hervorrufende Größe tritt bei der Rotation also eine Größe, in der der Hebelarm und eine Kraftkomponente senkrecht zum Hebelarm zusammen gefasst werden. Diese Größe wird als Drehmoment bezeichnet:

$$\text{Drehmoment} = \text{Hebelarm mal Kraftkomponente senkrecht zum Hebelarm} . \quad (7.10)$$

Wie bei der Arbeit haben wir hier ein Produkt aus Kraft und Weg, jedoch betrachten wir in diesem Fall nicht die Kraftkomponente parallel sondern die senkrecht zum Weg. Formal haben wir bei der Arbeit das Skalarprodukt verwendet, um diese Beschränkung auf die parallele Kraftkomponente auszudrücken. Das Produkt aus Weg und Kraftkomponente senkrecht zum Weg können wir in vektorieller Form durch das Kreuzprodukt (Abschn. 2.1.5 relativ einfach darstellen). Das *Drehmoment* können wir dann definieren als

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} . \quad (7.11)$$

Für den Betrag des Drehmoments erhalten wir mit der Definition des Kreuzprodukts

$$|\vec{M}| = |\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \theta = r F_{\perp} . \quad (7.12)$$

Darin ist θ der Winkel zwischen dem Hebelarm und der Kraft und damit $F \sin \theta$ die Kraftkomponente senkrecht zum Hebelarm. Jetzt müssen wir uns nur noch die Richtung des Drehmoments veranschaulichen. Das Drehmoment ist ein Vektor, der senkrecht sowohl auf dem Hebelarm als auch auf der Kraft steht, d.h. der Vektor weist in Richtung der Drehachse.

Da das Drehmoment ebenso wie die Arbeit ein Produkt aus einer Kraft und einem Weg ist, ist die Einheit des Drehmoments ebenfalls das Newtonmeter Nm.

Bei einem Schraubenschlüssel hat man einen Hebel, der am Drehpunkt (d.h. an der Schraube) beginnt, und bei dem die Kombination aus Hebelarm und Kraft zu einem Drehmoment und damit zu einer Drehbewegung führen. Greift jedoch eine zweite Kraft am Schraubenschlüssel derart an, dass ein Drehmoment gleichen Betrages aber entgegen gesetzter Richtung entsteht, so heben sich diese Drehmomente auf und es kommt zu keiner Rotation. Anschaulich ist dies der Fall, wenn am gleichen Punkt je eine Kraft (gleicher Betrag) versucht, den Schraubenschlüssel im und entgegen dem Uhrzeigersinn zu drehen. Es entsteht also keine Rotation (oder genauer keine Änderung der Winkelgeschwindigkeit), wenn sich die Drehmomente, die von den beiden Kräften ausgeübt werden, aufheben. Wir können diese Aussage auf beliebig viele Kräfte verallgemeinern und formal schreiben

$$\sum_i \vec{M}_i = \sum_i (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0 . \quad (7.13)$$

Dieses allgemeine Gesetz hilft uns auch, die Hebelgesetze zu verstehen. Ein Hebel (oder ein Wippe) unterscheiden sich vom Schraubenschlüssel dadurch, dass der Drehpunkt nicht am Ende liegt sondern in der Mitte, d.h. es können auf beiden Seiten des Drehpunkts Kräfte angreifen. In beiden Beispielen wirken (bei normaler Anwendung) auf beiden Seiten des Drehpunktes die Gewichtskräfte von Körpern senkrecht zum Hebel nach unten, wir können das Drehmoment daher in der vereinfachten Form als Kraft mal Hebelarm angeben. Die Hebelarme weisen jedoch in die entgegengesetzte Richtung, d.h. die Drehmomente sind einander in der Richtung ebenfalls entgegengesetzt. Damit der Hebel bzw. die Wippe im Gleichgewicht

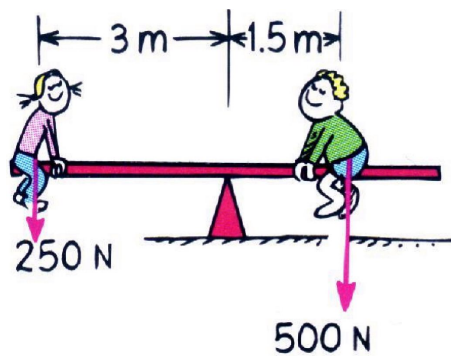


Abbildung 7.4: Wippe als Beispiel für die Anwendung des Drehmoments (Hebelgesetz) [22]

bleibt, müssen die Beträge dieser beiden Drehmomente ebenfalls gleich sein, d.h. auf beiden Seiten muss das Produkt aus Kraft und Hebelarm gleich sein. Das ist aber genau die Vorschrift, die Ihnen als *Hebelgesetz* bekannt sein sollte und die Sie intuitiv anwenden, wenn Sie sich auf der Wippe näher zum Drehpunkt setzen.

Bei der Wippe in Abb. 7.4 können wir als erstes die Gleichheit der Beträge des Drehmoments überprüfen. Auf der linken Seite der Wippe erhalten wir $M_l = 3 \text{ m} \cdot 250 \text{ N} = 750 \text{ Nm}$, auf der rechten $M_r = 1,5 \text{ m} \cdot 500 \text{ N} = 750 \text{ Nm}$ und damit wie gefordert $M_r = M_l$. Das Drehmoment weist auf der linken Seite in die Zeichenebene hinein, auf der rechten Seite aus ihr heraus, d.h. die Drehmomente links und rechts haben den gleichen Betrag aber entgegengesetzte Richtung. Damit bleibt die Wippe in Ruhe.

Abbildung 7.5 zeigt ebenfalls eine Wippe, allerdings sitzt hier das eine Kind nicht auf dem Balken sondern hängt an einer Schaukel unter ihm. Die Gewichtskraft wirkt senkrecht nach unten und damit senkrecht zum Balken der Wippe. Damit ist die Länge des Balkens vom Drehpunkt gemessen, d.h. die mit 3 m markierte Strecke, der Hebelarm, nicht aber der Abstand des Kindes vom Drehpunkt, d.h. die mit 5 m markierte Strecke.

Ein Beispiel für einen unkonventionell gebauten Hebel ist ein Baum im Wind, vgl. Abb. 7.6. Die Kräfte, die auf den Baum wirken, sind zum einen seine Gewichtskraft $F_g = mg$, zum anderen eine durch den auf die Krone wirkenden Wind hervorgerufene Kraft. Diese ist durch den Luftwiderstand und die entsprechende Reibungskraft aus (5.47) in Abschn. 5.5.6 beschrieben.² Die Geometrie der Hebelarme ist jedoch relativ kompliziert. Wenn ein Baum

²Bei der Betrachtung der Bewegung eines Körpers in einem strömenden Medium kommt es nur auf die relative Geschwindigkeit Moleküle des Mediums gegenüber dem Körper an. Dabei ist es egal, ob sich der

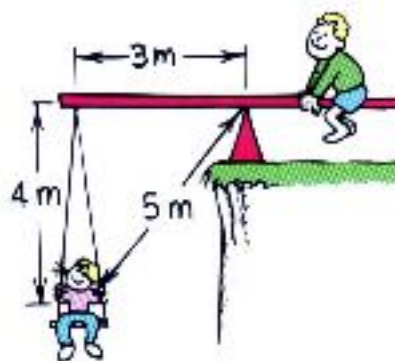


Abbildung 7.5: Der Hebelarm und der Abstand zur Drehachse sind nicht immer identisch [22]

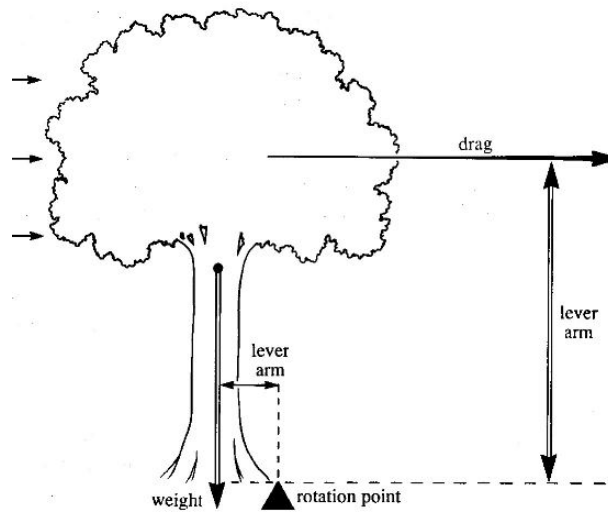


Abbildung 7.6: Baum als Hebel [48]

durch Wind umgestürzt wird, so wird er dabei um einen Punkt der Wurzel relativ nahe am Stamm gedreht, d.h. der Hebel ist die horizontale. Die eine am Hebel angreifende Kraft ist einfach zu verstehen, das ist die Gewichtskraft des Baums, die im Abstand von einem halben Baumdurchmesser von diesem Drehpunkt entfernt angreift. Das sich ergebende Drehmoment weist senkrecht aus der Papierebene heraus. Die zweite Kraft ist und der Stamm ist der. Das daraus resultierende Drehmoment weist in die Papierebene hinein. Damit gehen in die Stabilität des Baumes zwei Drehmomente ein: die Gewichtskraft $F_g = mg$ multipliziert mit dem halben Stammdurchmesser r_{Baum} am Fuß des Baumes: $M_g = r_{\text{Baum}} \cdot F_{g,\text{Baum}}$. Dieses würde eine Drehung in den Erdboden bewirken – hat also keine Wirkung, da der Erdboden diese Bewegung behindert. Das zweite Drehmoment ist durch die durch den Luftwiderstand bewirkte Reibungskraft $F_{\text{LW}} = \frac{1}{2}c_w \rho A v^2$ und die Länge des Baumstammes h_{Baum} als Hebelarm gegeben. Dieses alleine würde eine Drehung in die entgegengesetzte Richtung bewirken, d.h. den Baum entwurzeln. Solange das durch den Luftwiderstand bewirkte Drehmoment kleiner ist als das durch die Gewichtskraft bewirkte, bleibt der Baum stabil. Ein Umstürzen erfolgt erst für

$$\frac{1}{2}\rho A c_w v^2 h_{\text{Baum}} > m_{\text{Baum}} g r_{\text{Baum}} , \quad (7.14)$$

Der Baum verändert sich nur langsam langsam, d.h. der halbe Durchmesser r_{Baum} , die Stammhöhe h_{Baum} und seine Masse m_{Baum} sind Konstanten. Gleiches gilt für die Gravitationsbeschleunigung g und die Dichte der Luft ρ . Variabel ist dagegen die Windgeschwindigkeit v und je nach Art des Baumes die Fläche über die der Wind angreifen kann und der Widerstandsbeiwert c_w (einige Pflanzen rollen bei Wind die Blätter ein, falten sie zusammen oder stapeln sie übereinander, wir werden in der Hydrodynamik (Abschn. 10.7.3) noch einmal darauf zurück kommen – dadurch werden sowohl A als auch c_w verringert). Im begrenzten Rahmen kann der Baum eine Erhöhung der Windgeschwindigkeit also durch Verringerung von A und c_w ausgleichen. Nimmt die Windgeschwindigkeit darüber hinaus zu, so wird der Baum entwurzelt, wenn Glg. (7.14) erfüllt ist, d.h. wenn

$$v > \sqrt{\frac{2m_{\text{Baum}} g r_{\text{Baum}}}{\rho A c_w h_{\text{Baum}}}} . \quad (7.15)$$

Körper durch das Medium bewegt (fallender Fallschirmspringer, fahrendes Auto) oder der Körper in Ruhe ist und das Medium an ihm vorbei strömt (Baum im Wind, Auto im Windkanal). Die Tatsache, dass es nur auf die Relativgeschwindigkeit ankommt, ist der Grund dafür, dass man Autos oder Schiffe in Wind- bzw. Strömungskanälen testen kann.

7.3.2 Drehimpuls

Bei der Translation haben wir in Newton's Aktionsgesetz die Kraft als verantwortlich für eine zeitliche Änderung des Impulses $\vec{p} = m\vec{v}$ kennen gelernt:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (7.16)$$

Als Analogon zur Kraft haben wir bereits das Drehmoment eingeführt. Entsprechend wird ein Drehimpuls eingeführt, so dass das Drehmoment \vec{M} zu einer Änderung des *Drehimpulses* \vec{L} führt:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (7.17)$$

Den Zusammenhang zwischen dem linearen Impuls \vec{p} und dem Drehimpuls \vec{L} können wir uns formal einfach verschaffen. Erinnern wir uns dazu an die Bewegung entlang einer gekrümmten Linie als eine Annäherung an die Kreisbewegung. Wir können den Ort unserer Masse m durch den Vektor \vec{r} beschreiben, ihre Geschwindigkeit durch den Vektor \vec{v} und ihren Impuls durch den Vektor \vec{p} . Eine Abweichung von der gradlinigen Bewegung gibt es nur dann, wenn der Geschwindigkeits- und damit auch der Impulsvektor eine Komponente senkrecht zum Ortsvektor haben. Dann ist formal das Kreuzprodukt aus Ortsvektor und Impuls ungleich Null. Diese Größe wird als *Drehimpuls* \vec{L} definiert:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (7.18)$$

Im Spezialfall einer Kreisbahn ist der Zusammenhang zwischen der linearen Geschwindigkeit \vec{v} und der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ nach Glg. (7.7) gegeben zu

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (7.19)$$

Einsetzen dieses Zusammenhangs in Glg. (7.18) liefert

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v} = m\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m[(\vec{r} \cdot \vec{r})\vec{\omega} - (\vec{r} \cdot \vec{\omega})\vec{r}] = (mr^2)\vec{\omega}, \quad (7.20)$$

da der Ausdruck $\vec{r} \cdot \vec{\omega}$ wegen $\vec{r} \perp \vec{\omega}$ verschwindet. So wie der lineare Impuls proportional der Geschwindigkeit ist, ist der Drehimpuls \vec{L} proportional der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$. Die Proportionalitätskonstante ist das *Trägheitsmoment* I . Damit lässt sich für den Drehimpuls schreiben

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}. \quad (7.21)$$

Für den Spezialfall der Punktmasse ergibt sich durch Vergleich mit Glg. (7.20) das Trägheitsmoment zu

$$I = mr^2. \quad (7.22)$$

7.3.3 Trägheitsmoment

In (7.22) haben wir das Trägheitsmoment für einen Massenpunkt angegeben. Dieses hängt linear ab von der Masse m und quadratisch vom Abstand r des Punktes von der Drehachse. Wie können wir das auf ausgedehnte Körper übertragen? Ist der ausgedehnte Körper weit von der Drehachse entfernt (z.B. Satellit auf seiner Bahn um die Erde, geschleudertes Stein an einem Band), so können wir ihn weiter als einen Massenpunkt behandeln. Liegt die Drehachse jedoch im Körper (Karussell, ein Tumbleweed rollt durch die Wüste), so zerlegen wir diesen Körper in sehr viele kleine Massenelemente Δm und bestimmen für jedes dieser Massenelemente das Trägheitsmoment gemäß Glg. (7.22). Das Trägheitsmoment des Körpers erhalten wir durch Summation über die Massenelemente:

$$I = \sum_i (\Delta m r_i^2). \quad (7.23)$$

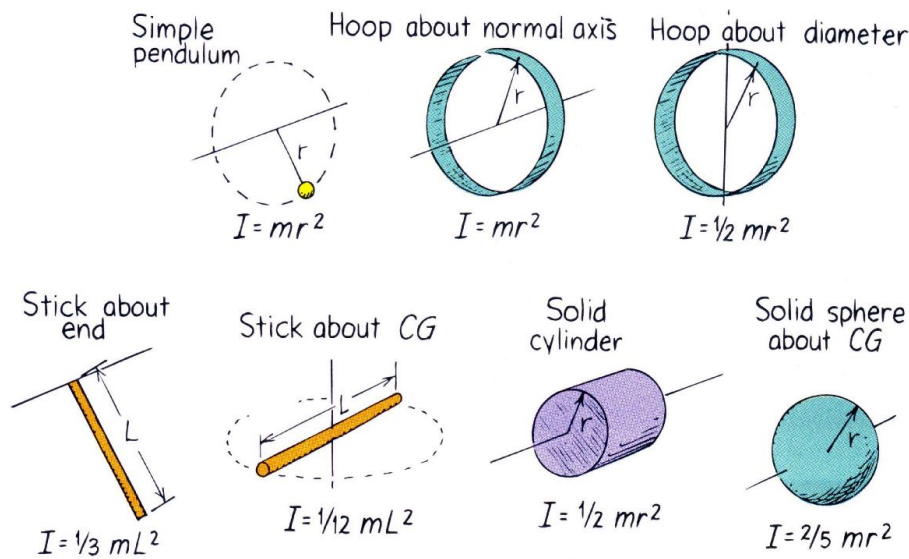


Abbildung 7.7: Trägheitsmomente verschiedener ausgedehnter Körper [22]

Ganz korrekt müssen wir unendlich kleine Massenelemente dm verwenden und dann statt der Summe das Integral bilden:

$$I = \int r^2 dm . \quad (7.24)$$

Mit dieser Gleichung lassen sich die Trägheitsmomente beliebiger Körper bei der Rotation um beliebige Achsen berechnen. Einige Beispiele sind in der Abbildung gegeben.

7.3.4 Drehmoment und Winkelbeschleunigung

Gleichung (7.17) gibt das Äquivalent zu Newton's Aktionsgesetz der Translation für die Drehbewegung: ein Drehmoment führt zur Änderung des Drehimpulses, oder formal

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} . \quad (7.25)$$

Setzen wir hier den Drehimpuls aus (7.18) ein, so erhalten wir

$$\vec{M} = \frac{d(I \cdot \vec{\omega})}{dt} = I \cdot \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \cdot \vec{\alpha} . \quad (7.26)$$

Dabei haben wir beim zweiten Gleichheitszeichen voraus gesetzt, dass das Massenträgheitsmoment konstant ist. Letzteres ist für einen Massenpunkt stets erfüllt.

Gleichung (7.26) ergibt also das Drehmoment mit der Winkelbeschleunigung – so, wie das Aktionsgesetz die Kraft mit der Beschleunigung. Verbal lässt sich die Gleichung formulieren als: die Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha}$ der Drehbewegung ist der Ursache, dem Drehmoment \vec{M} proportional.

7.4 Drehimpulserhaltung

Insbesondere besagt (7.17), dass der Drehimpuls erhalten bleibt, wenn kein Drehmoment auf den Körper wirkt. Das kennen wir von der Translation als Trägheitsgesetz.

Da der Drehimpuls eine vektorielle Größe ist, bedeutet Drehimpulserhaltung, dass sowohl die Richtung als auch der Betrag des Drehimpulses erhalten bleiben. Eine Anwendung der Drehimpulserhaltung ist die Pirouette beim Eiskunstlauf, vgl. Abb. 7.8. Die Bewegung beginnt mit einer relativ kleinen Winkelgeschwindigkeit ω_1 bei ausgestreckten

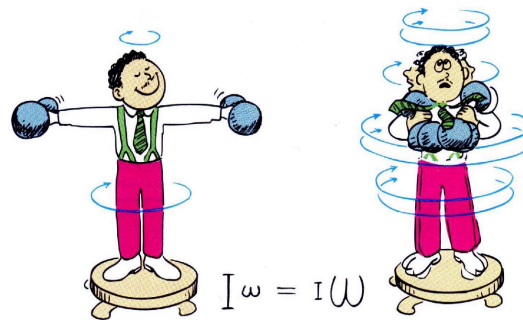


Abbildung 7.8: Die Drehimpulserhaltung bei der Pirouette: Verringerung des Trägheitsmoments durch Anziehen der Arme führt zu einer Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit [22]

Armen. Dadurch haben Teile des Körpers einen großen Abstand von der Drehachse und das Trägheitsmoment I_1 ist groß. Der Drehimpuls $L_1 = I_1\omega_1$ ist dann das Produkt aus diesem anfänglichen Trägheitsmoment und der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit. Beim Anziehen der Arme wird der Abstand der Masse von der Drehachse verringert und damit auch das Trägheitsmoment: $I_2 < I_1$. Da der Drehimpuls konstant ist, d.h. $L_1\omega_1 = L_2\omega_2$ muss die Winkelgeschwindigkeit zunehmen ($\omega_2 > \omega_1$), der Körper rotiert schneller. Bei der Umkehrung der Bewegung vergrößert das Ausstrecken der Arme das Trägheitsmoment und aufgrund der Konstanz des Drehimpulses verringert sich die Winkelgeschwindigkeit.

Am Beispiel der Pirouette werden zwei weitere Aspekte der Drehbewegung deutlich. Die Haltung der Schlittschuhläuferin mit angezogenen Armen auf der Spitze einer Kufe stehend wäre in Ruhe nicht stabil – die Schlittschuhläuferin würde umkippen (versuchen Sie mal mit eng am Körper liegenden Armen auf einem Bein auf Zehenspitzen zu stehen). Verbunden mit der schnellen Rotation während der Pirouette kann diese Haltung jedoch längere Zeit gehalten werden. Auch hier hilft uns die Drehimpulserhaltung: der Drehimpuls ist ein Vektor parallel zur Drehachse (und damit in diesem Fall auch parallel zur Körperachse). Da er erhalten bleibt wenn kein äußeres Drehmoment wirkt, bleibt insbesondere seine Richtung erhalten und damit auch die Richtung der Körperachse. Die Rotation wirkt also stabilisierend auf eine ansonsten instabile Haltung. Das gleiche Phänomen begegnet Ihnen beim Kreisel, es wird beim Kreiselkompass auch technisch genutzt. Auch beim Fahrradfahren wirkt die Drehimpulserhaltung unterstützend: hier will der Drehimpuls parallel zur Drehachse der Räder in der Horizontalen verbleiben. Je schneller das Fahrrad, um so größer der Drehimpuls und damit um so stabiler die Fahrt.

Auch ohne Rotation kann das Trägheitsmoment zur Stabilisierung verwendet werden. Bei der Translation widersetzt sich ein (ruhender) Körper aufgrund seiner Trägheit der Beschleunigung – die Änderung des Impulses bedarf einer Kraft. Entsprechendes gilt bei der Rotation:



Abbildung 7.9: Auch die Balanzierstange beruht auf dem Prinzip der Drehimpulserhaltung [22]

ein nicht rotierender Körper hat einen Drehimpuls von Null. Will man den Körper zur Rotation bringen, so benötigt man ein Drehmoment, das die Trägheit des Körpers überwindet und ihm einen von Null verschiedenen Drehimpuls gibt. So benötigt man ein Drehmoment, um einen Stab aus der Horizontalen in die Vertikale zu drehen – oder anders formuliert: das Trägheitsmoment des Stabes bewirkt, dass dieser seinen Drehimpuls von Null und damit seine Lage beibehalten will. Der Seiltänzer nutzt dies aus, in dem er sich gleichsam am Trägheitsmoment der Balancierstange ‘festhält.’

7.5 Rotationsenergie

Kinetische Energie ist die Bewegungsenergie des Körpers. Bei der Translation steckt die gesamte Bewegungsenergie in der Translationsbewegung des Körpers und die kinetische Energie der Translation ist $E_{\text{kin,trans}} = mv_{\text{kin}}^2/2$. In diese Gleichung gehen zwei physikalische Größen ein: die Masse m als ein Maß für die Trägheit des Körpers (träge Masse) und die Geschwindigkeit v als ein Maß für die Bewegung.

Wenn ein Körper rotiert (z.B. die Walze im Drucker), so hat er ebenfalls eine Bewegungsenergie, die *Rotationsenergie*. Wir können sie formal analog zur kinetischen Energie der Translation beschreiben. Dazu müssen wir zum einen ein Maß für die Trägheit des Körpers verwenden, zum anderen eins für seine Geschwindigkeit. Die Trägheit wird bei der Rotationsbewegung durch das Trägheitsmoment I beschrieben, die Bewegung durch die Winkelgeschwindigkeit ω . Ersetzen wir die Größen der Translation in der kinetischen Energie durch die entsprechenden Größen der Rotation, so erhalten wir für die *kinetische Energie der Rotation*

$$E_{\text{kin,rot}} = \frac{1}{2} I \omega^2 . \quad (7.27)$$

Die kinetische Energie der Rotation nimmt linear mit dem Trägheitsmoment I zu und quadratisch mit der Winkelgeschwindigkeit ω .

Wir hätten die Rotationsenergie auch formal aus der bei der Beschleunigung des Körpers aufgewandten Arbeit bestimmen können. Da die Arbeit als Weg mal Kraftkomponente parallel zum Weg definiert ist, können wir für die Rotation wieder eine Analogie machen, bei der wir die Kraft durch das Drehmoment und den Weg durch den Winkel ersetzen. Schreiben wir den Winkel als Vektor (mit der Richtung parallel zur Winkelgeschwindigkeit, d.h. $\vec{\omega} = d\vec{\varphi}/dt$ bzw. $\vec{\varphi} = \vec{\omega} \cdot t$), so erhalten wir für die *Beschleunigungsarbeit bei der Rotation*

$$W_{\text{beschl,rot}} = \vec{M} \cdot \vec{\varphi} . \quad (7.28)$$

Da die Leistung P als der Quotient aus Arbeit und Zeit definiert ist, ergibt sich für die bei der Beschleunigung aufgewendete Leistung

$$P_{\text{rot}} = \frac{W_{\text{beschl,rot}}}{t} = \frac{\vec{M} \cdot \vec{\varphi}}{t} = \vec{M} \cdot \frac{\vec{\varphi}}{t} = \vec{M} \cdot \vec{\omega} . \quad (7.29)$$

Bei der Bestimmung der Bewegungsenergie haben wir bisher zwei Fälle kennen gelernt. In Kapitel 6 haben wir Körper betrachtet, die sich ohne Rotation bewegen. Dann ist die Bewegungsenergie als die kinetische Energie $E_{\text{kin,trans}}$ der Translation gegeben. In den vorangegangenen Abschnitten haben wir Körper betrachtet, die rotieren, jedoch an einem Ort bleiben (d.h. die Drehachse bleibt ortsfest). Dann ist die Bewegungsenergie durch die kinetische Energie $E_{\text{kin,rot}} = I\omega^2/2$ der Rotation gegeben. In vielen Situationen setzt sich die Bewegung jedoch aus einer Translation und einer Rotation zusammen, z.B. wenn eine Dose eine Rampe hinab rollt. Dann liegt ein Teil der Bewegungsenergie als kinetische Energie der Translation vor, der andere Teil steckt in der Rotation, d.h. für die gesamte kinetische Energie des abrollenden Körpers erhalten wir

$$E_{\text{kin}} = E_{\text{kin,trans}} + E_{\text{kin,rot}} . \quad (7.30)$$

Translation	Rotation
Weg \vec{s}	Winkel ϕ
Geschwindigkeit $\vec{v} = d\vec{s}/dt$	Winkelgeschwindigkeit $\omega = d\phi/dt$ und $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$
Beschleunigung $\vec{a} = d\vec{v}/dt$	Winkelbeschleunigung $\vec{\alpha} = d\vec{\omega}/dt$
(träge) Masse m	Trägheitsmoment I
Kraft $\vec{F} = m\vec{a} = d\vec{p}/dt$	Drehmoment $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = d\vec{L}/dt$
Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$	Drehimpuls $L = I \cdot \omega$ und $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
kin. Energie $E = mv^2/2$	Rotationsenergie $E = I\omega^2/2$

Tabelle 7.2: Zusammenhang zwischen den physikalischen Größen der Translation und der Rotation in vektorieller Form

7.6 Energieerhaltung

Die Energieerhaltung gilt natürlich weiterhin, so wie in Abschn. 6.4 diskutiert. Insbesondere gilt bei der Abwesenheit von Reibung die Erhaltung der mechanischen Energie, vgl. (6.34): die Summe aus der Bewegungsenergie (kinetischen Energie) und der Lageenergie (potentielle Energie) eines Körpers ist konstant. Wir müssen jetzt nur berücksichtigen, dass die kinetische Energie sowohl die der Translation als auch die der Rotation beinhaltet, und erhalten damit für die Erhaltung der mechanischen Energie

$$E_{\text{kin,trans}} + E_{\text{kin,rot}} + E_{\text{pot}} = \text{const.} \quad (7.31)$$

7.7 Zusammenfassung

Tabelle 7.2 fasst nochmals die physikalischen Größen der Translation und der Rotation zusammen, jetzt jedoch unter Berücksichtigung der vektoriellen Form.

7.8 Aufgaben

7.8.1 Fragen

1. Geben Sie die wesentlichen Größen an, die in der Kinematik und Dynamik für Translationsbewegungen definiert sind. Welche entsprechenden Größen sind für die Rotationsbewegung definiert? Wie hängen die Größen der Translationsbewegung mit denen der Rotationsbewegung zusammen?
2. Die gesamte kinetische Energie eines Läufers steckt in seiner Translationsbewegung. Gilt dies auch für einen Radler (samt Fahrrad) oder einen PKW?
3. Kann sich der lineare Impuls eines Körpers ändern, obwohl er sich nicht von der Stelle bewegt? Gilt dies auch für den Drehimpuls?
4. Warum kann ein rotierender Kreisel auf einer sehr kleinen Spitze stehen, kippt aber um, wenn er zur Ruhe kommt?
5. Betrachten Sie einen Kreisel, der mit seiner Spitze an einem Faden befestigt an selbigem hängt. Sie versetzen den Kreisel in eine Rotation um eine horizontale Achse. Welche Bewegung führt der Kreisel aus und warum?
6. Beim Jonglieren mit Keulen werden diese so geworfen, dass sie sich Drehen. Geschieht das einfach nur, weil es besser aussieht, oder gibt es eine physikalische Begründung dafür.

7. Bei der Pirouette steht die Eiskunstläuferin auf der Spitze einer Schlittschuhkufe ohne zu wackeln. Wäre sie auch ohne Die Drehbewegung dazu in der Lage? Begründen Sie.
8. Zwei Zylinder liegen auf einer Rampe. Der eine gleitet reibungsfrei die Rampe runter, der andere rollt sie (ebenfalls reibungsfrei) herunter. Welcher Zylinder kommt zuerst an und warum?
9. Kann ein Körper kinetische Energie haben ohne dass er sich von der Stelle bewegt?
10. In welche Richtungen zeigen die Geschwindigkeitsvektoren \vec{v} in entgegen gesetzten Punkten einer Kreisbewegung?
11. Sind die Beschleunigungsvektoren an zwei entgegen gesetzten Punkten einer Kreisbahn die gleichen? Wenn nein, wie unterscheiden sie sich?
12. Immer wenn es eine resultierende Kraft senkrecht zur Bewegung gibt, führt ein Körper eine Kreisbewegung aus. Wie ändert sich die Bewegung, wenn die Kraft nicht senkrecht auf der Geschwindigkeit steht?
13. Sie befinden sich am Nordpol und haben einen schnell rotierenden Kreisel bei sich, dessen Winkelgeschwindigkeitsvektor direkt aufwärts weist. Diesen transportieren Sie (ohne Anwendung eines Drehmoments) zum Südpol. In welche Richtung weist der Vektor seiner Winkelgeschwindigkeit dort?
14. Verwenden Sie das Konzept des Drehmoments um zu erklären, warum eine Sackkarre es Ihnen erlaubt, eine große Masse zu transportieren und dabei zum Anheben der Masse eine wesentlich kleinere Kraft zu verwenden als die Gewichtskraft der Masse.
15. Ein in einer Raumstation schwebender Astronaut hat einen anfänglichen Drehimpuls aber keinen linearen Impuls relativ zur Raumstation. Warum verbleibt der Astronaut in der Rotationsbewegung?
16. Wenn Sie in den Lauf eines Gewehres blicken, sehen Sie eine lange spiralige Struktur. Wenn sich die Kugel durch den Lauf bewegt, wird sie durch diese Spiralen in Rotation versetzt. Welchen Vorteil hat die rotierende Kugel?
17. Trifft ein Billard-Ball ohne Spin (Eigenrotation) senkrecht auf die Bande, so wird er senkrecht zurück reflektiert. Wenn er sich dagegen um seine vertikale Achse dreht, wird er bei der Reflektion zu einer Seite abgelenkt und dreht sich mit geringerer Frequenz. Welche Kraft bewirkt die Änderung im linearen Impuls des Balls, welche die im Drehimpuls?
18. Sie treten auf ein sich drehendes Karussell. Was geschieht mit Ihrem Drehimpuls, mit dem des Karussells, und mit dem Gesamtdrehimpuls?
19. Ein Kreisel ist so ausgerichtet, dass er in Osnabrück genau in Richtung des Polarsterns weist. In welche Richtung wird er weisen, wenn Sie den Kreisel nach Palermo transportiert haben?
20. Die Drehachse der Erde ist um 23.5° relativ zu der Achse der Erdumdrehung um die Sonne geneigt. Am 22. Juni weist der Nordpol in Richtung auf die Sonne. Welcher Pol weist am 22. Dezember in Richtung Sonne?
21. Stellen Sie sich vor, sie sitzen auf einem Drehstuhl (ohne Reibung) und halten ein Fahrradrad derart, dass seine Achse vertikal ausgerichtet ist und es im Uhrzeigersinn rotiert. Was passiert, wenn Sie das Rad um 180° drehen?
22. Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen der Rotations- und der Translationsbewegung bei einem rollenden Körper (z.B. Rad oder Zylinder).

23. Zur Erinnerung an Kapitel 5: was ist die Zentrifugalkraft? Auf welche Weise beschleunigt die Zentrifugalkraft einen Körper?
24. Zur Erinnerung an Kapitel 5: was ist die Zentripetalkraft? Auf welche Weise beschleunigt die Zentripetalkraft einen Körper?
25. Ein Seiltänzer verwendet eine Stange, um die Balance halten zu können. (a) Begründen Sie mit Hilfe des Drehmoments in welche Richtung er die Balanzierstange neigen sollte, wenn er selbst beginnt, sich auf die rechte Seite zu neigen. (b) Welchen Effekt hätten Gewichte am Ende der Balanzierstange?
26. Auf einem rollenden Fahrrad ist der Drehimpuls der rotierenden Laufräder zur linken Seite des Fahrers gerichtet. Erklären Sie, was passiert, wenn sich der Fahrer freihändig fahrend nach links lehnt.

7.8.2 Aufgaben

1. Winkel im Bogenmaß: Ein hungriger Hamster sitzt in seinem Laufrad. Er kriegt einen Hamster-Cookie, wenn er sein Laufrad um genau 60° dreht. Wenn der Hamster es schafft, sein Laufrad erst um 75° zu drehen, dann um 240° zurück und dann wieder um 150° , so erhält er eine große Portion Hamster-Cookies. Da der Hamster kein Geo-Dreieck dabei hat, den Winkel aber sehr gut anhand des von ihm im Laufrad zurückgelegten Weges bestimmen kann, helfen Sie ihm bitte, bevor er verhungert: geben Sie diese Winkel im Bogenmaß an! PS: aus Rache für diese Behandlung entwickelt der Hamster ein Verfahren, bei dem immer, wenn er das Rad um 4.32 rad (die Maßeinheit für das Bogenmaß) gedreht hat, sein Peiniger beim Berühren des Käfigs einen leichten Stromstoß erhält. Seien Sie fair; der Betreuer denkt lieber in Grad, verraten Sie ihm, wann er die Finger vom Käfig lassen soll.
2. Die maximale Geschwindigkeit der rotierenden Messer eines Rasenmähers ist eingeschränkt, um das Risiko durch umher fliegende Steine oder andere Teile zu verringern. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der Messerspitze für einen Radius des Messers von 0.25 m und eine Umdrehungsfrequenz von 3700 pro Minute.
3. Das Laufrad eines Fahrrads hat einen Radius von 0.4 m. Wenn sich das Fahrrad um eine Strecke von 1 m bewegt, um welchen Winkel hat sich ein Punkt auf dem Laufrad bewegt? Geben Sie den Winkel in Grad und Bogenmaß.
4. Eine Ultrazentrifuge erzeugt bei einem Abstand von 0.05 m von der Drehachse eine radiale Beschleunigung, die dem $300\,000$ fachen der Gravitationsbeschleunigung entspricht. Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit in Umdrehungen pro Minute und in rad pro s.
5. Ein Eiskunstläufer macht eine Pirouette mit 3 Umdrehungen pro Sekunde und stoppt dann plötzlich innerhalb von 1 Sekunde. Bestimmen Sie die Winkelbeschleunigung unter der Annahme, dass diese während des Abbremsens konstant ist.
6. Ein Baum ist durch die folgenden physikalischen Größen charakterisiert: halber Stammdurchmesser am Fuß des Baumes $r_{\text{Baum}} = 0.4$ m, Höhe des Stamms $h_{\text{Baum}} = 15$ m, Masse $m_{\text{Baum}} = 120$ kg, minimaler Widerstandsbeiwert $c_w = 0.75$, und minimale Fläche der Krone $A = 20$ m². Bestimmen Sie die maximale Windgeschwindigkeit, bis zu der der Baum noch stabil stehen kann.
7. Eine Eiskunstläuferin dreht eine Pirouette. Ist ihr Trägheitsmoment größer oder kleiner als 20 kg m²?
8. Die Eiskappen an den Polen enthalten etwa $2.3 \cdot 10^{19}$ kg Eis. Diese Masse trägt so gut wie nichts zum Trägheitsmoment der Erde bei, da sie sich sehr nahe an der Drehachse

befindet. Schätzen Sie ab, wie sich die Länge eines Tages ändert, wenn die Polkappen abschmelzen und sich das Wasser gleichmäßig über die Erde verteilt (Trägheitsmoment einer Kugelschale der Masse m mit Radius r ist $\frac{2}{3}mr^2$).

9. Ein Kind mit einer Masse von 40 kg fährt Karussell. Bestimmen Sie den Drehimpuls des Kindes, wenn es sich in einem Abstand von 1.5 m zur Drehachse befindet und eine lineare Geschwindigkeit von 1.5 m/s besitzt.
10. Ein 1400 kg Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 30 m/s um eine Kurve mit Radius 100 m. Wie groß ist sein Drehimpuls?
11. Merkur bewegt sich auf einer elliptischen Bahn um die Sonne mit einem sonnenächsten Punkt bei einem Abstand von 46 Mio km und einem sonnenfernsten Punkt bei 70 Mio km. An beiden Orten steht die lineare Geschwindigkeit senkrecht auf der Richtung zur Sonne. Die Geschwindigkeit im sonnenfernsten Punkt ist 38 km/s. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Merkur im sonnenächsten Punkt.
12. Haben der Mars oder die Erde den größeren Drehimpuls? Der Radius, die Geschwindigkeit und die Masse des Mars sind 1.5, 0.8 und 0.11 mal die entsprechenden Werte der Erde.
13. Eine Eiskunstdläuferin rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit von $3\pi/s$ mit ausgestreckten Armen. (a) Ihr Trägheitsmoment mit angezogenen Armen beträgt 60% des Trägheitsmoments mit ausgestreckten Armen. Wie groß ist ihre Winkelgeschwindigkeit, wenn sie die Arme anzieht? (b) Wie groß ist die damit verbundene Änderung in der kinetischen Energie und wo kommt diese her?
14. Ein Mensch auf einem reibungsfrei rotierenden Drehstuhl hält in jeder Hand eine 5 kg Masse. Sein Trägheitsmoment mit den Händen im Schoß beträgt 20 kg m^2 ; mit ausgestreckten Armen beträgt es 35 kg m^2 . Anfänglich hat der Mensch eine Winkelgeschwindigkeit von 3 rad/s mit den Händen um Schoß. (a) Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit, wenn der Mensch seine Arme ausstreckt? (b) Wenn der Mensch die Massen fallen lässt während seine Arme ausgestreckt sind?
15. Ein Omnibus der Gesamtmasse $m = 5000 \text{ kg}$ soll durch eine als Energiespeicher dienende Schwungscheibe in die Lage versetzt werden, auf ebener Strecke 2 km weit bei einer Rollreibungszahl (entspricht Gleitreibungszahl) $\mu = 0.05$ zu fahren. Welche Masse m_s muss die Scheibe bei einem Durchmesser $D = 1.2 \text{ m}$ haben, wenn die Anfangsdrehzahl $n = 3000/\text{min}$ beträgt?
16. Skizzieren Sie die Form eines Objekts, das bei gegebenem Radius und gegebener Masse bei der Rotation um eine Achse die größte kinetische Energie hat.
17. Ein Rad mit einer Masse von 2 kg rollt mit einer Geschwindigkeit von 5 m/s. Bestimmen Sie seine Translationsenergie, seine Rotationsenergie sowie die gesamte kinetische Energie.
18. Ein PKW hat eine Masse von 800 kg, jedes der 4 Laufräder hat eine Masse von je 5 kg. Der PKW bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 72 km/h. Bestimmen Sie die gesamte kinetische Energie. Welcher Bruchteil entfällt auf die Rotationsenergie der Laufräder, welcher Anteil auf die gesamte kinetische Energie der Laufräder.
19. Beim Anfahren muss ein Radfahrer seine eigene lineare Geschwindigkeit und die lineare Geschwindigkeit des Fahrrads beschleunigen und außerdem die Drehbewegung der Räder. Der Radler habe eine Masse $m_R = 70 \text{ kg}$, das Fahrrad (ohne Räder) eine Masse $m_F = 10 \text{ kg}$ und die Räder eine Masse von je $m_{\text{Rad}} = 1 \text{ kg}$. Die Räder haben einen Radius von 35 cm, ihre Masse ist in einem dünnen Reifen bei diesem Radius konzentriert. (a) Bestimmen Sie, welcher Anteil der kinetischen Energie bei einer Geschwindigkeit

von 35 km/h in der Translationsbewegung von Radler und Fahrrad und welcher in der Rotationsbewegung der Räder ist. (b) Der Radler hat 5 kg abgenommen. Welcher Anteil der ursprünglichen Kraft wird benötigt, um das System gleichförmig innerhalb von 20 s von 0 auf 35 km/h zu beschleunigen? (c) Anstelle einer Diät wechselt der Radler die Laufräder gegen solche mit einer Masse von jeweils 1.5 kg aus. Welcher Anteil der ursprünglichen Kraft wird nun zur Beschleunigung (Daten wie voran gegangener Aufgabenteil) benötigt?

20. Eine anfangs ruhende hölzerne Stange der Länge $L = 0.4$ m und der Masse $M = 1$ kg kann sich um eine Achse durch den Schwerpunkt drehen. Das Ende der Stange wird von einem Geschoss ($m = 0.01$ kg) mit der Geschwindigkeit $v = 200$ m/s getroffen, das sich horizontal senkrecht zur Stange und zur Drehachse bewegt und im Holz stecken bleibt. Wie groß sind die Winkelgeschwindigkeit und die Rotationsenergie der Stange nach dem Stoß?
21. Ein (massives) Rad in einem Mahlwerk hat einen Radius von 0.08 m und eine Masse von 2 kg. (a) Wie groß ist sein Trägheitsmoment? (b) Wie groß muss das Drehmoment sein, um es aus der Ruhe innerhalb von 8 s auf eine Geschwindigkeit von 120 rad/s zu beschleunigen?

Kapitel 8

Ein physikalischer Blick auf den Menschen

Nachdem wir in den vorangegangenen Kapiteln die Grundbegriffe der Mechanik kennen gelernt haben, sollen sie in diesem Kapitel auf den Menschen angewandt werden; wir werden uns mit der Biomechanik beschäftigen. Dazu zählt insbesondere die Analyse bzw. Beschreibung von Bewegungsabläufen aus dem Alltag oder dem Sport.

8.1 Massenmittelpunkt

Biologische Systeme sind ausgedehnte Körper. Dennoch können wir zum Verständnis vieler Bewegungen vom Konzept des Massenpunktes ausgehen und die Gleichungen, die wir bisher kennen gelernt haben, auf ausgedehnte biologische Objekte anwenden. Dazu nehmen wir an, dass die Gesamtmasse im *Massenmittelpunkt* oder *Schwerpunkt* des Körpers konzentriert ist.

Einen Schwerpunkt können wir für beliebige Körper definieren. Um die Idee des Schwerpunkts zu verstehen, beginnen wir mit einem einfachen Beispiel, einem Stab. Dieser ist ein nahezu eindimensionales Gebilde mit einer Länge l und einer Gesamtmasse m . Den Schwerpunkt des Stabs können wir uns als den Punkt vorstellen, an dem wir den Stab unterstützen müssen, um ihn im Gleichgewicht zu halten. Für diese Unterstützung gibt es, wie in der Randabbildung gezeigt, verschiedene Möglichkeiten. Allen ist jedoch gemein, dass der Vektor der Gravitationskraft \vec{F}_g vom Massenmittelpunkt durch den Auflagepunkt gehen muss: der Körper muss also senkrecht unter seinem Schwerpunkt unterstützt werden.

Für die Beschreibung einer Bewegung ist eine andere Eigenschaft des Schwerpunkts oder Massenmittelpunkts wichtiger: der Massenmittelpunkt ist der Punkt des Körpers, der sich

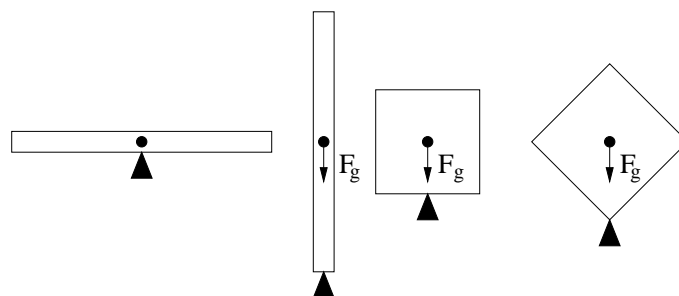


Abbildung 8.1: Wird ein Körper so unterstützt, dass der Vektor der Gewichtskraft vom Massenmittelpunkt durch den Auflagepunkt weist, so befindet sich der Körper im Gleichgewicht. Der Massenmittelpunkt wird auch als Schwerpunkt bezeichnet.

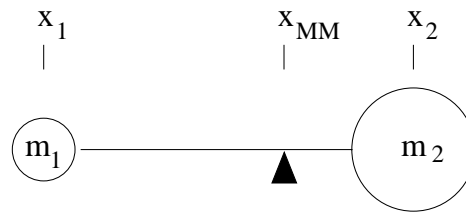


Abbildung 8.2: Lage des Massenmittelpunkts bei zwei Punktmassen

genau wie der idealisierte Massenpunkt bewegt, d.h. wenn wir die Bewegung des Massenmittelpunkts betrachten, können wir ‘vergessen’, dass wir eigentlich einen ausgedehnten Körper betrachten.¹

Eine formale Beschreibung für den Massenmittelpunkt können wir uns einfach herleiten, in dem wir zuerst nur 2 Massenpunkte betrachten. Diese befinden sich an den Orten x_1 und x_2 und sind durch eine masselose Stange miteinander verbunden (anschaulich kommt diesem Gebilde eine Hantel am nächsten). Wir suchen dann den Punkt, an dem wir die Stange unterstützen müssen, damit sie im Gleichgewicht verbleibt. Die Unterstützung muss so gewählt sein, dass die von der linken und rechten Masse ausgeübten Drehmomente betragsmäßig gleich aber entgegen gesetzt gerichtet sind (der Auflagepunkt dient als Drehpunkt). Zählen wir die x -Koordinate von irgend einem Punkt weit außerhalb der Stange, so erhalten wir für den Hebelarm der Masse m_1 einen Wert $h_1 = x_1 - x_{MM}$ und für den Hebelarm der Masse m_2 einen Wert $h_2 = x_2 - x_{MM}$. Durch den Bezug auf x_{MM} haben wir jetzt auch die Vorzeichen (und damit die Richtungen) der Drehmomente korrekt berücksichtigt und können die Bilanzgleichung aufstellen:

$$m_1 \cdot (x_1 - x_{MM}) + m_2 \cdot (x_2 - x_{MM}) = 0. \quad (8.1)$$

Auflösen nach x_{MM} gibt für den Ort des Massenmittelpunktes (oder Schwerpunktes)

$$x_{MM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (8.2)$$

Zwei Massen liegen zwar immer auf einer Geraden, jedoch ab 3 Massen muss dies nicht mehr der Fall sein. Dann müssen wir statt der Orte x_i auf einer Geraden die Ortsvektoren \vec{r}_i verwenden. Verallgemeinerung von (8.2) auf die vektorielle Form liefert für den Ort des Massenmittelpunktes

$$\vec{r}_{MM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}. \quad (8.3)$$

Beim Übergang auf mehr als zwei Massen können wir den Ansatz von oben wiederum verallgemeinern und erhalten (gleich in vektorieller Form)

$$\vec{r}_{MM} = \frac{\sum (m_i \vec{r}_i)}{\sum m_i} = \frac{\sum (m_i \vec{r}_i)}{M}, \quad (8.4)$$

wobei $M = \sum m_i$ die Gesamtmasse ist.

Bisher haben wir unsere Betrachtung auf eine Ansammlung von Punktmassen beschränkt. Einen ausgedehnten Körper können wir uns als Ansammlung unendlich kleiner Massenelemente (also Massenpunkte) vorstellen. Dann müssen wir die Summation in (8.4) durch eine Integration ersetzen und erhalten für den *Massenmittelpunkt eines ausgedehnten Körpers*

$$\vec{r}_{MM} = \frac{1}{M} \int \vec{r}_i dm, \quad (8.5)$$

wobei wieder $M = \int dm$ die Gesamtmasse des Körpers gibt.

¹Dieses Argument bedarf einer kleinen Einschränkung: wenn der Körper um den Schwerpunkt rotiert, so hat er einen Drehimpuls und ein Teil seiner Energie steckt in Rotationsenergie – beides Eigenschaften, die wir einem Massenpunkt bei Rotation um seine eigene Achse nicht zuschreiben können.

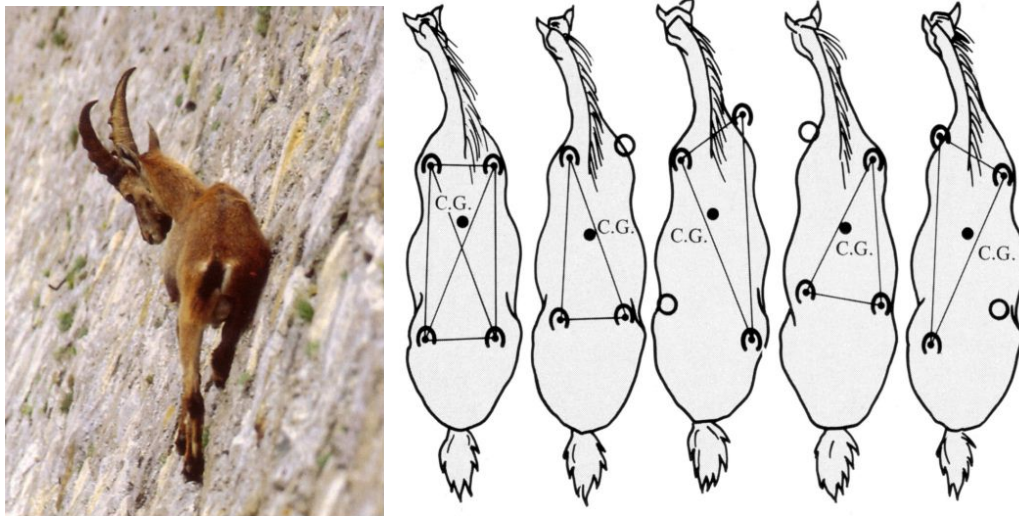


Abbildung 8.3: Links: Steinbock in steiler Wand [56]. Rechts: Bewegung eines Pferdes [25]

8.1.1 Gleichgewicht und Stabilität

Wir hatten eingangs gesagt, dass ein Körper unterhalb seines Schwerpunkts unterstützt werden muss, damit er im Gleichgewicht bleibt. Diese Aussage ist nur korrekt, wenn die Unterstützung wie in der Randabbildung in Abschn. 8.1.1 nur an einem Punkt erfolgt, also z.B. beim Waagebalken. Ein biologisches Objekt dagegen wird in mehreren Punkten unterstützt, die meisten Landtiere an zwei oder vier. Als Beispiel sei das Pferd im rechten Teil von Abb. 8.3 betrachtet. Die Bewegung des Pferdes ist von oben gesehen dargestellt. Der offene Kreis markiert den Huf, der vom Boden abgehoben ist. Der Massenmittelpunkt (markiert als C.G. für Center of Gravity) befindet sich stets innerhalb des von den drei am Boden befindlichen Beinen markierten Dreiecks. Dieses Dreieck können wir als Unterstützungsfläche auffassen. Dann können wir als Bedingung für Stabilität formulieren: ein Körper befindet sich in einer stabilen Lage, wenn sich sein Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt über der Unterstützungsfläche befindet.

Auch die Steinbock im linken Teil von Abb. 8.3 kann sich in der steilen Wand nur halten, weil er seinen Schwerpunkt über der Auflagefläche hat. Klettern (von Mensch wie Tier) lässt sich definieren als ein Spiel mit den verschiedensten Gleichgewichtspositionen, die ein Körper in einer gegebenen Situation am Fels einnehmen kann.

8.1.2 Bewegung des Massenmittelpunkts

Gleichung (8.4) können wir umschreiben als

$$M\vec{r}_{\text{MM}} = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3 + m_4\vec{r}_4 + \dots \quad (8.6)$$

Differenzieren nach der Zeit liefert, da die Orte \vec{r}_i der einzelnen Massen von der Zeit abhängen, die Geschwindigkeiten bzw., da mit der Masse multipliziert, die Impulse

$$M \frac{d\vec{r}_{\text{MM}}}{dt} = m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} + m_3 \frac{d\vec{r}_3}{dt} + m_4 \frac{d\vec{r}_4}{dt} + \dots \quad (8.7)$$

oder

$$M\vec{v}_{\text{MM}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + m_4\vec{v}_4 + \dots \quad (8.8)$$

Nochmaliges Differenzieren dieser Gleichung liefert für die Beschleunigung bzw., da mit der Masse multipliziert, die Kräfte

$$M \frac{d\vec{v}_{\text{MM}}}{dt} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} + m_3 \frac{d\vec{v}_3}{dt} + m_4 \frac{d\vec{v}_4}{dt} + \dots \quad (8.9)$$

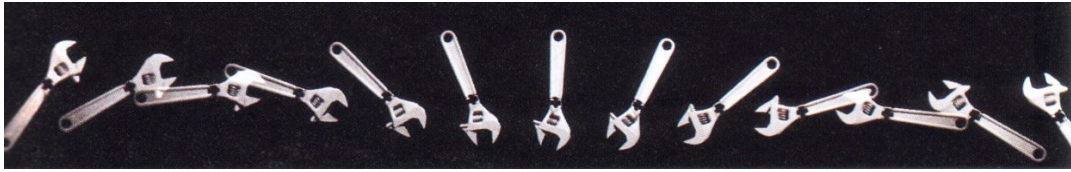


Abbildung 8.4: Ein Schraubenschlüssel gleitet über eine horizontale Fläche. Der Schwerpunkt (schwarzes x) bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit [26].

oder

$$M\vec{a}_{\text{MM}} = m_1\vec{a}_1 + m_2\vec{a}_2 + m_3\vec{a}_3 + m_4\vec{a}_4 + \dots \quad (8.10)$$

Unter Berücksichtigung des Aktionsgesetzes $\vec{F} = m\vec{a}$ folgt daraus

$$M\vec{a}_{\text{MM}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + \dots ; \quad (8.11)$$

d.h. die Beschleunigung \vec{a}_{MM} des Massenmittelpunkts bestimmt sich aus der Gesamtmasse M und der Vektorsumme aller an allen Massenpunkten angreifenden Kräfte. Alle inneren Kräfte, d.h. die Kräfte zwischen den Teilchen, unterliegen dem Gesetz von actio = reactio und heben sich wegen des umgekehrten Vorzeichens auf. Übrig bleiben die externen auf die Massenpunkte wirkenden Kräfte und es ergibt sich

$$M\vec{a}_{\text{MM}} = \vec{F}_{\text{ext}} : \quad (8.12)$$

der Massenmittelpunkt eines Systems bewegt sich so, als ob alle Masse in ihm vereinigt sei und alle externen Kräfte an ihm angriffen. Damit lässt sich die Bewegung ausgedehnter Körper einfach beschreiben, vgl. Abb. 8.4. Denken Sie daran, dass der Schwerpunkt auch außerhalb des Körpers liegen kann, vgl. Abb. 8.16.

Wir können dazu ein Beispiel modifizieren, das Sie bereits bei der Impulserhaltung kennen gelernt haben, die Trennung zweier Massen. Betrachten wir hier die Situation, dass die Massen in Ruhe ausbalanciert auf einem Waagebalken stehen, wie in Abb. 8.5. Die Massen (und damit auch der Massenmittelpunkt) sind in Ruhe, die einzigen externen Kräfte, die Gravitationskräfte auf die Massen, brauchen wir hier nicht zu berücksichtigen, da die durch den Waagebalken ausgeübte Gegenkraft eine Beschleunigung in dieser Richtung verhindert. Die beiden Massen sind durch eine komprimierte Feder mit einander verbunden – dies ist jedoch keine externe Kraft, da die Kraft, die die eine Masse auf die andere ausübt, durch eine gleich große Gegenkraft kompensiert wird. Erlaubt man der Feder die Entspannung, so werden diese inneren Kräfte frei gesetzt und die beiden Wagen rollen in entgegengesetzter Richtung davon. Oben haben wir erläutert, dass in diesem Fall der Massenmittelpunkt in Ruhe bleiben muss, da keine äußeren Kräfte auf unser System wirken. Dann bleibt der Waagebalken im Gleichgewicht.

Diese Aussage ist identisch mit der Aussage, dass bei dieser Trennung der Massen die Impulserhaltung gilt. Impulserhaltung fordert, dass der Impuls $p = mv$ der nach links bewegten Masse gleich dem der nach rechts bewegten ist:

$$m_l v_l = m_r v_r . \quad (8.13)$$

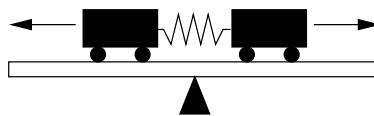


Abbildung 8.5: Impulserhaltung bei der Trennung zweier Massen bedeutet auch Erhaltung des Drehmoments: der Schwerpunkt bleibt in Ruhe

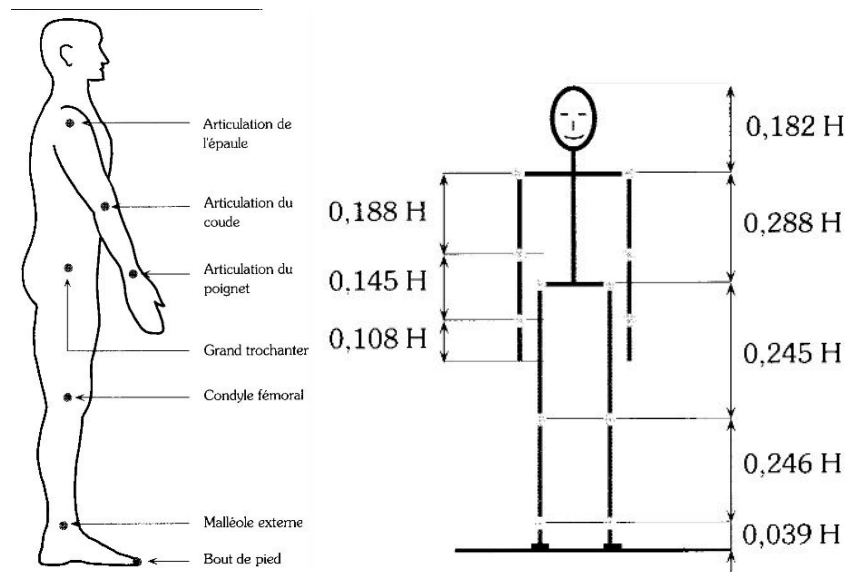


Abbildung 8.6: Körpermodell [12]

Diese Aussage gilt für alle Zeiten. Da die Bewegung der beiden Wagen gleichförmig ist, können wir die Orte auf dem Waagebalken gemäß $s = vt$ berechnen, in dem wir die Gleichung mit t multiplizieren:

$$m_l v_l t = m_r v_r t \quad \Rightarrow \quad m_l x_l = m_r x_r . \quad (8.14)$$

Diese Gleichung beschreibt aber nur die von den beiden Massen ausgeübten Drehmomente, d.h. die Impulserhaltung ist in diesem Fall gleichwertig damit, dass die von den beiden Massen ausgeübten Drehmomente betragsmäßig gleich sind und damit der Waagebalken im Gleichgewicht verbleibt.

8.2 Ein einfaches Modell des Menschen

8.2.1 Bestandteile des Körpers

In der Biomechanik wird der komplexe Körper Mensch in einfache geometrische (und damit auch physikalisch einfach zu beschreibende) Elemente unterteilt. Wesentlich für diese Unterteilung sind die Punkte, über die eine Veränderung der Geometrie des Körpers stattfinden

	Länge	Masse	x_{MM} über Boden
Fuß	0.039 H	0.029 M	0.020 H
Unterschenkel	0.246 H	0.093 M	0.178 H
Oberschenkel	0.245 H	0.200 M	0.424 H
Rumpf	0.288 H	0.497 M	0.674 H
Hand	0.108 H	0.012 M	0.430 H
Unterarm	0.145 H	0.032 M	0.568 H
Oberarm	0.188 H	0.056 M	0.736 H
Hals & Kopf	0.182 H	0.081 M	0.948 H
Mensch	1 H	1 M	

Tabelle 8.1: Einfaches Körpermodell zur Biomechanik nach Winkler [12]

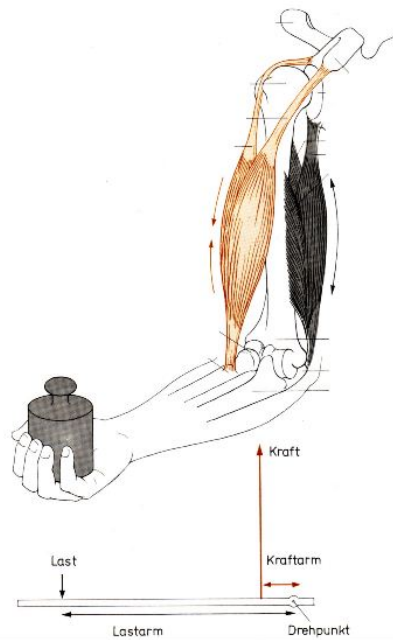


Abbildung 8.7: Drehmomente beim Anwinkeln des Unterarms [14]

kann, also die Gelenke. Zwischen den Gelenken können wir statt der komplizierten biologischen Materie auch einfacher mit Stangen (entsprechend den Knochen) und Seilen (entsprechend den Sehnen und Muskeln) arbeiten. Die Gliederpuppe aus dem Künstlerbedarf, die verwendet wird, damit man sich Bewegungen besser vorstellen kann, ist im Prinzip auch so ein Modell.

Einen Standardmenschen kann man gemäß Abb. 8.6 in die folgenden, in Tabelle 8.2 angegebenen Elemente (jeweils mit der Länge, der Masse, und der Lage des Massenmittelpunkts über dem Boden) zerlegen. Dieser Standardmensch ist bei der Beschreibung von Bewegungen sehr hilfreich: für einen Fallschirmspringen benötigen wir sicherlich nur die letzte Zeile, da hier die Körperhaltung praktisch konstant ist. Aber selbst bei so einfachen Bewegungen wie dem Gehen benötigen wir die Zerlegung in die einzelnen Körperteile, da diese Kräfte aufeinander ausüben und damit Drehmomente bewirken.

Der Massenmittelpunkt eines zusammen gesetzten Körperteils, z.B. eines Beines, bestimmt sich dann gemäß der allgemeinen Gleichung zur Bestimmung des Massenmittelpunkts zu

$$x_{\text{MM}} = \frac{\sum(m_i x_{\text{MM},i})}{\sum m_i} . \quad (8.15)$$

8.2.2 Beispiel: Drehmoment am Arm

Ein ganz einfaches Beispiel für die Anwendung von Physik auf eine Körperbewegung ist die Bedeutung des Beugers im Oberarm beim Heben einer Masse, vgl. Abb. 8.7. Der Drehpunkt, um den die Bewegung erfolgt, ist das Ellenbogengelenk. Das eine Drehmoment wird durch die Gewichtskraft der in der Hand gehaltenen Masse bewirkt, der Hebelarm ist in diesem Fall der Unterarm (genauer vom Ellenbogengelenk bis zur Mitte des Handtellers).² Dieses

²Puristen müssten hier eigentlich eine weitere Masse ins Spiel bringen, den Unterarm zusammen mit der Hand, wobei die davon ausübten Drehmomente entweder für Unterarm und Hand separat mit den jeweiligen Massenmittelpunkten aus der Tabelle bestimmt werden können (Achtung, bei der Hand muss der Hebelarm natürlich nicht auf das Handgelenk sondern auf das Ellenbogengelenk bezogen werden) oder erst eine Gesamtmasse und ein Massenmittelpunkt für das System Unterarm–Hand bestimmt wird und dann mit diesem gerechnet wird. Dass diese Kraft auch kompensiert werden muss, können Sie sich daran veranschaulichen,

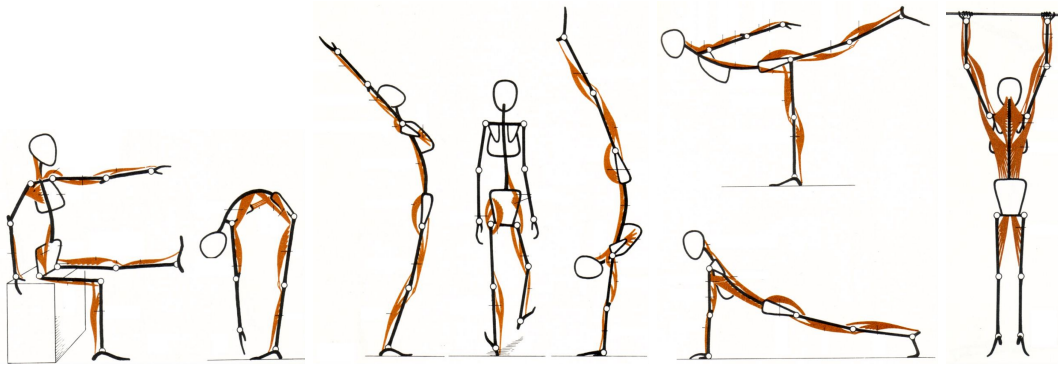


Abbildung 8.8: Muskelmännchen, von links nach rechts: (a) Sitzhaltung bei gestrecktem linken Arm und Bein, (b) Rumpfbeuge vorwärts, (c) Arme hoch, (d) Standbein und Spielbein beim Gehen, (e) Handstand, (f) waagerechte Haltung des Rumpfes beim Stand auf einem Bein und Liegestütz, (g) Felgaufzug mit Händen in Supination [14].

Drehmoment muss zum Halten der Masse von einem gleich großen aber entgegengesetzten Drehmoment kompensiert werden. Dazu wird der Oberarmbeuger eingesetzt. Dieser übt eine Kraft auf den Unterarm aus, der Hebelarm ist sein Ansatzpunkt am Unterarm. Aus dem Diagramm ist sofort offensichtlich, dass aufgrund des kurzen Hebelarms des Muskels im Vergleich zu dem um ein Vielfaches längeren Hebelarm der externen Kraft eine sehr viel höhere Kraft des Muskels erforderlich ist als die Gewichtskraft der Masse:

$$m_{\text{extern}}g \cdot x_{\text{Unterarm}} = F_{\text{Muskel}} \cdot x_{\text{Muskelansatz}} \quad (8.16)$$

oder aufgelöst nach der vom Muskel zu erbringenden Kraft

$$F_{\text{Muskel}} = m_{\text{extern}}g \frac{x_{\text{Unterarm}}}{x_{\text{Muskelansatz}}} = F_{\text{extern}} \frac{x_{\text{Unterarm}}}{x_{\text{Muskelansatz}}} . \quad (8.17)$$

Die Natur hätte es dem Oberarmbeuger einfacher machen können, wenn sie ihm einen weiter in Richtung Handgelenk verschobenen Muskelansatz spendiert hätte – dann wäre der Hebelarm größer und damit auch das Drehmoment, so dass gleiche Lasten mit geringerer Kraft bzw. größere Lasten mit gleicher Kraft gehoben werden könnten. Die Variante würde bei angewinkeltem Unterarm jedoch einen relativ großen Abstand des Muskels vom Oberarmknochen und damit eine erhöhte Verletzungsgefahr bedeuten. Außerdem würde die dadurch bedingte Vergrößerung des Drehmoments den Antagonisten überfordern, so dass eine saubere Dosierung von Kraft und Drehmoment nicht mehr möglich wären. Alle anderen Gelenke gehorchen den gleichen physikalischen Gesetzen.

8.2.3 Muskelmännchen

Alle anderen (statischen) Körperhaltungen lassen sich ebenfalls aus zwei Grundprinzipien bestimmen:

- der Körperschwerpunkt muss sich senkrecht über dem Auflagepunkt befinden (oder er befindet sich senkrecht unter einem über dem Schwerpunkt befindlichen Auflagepunkt). Gibt es mehrere Auflage- bzw. Aufhängepunkte (stehen auf beiden Beinen, Liegestütz), so muss der Schwerpunkt über der so definierten Auflagefläche liegen.
- für die Lage der einzelnen Körperteile zu einander müssen die Muskeln jeweils Drehmomente ausüben können, die die Gewichtskraft der entsprechenden Körperteile unterstützen können.

dass Sie die in der Abbildung gezeigte Haltung auch ohne das zusätzliche Gewicht in der Hand auf Dauer als anstrengend empfinden würden.

Abbildung 8.8 zeigt Beispiele für die Stellung der Gelenke und die Lage (und Ansatzpunkte) der Muskelgruppen für verschiedene Körperhaltungen. Für alle Muskelgruppen erkennen wir wieder die relativ kurzen Hebelarme, d.h. die am Arm gemachte Argumentation kann direkt übertragen werden.

Ein Spezialfall ist die Wirbelsäule, da diese stark biegsam ist und wir sie im Gegensatz zu den langen Knochen der Extremitäten nicht durch einen Stab annähern können. Hier sind allerdings die beteiligten Muskelgruppen auch komplizierter, die obigen Betrachtungen könnten wir für die Wirbelsäule übernehmen, wenn wir sie als aus den einzelnen Wirbelkörpern zusammengesetzt auffassen.

8.3 Gulliver in Lilliput

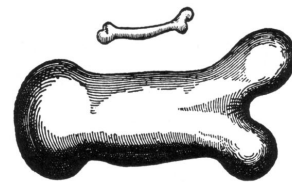
Swift beschreibt in ‘Gulliver’s Reisen’ den Aufenthalt seines Helden in den Reichen der Riesen und der Zwerge – jeweils unter der Annahme, dass die Riesen zwar zehnmals so groß bzw. die Zwerge nur 1/10 so groß sind, in ihren Proportionen jedoch mit den normalen Menschen übereinstimmen. In Swifts Vorstellung bedeutet dies, dass man alle Größen geometrisch mit dem entsprechenden Faktor skaliert. Dieses Verfahren ist zwar im Modellbau anwendbar, jedoch stellte bereits Galileo im 17. Jhrh. fest, dass durch die rein geometrische Skalierung keine Funktionalität gewährleistet ist.

Galilei’s Argument basiert auf den unterschiedlichen Abhängigkeiten verschiedener physikalischer Parameter von der räumlichen Skala:

- das Volumen (und damit die Masse) eines Körpers hängt in der dritten Potenz von der Längenskala ab: $V \sim L^3$. Ein zehnmals so großer Körper hat daher eine 10^3 mal so große Masse.
- die Zugfestigkeit von Seilen (Muskeln oder Sehnen) und die Tragfähigkeit von Säulen (Knochen) hängt von der Querschnittsfläche (entsprechend der Zahl der Muskelfasern) ab: $T \sim L^2$. Ein Muskel/Knochen mit zehnfachem Durchmesser kann daher die 10^2 fache Last tragen.
- die Oberfläche des Körpers geht quadratisch mit der Längenskala: $A \sim L^2$.

Wenden wir dies auf Gullivers Riesen an. Da er 10 mal so groß ist wie Gulliver, können seine Knochen und Muskeln/Sehnen die Hundertfache Belastung tragen. Andererseits ist sein Volumen und damit seine Gesamtmasse aber 10^3 mal so groß, d.h. das Verhältnis von Tragfähigkeit des Stützapparats zur Masse ist nur 1/10 dessen eines Menschen normaler Größe: allein um sein eigenes Gewicht zu tragen, wird der Riese sich genauso mühen müssen, als wenn wir neun Menschen unserer Größe huckepack tragen müssten.

Galilei hat die aus der Skalierung abgeleiteten Größenverhältnisse in nebenstehender Abbildung illustriert und bemerkt: “... Wenn die Gliedmaßen eines Riesen im selben Verhältnis zueinander stehen sollen wie bei einem normalen Menschen, dann müssen die Knochen entweder aus einem festeren und härteren Stoff gebildet sein, oder es würde sein Körperbau erheblich schwächer als der eines Menschen mittlerer Statur sein. Daher wird der Riese unter dem Gewicht seines eigenen Körpers zusammen brechen, wenn seine Größe auf ein Vielfaches der Größe eines normalen Menschen wächst. Ist das Lebewesen aber sehr viel kleiner als ein normaler Mensch, so wird sein Körperbau nicht in gleichem Maße schwächer. Denn je kleiner der Körper ist, um so größer ist seine relative Belastbarkeit: ein Hund kann drei Hunde seiner Größe tragen, aber ein Pferd kaum ein gleich großes.”



Dieses Gedankenexperiment lässt sich durch Vergleiche ähnlich gebauter Tiere verifizieren. Gazelle und Bison sind zwei eng verwandte Tiere aus der Familie der Hirsche, haben jedoch deutlich unterschiedliche Größen und unterscheiden sich im Körperbau. Der linke Teil von

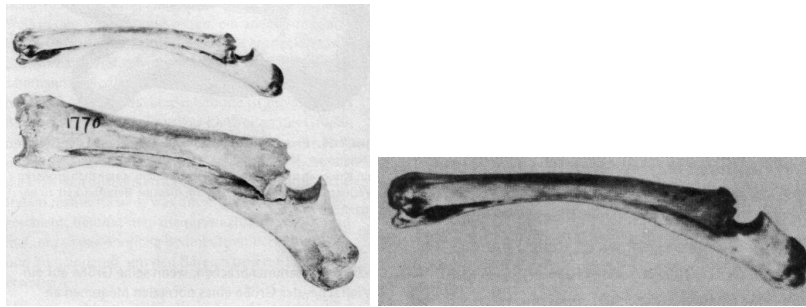


Abbildung 8.9: Beinknochen von Gazelle und Bison; im rechten Teil ist der Gazellenknochen auf die Länge des Antilopenknochens vergrößert dargestellt [42]

Abb. 8.9 zeigt die Beinknochen von Bison und Gazelle in natürlichen Größenverhältnissen. Die geometrischen Verhältnisse sind unterschiedlich: im Vergleich zu seiner Länge ist der Knochen des Bisons viel dicker als der der Gazelle. Im rechten Teil ist der Gazellenknochen auf die Länge des Bisonknochens vergrößert, wodurch die Abweichung der beiden Knochen von einem maßstabgerechten Größenverhältnis noch deutlicher wird. Allgemein können wir daraus folgern, dass kleine und leichte Tiere wesentlich graziler gebaut sein können als große schwergewichtige Verwandte.

Die Benachteiligung großer Tiere bei der Bewegung zeigt sich auch beim genaueren Vergleich der Laufhaltung einer Gazelle und einer Antilope, vgl. Abb. 8.10. Zwar ist letztere kräftiger gebaut und hat damit auch die kräftigeren Muskeln, dennoch sind die bei der Bewegung der Gelenke aufzubringenden Drehmomente durch die größeren Massen und Dimensionen der Extremitäten so groß, dass die Bewegung wesentlich eingeschränkter erfolgt: der gerade Rücken und der geringere Schrittwinkel beim schwereren Tier bedeuten eine vergleichsweise geringe Vorwärtsbewegung pro Schritt und damit eine insgesamt ineffizientere Bewegung.

In Gegenrichtung, d.h. für einen Zwerg, würde die Skalierung um einen Faktor 10 einen extrem kräftigen Stützapparat im Verhältnis zur Masse bedeuten – das wäre vielleicht nicht besonders ökonomisch, zumindest aber auch nicht so einschränkend wie beim Riesen. Der Zwerg hat jedoch ein anderes Problem: er mag nicht mehr ins Wasser und friert ziemlich. Für beides ist die Oberfläche des Körpers verantwortlich. Diese sinkt quadratisch in L während das Volumen mit L^3 abnimmt. Kommt ein Mensch aus dem Wasser, so ist seine Körperoberfläche mit einem dünnen Wasserfilm überzogen, dessen Masse ca. 1% seiner Masse ausmacht. Der Zwerg, skaliert im Verhältnis 1:10, hätte nur ein Hundertstel der Körperoberfläche, die Masse des Wasserfilms beim Zwerg würde daher auch nur ein Hundertstel derer beim Menschen betragen. Das Körpergewicht des Zwergs ist jedoch nur ein Tausendstel von dem des Menschen, das relative Verhältnis zwischen Masse des Wasserfilms und Körpermasse wäre beim

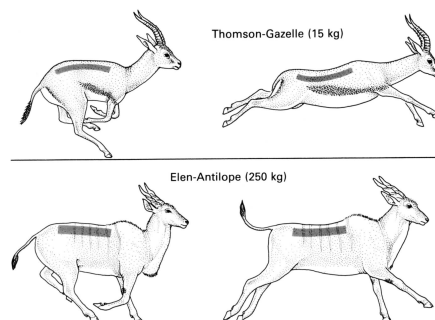


Abbildung 8.10: Laufhaltung bei Gazelle und Antilope [36]

Zwerg also 1:10. Das entspricht dem Massenverhältnis, was sich beim Menschen mit schwerer Winterkleidung ergeben würde. Beim Riesen würde umgekehrt der Wasserfilm nur 1 Promille der Körpermasse ausmachen.

Schlimmer als beim Wasserfilm wirkt sich die relativ große Oberfläche beim Zwerg auf den Wärmehaushalt aus. Die im Körper erzeugte und gespeicherte Wärmemenge hängt vom Volumen ab, d.h. sie variiert mit L^3 . Die Wärmeabgabe erfolgt hauptsächlich durch die Körperoberfläche, variiert also mit L^2 . Im Vergleich zum Menschen gibt daher ein Zwerg das zehnfache der Wärmemenge (pro kg Körpergewicht) ab, während der Riese nur 1/10 der Wärmemenge abführen könnte. Während der Riese bei der kleinsten Anstrengung ins Schwitzen kommt, muss der Zwerg seinen großen Wärmeverlust durch ständige Nahrungsaufnahme ausgleichen – was man bei kleinen Tieren wie Mäusen auch beobachtet. Mäuse setzen gleichzeitig auch die untere Größengrenze für Warmblüter: alle kleineren Tiere haben eine zu große Oberfläche im Vergleich zu ihrer Masse um gegenüber der Umwelt eine konstante Temperatur aufrecht zu erhalten. Fische, Frösche und Insekten können nur deshalb sehr viel kleiner sein, weil ihre Körpertemperatur nur geringfügig über der der Umgebung liegt.

Die unterschiedliche Skalierung von Masse und Körperoberfläche hat auch für das Fliegen von Vögeln Bedeutung. Sehr kleine Vögel wie der Kolibri haben gegenüber einem Standardvogel (z.B. Möwe) eine um L^3 verringerte Masse, aber nur eine um L^2 verringerte Oberfläche und damit auch eine nur um L^2 verringerte Flügelfläche. Diese ist für den Auftrieb und die Möglichkeit des Fliegens verantwortlich (vgl. Kap. 10). Dadurch erhalten diese kleinen Flieger sehr viel Auftrieb (oder Flugvermögen) im Verhältnis zu ihrer Masse, sind also sehr effiziente und wendige Flieger. Wird ein Vogel größer, so verringert sich der Auftrieb pro kg Körper, da der Auftrieb nur mit L^2 , die Masse jedoch mit L^3 zunimmt. Je größer ein Vogel, um so schwerfälliger sein Flug. Die Grenze für Flugtauglichkeit ist mit dem Albatross erreicht, größere Vögel wie Strauße oder Emus können bei gleichen Körperproportionen nicht mehr fliegen – durch die Nichtbenutzung sind ihre Flügel verkümmert.

Diese Betrachtungen zeigen, dass eine rein geometrische Ähnlichkeit nicht mit einer vergleichbaren Funktionalität einher geht. Dieses Skalierungsproblem tritt in vielen Bereichen der Physik auf, d.h. die Nachbildung der Natur in einem rein geometrisch skalierten Modell ist nicht möglich. Allerdings gibt es in einigen Bereichen der Physik auch Möglichkeiten der Skalierung, die die Funktionalität bewahren. Als Beispiele werden Sie in der Hydrodynamik die Reynolds-Zahl und die Froude-Zahl kennen lernen.

8.4 Einfache Bewegungen, physikalisch beschrieben

In diesem Abschnitt sollen einfache Bewegungen von Mensch oder Tier bzw. einfache Sportarten betrachtet werden. Diese Bewegungen lassen sich alle unter einfacher Anwendung nur eines physikalischen Prinzips verstehen. Komplexere Bewegungen werden im folgenden Abschnitt vorgestellt.

8.4.1 Tetherball

Eine sehr einfache, noch nicht einmal biomechanische Bewegung unter Erhaltung des Drehimpulses ist der Tetherball, vgl. Abb. 8.11. Wickelt sich der Faden um den Pfosten auf, so bleibt der Drehimpuls mvr erhalten, der Abstand des Balls von der Drehachse verkürzt sich jedoch. Da die Masse erhalten bleibt, kann dies nur durch Erhöhung der Geschwindigkeit geschehen: die Drehimpulserhaltung bewirkt, dass der Ball sich mit abnehmender Fadenlänge immer schneller bewegt. Dies ist natürlich die gleiche Argumentation, wie wir sie bereits für die hohen Geschwindigkeiten bei der Pirouette kennen gelernt haben, nur die formale Darstellung ist mit $mvr = \text{const}$ relativ einfach, da der Ausdruck für das Trägheitsmoment eines Massenpunktes so einfach ist, vgl. Abbildung in Abschn. 7.4.3. Für den ausgedehnten Körper müssten wir den Drehimpuls als das Produkt aus Winkelgeschwindigkeit und Trägheitsmoment schreiben, wobei wir jedoch für komplexe Körper keine einfache formale



Abbildung 8.11: Tetherball als Beispiel für Drehimpulserhaltung [26]

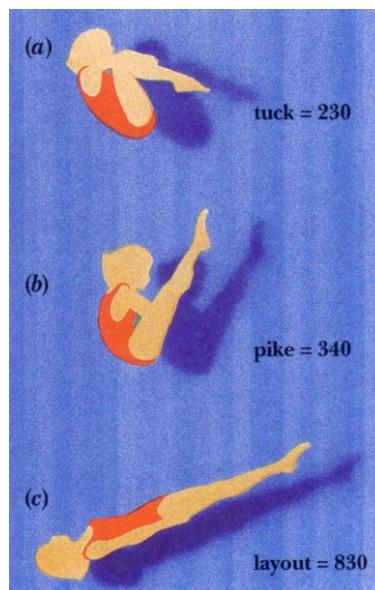


Abbildung 8.12: Relative Trägheitsmomente bei verschiedenen Haltungen eines Turmspringers [26]

Beschreibung des Trägheitsmoments geben können – wir wissen nur, aus der Analogie zum Massenpunkt, dass das Trägheitsmoment mit zunehmendem Abstand der Körperelemente von der Drehachse zu nimmt.

Auch bei der Bewegung der Erde um die Sonne begegnen wir der Drehimpulserhaltung. Die Erdbahn ist keine exakte Kreisbahn, stattdessen bewegt sich die Erde auf einer Ellipse um die Sonne. Dadurch ist der Abstand vom Drehzentrum Sonne mal etwas geringer (das ist im Winter der Nordhalbkugel der Fall) und mal etwas größer (im Nord-Sommer). Auf Grund der Erhaltung des Drehimpulses muss dann im Sommer die Geschwindigkeit der Erde etwas größer, im Winter dagegen etwas geringer sein.

8.4.2 Turmspringen

Ein verwandtes Muster der Drehimpulserhaltung begegnet uns auch bei der Betrachtung ausgedehnterer Körper. Hier ist jedoch das Trägheitsmoment nicht so einfach beschrieben wie bei der Bewegung des Massenpunktes um eine Drehachse. Zwar ist das Trägheitsmoment formal durch die komplizierte Geometrie der betrachteten Körper nur schwierig zu berechnen; es ist aber gerade diese Kompliziertheit der Körper, die ihnen große Variationen des Trägheitsmoments durch Strecken und Anziehen der Extremitäten und Beugen des Rumpfes erlaubt. Und diese Variabilität des Trägheitsmoments ist bei einer Erhaltung des Drehimpulses gleich bedeutend mit einer großen Variabilität in der Winkelgeschwindigkeit: wächst

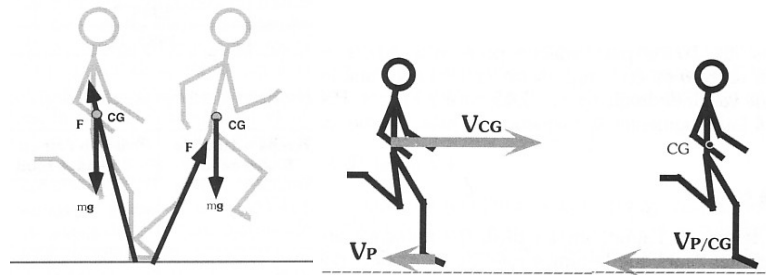


Abbildung 8.13: Links: Kräfte des Fußes beim Aufsetzen und Abstoßen; rechts: Geschwindigkeiten aus der Sicht des Fußes und des Massenmittelpunktes [12]

das Trägheitsmoment, z.B. ausgestreckte Körperhaltung in Abb. 8.12, so verringert sich die Rotationsgeschwindigkeit. Ein kleines Trägheitsmoment wie bei der kompakteren Haltung im oberen Teil von Abb. 8.12 dagegen führt bei gleichem Drehimpuls auf eine höhere Winkelgeschwindigkeit. Dieser Zusammenhang wird von Turnspringern und in der Gymnastik verwendet, um mit Hilfe eines anfänglichen Drehimpulses sehr variable Rotationen zu realisieren. Die Katze hat diese Technik so weit verfeinert, dass sie stets auf die Füße fällt (s.u.).

8.4.3 Laufen

Selbst bei einer so alltäglichen Bewegung wie dem Gehen oder Laufen ist etwas Physik im Spiel. Hier benötigen wir allerdings, da es sich um eine Translationsbewegung handelt, keinen Drehimpuls und damit auch keine Drehimpulserhaltung sondern können mit den linearen Größen arbeiten.

Abbildung 8.13 gibt einen Einblick in einige Aspekte der Physik des Laufens. Im linken Teil der Abbildung sind die Kräfte direkt beim Aufsetzen des Fußes sowie beim Abstoß vom Boden gezeigt. Auf den Läufer wirkt unabhängig von seiner Bewegung stets die Gewichtskraft $F_g = mg$, die wir uns als im Schwerpunkt angreifend senkrecht nach unten gerichtet denken können (vgl. Konzept der Bewegung des Schwerpunktes in Abschn. 8.1). Die anderen wirkenden Kräfte sind jeweils die vom Boden auf den Fuß bzw. umgekehrt ausgeübten Kräfte: beim Aufsetzen des Fußes wirkt diese Kraft einerseits zur Unterstützung gegen die Gewichtskraft und muss daher eine vertikale Komponente haben. Andererseits hat die Kraft eine abbremsende Komponente gegen die Bewegungsrichtung. Aufgrund der Trägheit des Schwerpunktes bewegt sich der Körper über den Auflagepunkt Fuß hinweg und kann sich dann mit einer nach vorne gerichteten Kraftkomponente abstoßen.

Die Bewegungen von Schwerpunkt und Fuß sind sehr unterschiedlich: der Massenmittelpunkt bewegt sich annähernd gradlinig (auch kaum Variation in der Höhe) mit gleichförmiger Geschwindigkeit. Der Fuß dagegen beschreibt eine relativ komplizierte Bewegung: im Bezug auf den Schwerpunkt bleibt er beim Abheben hinter diesem zurück, erreicht dabei jedoch eine relativ große Höhe. Beim Durchschwingen des Beines überholt der Fuß den Massenmittelpunkt und wird dabei langsam abgesenkt bis zum nächsten Bodenkontakt, bei dem der Massenmittelpunkt den Fuß überholt. Dies wird deutlich, wenn man die Geschwindigkeiten im Moment des Bodenkontakts aus der Sicht des Fußes (das entspricht einem ortsfesten Beobachter) und aus der Sicht des Massenmittelpunktes vergleicht: aus der Sicht des ortsfesten Beobachters hat der Massenmittelpunkt eine annähernd konstante Geschwindigkeit in Vorwärtsrichtung, vgl. rechtes Teilbild im rechten Teil von Abb. 8.13. Gleichzeitig hat der Fuß eine geringe Geschwindigkeit in rückwärtiger Richtung. Aus der Sicht des Massenmittelpunktes dagegen hat er selbst keine Geschwindigkeit (es ist ja eine gleichförmige Bewegung, d.h. der Massenmittelpunkt kann als Befestigungspunkt für ein Inertialsystem verwendet werden), der Fuß jedoch eine große Geschwindigkeit in rückwärtiger Richtung. Der Betrag der letzteren ergibt sich als die Summe der Einzelgeschwindigkeiten im ortsfesten Bezugssystem. Das Bezugssystem des Massenmittelpunktes mag Ihnen etwas gekünstelt erscheinen: beim

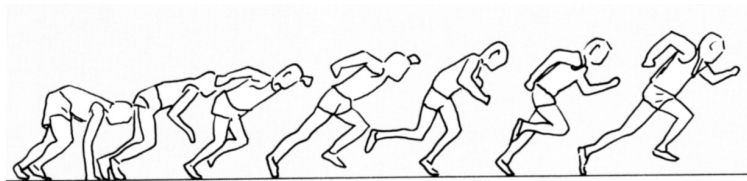


Abbildung 8.14: Sprint [25]

Lauf auf dem Laufband ist es jedoch genau das System und der Bewegungsablauf, in dem Sie sich selbst befinden und in dem sich auch der ortsfeste Beobachter befinden würde.

Während beim Laufen der Massenmittelpunkt ungefähr über dem Auflagepunkt liegt (bzw. bedingt durch die Kombination aus Trägheit und Bewegung des Beines über den Auflagepunkt hin und her pendelt), liegt er beim Sprint meist vor dem Auflagepunkt, vgl. Abb. 8.14. Diese Konfiguration ist instabil, sie kann nur dadurch aufgefangen werden, dass der Läufer immer wieder rechtzeitig einen Fuß unter den Körperschwerpunkt verbringt.³ Diese relativ instabile Haltung hat jedoch den Vorteil, dass eine größere horizontal gerichtete Kraft auf den Boden ausgeübt werden kann und damit ein schnellerer Vortrieb erzeugt wird. Instabilität für kurze Zeitabschnitte hilft also zur Erreichung einer schnellen Bewegung.

8.4.4 Weit- und Hochsprung

Den Weitsprung können wir als schiefen Wurf betrachten. Damit ist die Bewegung des Massenmittelpunktes klar: er beschreibt eine Wurfparabel. Allerdings sind bei dieser Wurfparabel die Ausgangshöhe der Bewegung und die Höhe, in der die Bewegung endet, nicht identisch: die Flugphase startet aus der aufrechten Haltung beim Anlaufen und wird in einer komprimierten Position (ähnlich einer vertikalen Version des Pike in Abb. 8.12) beendet. Eine Rotation des Weitspringers ergibt sich aus dieser Bewegung nicht, da er im Gegensatz zum Turmspringer mit einem Drehimpuls von Null abspringt und dieser erhalten bleibt: beim Einnehmen der kompakteren Position werden auf Ober- und Unterkörper gleich große entgegengesetzte Drehmomente ausgeübt, die Gesamtrotation bleibt daher Null. Die Effekte dieser Bewegung sind die Vergrößerung der Fallhöhe (da der Schwerpunkt eine größere Strecke durchfallen kann) und die Verlängerung der Sprungweite durch die Vorverlagerung der Füße, über die beim Auftreffen ein geringes, den Körper wieder etwas aufrichtendes Drehmoment ausgeübt werden kann.

Beim Hochsprung folgt die Bewegung des Massenmittelpunktes ebenfalls einer Wurfparabel, allerdings ist hier der Drehimpuls nicht Null, d.h. ein Teil der beim Anlauf gewonnenen kinetischen Energie wird in Rotationsenergie umgewandelt, der Rest in potentielle Energie.

³Wie Sie aus der Abbildung ersehen können, ist diese Aussage nicht ganz korrekt: selbst der vordere Fuß kommt nicht wirklich bis unter den Massenmittelpunkt – dass der Läufer trotzdem nicht nach vorne fällt liegt daran, dass er kein statischer Körper ist sondern durch Muskelspannung und Gegenbewegung der Arme zum Erhalt eines Gleichgewichts beiträgt.

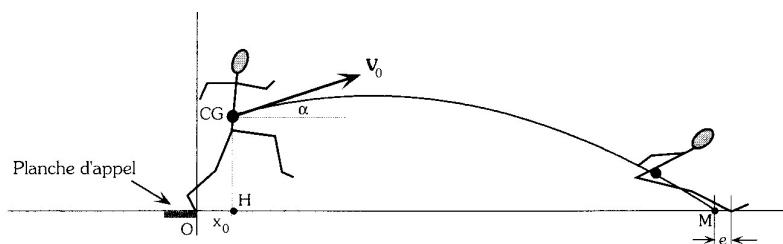


Abbildung 8.15: Massenmittelpunkt beim Weitsprung [12]

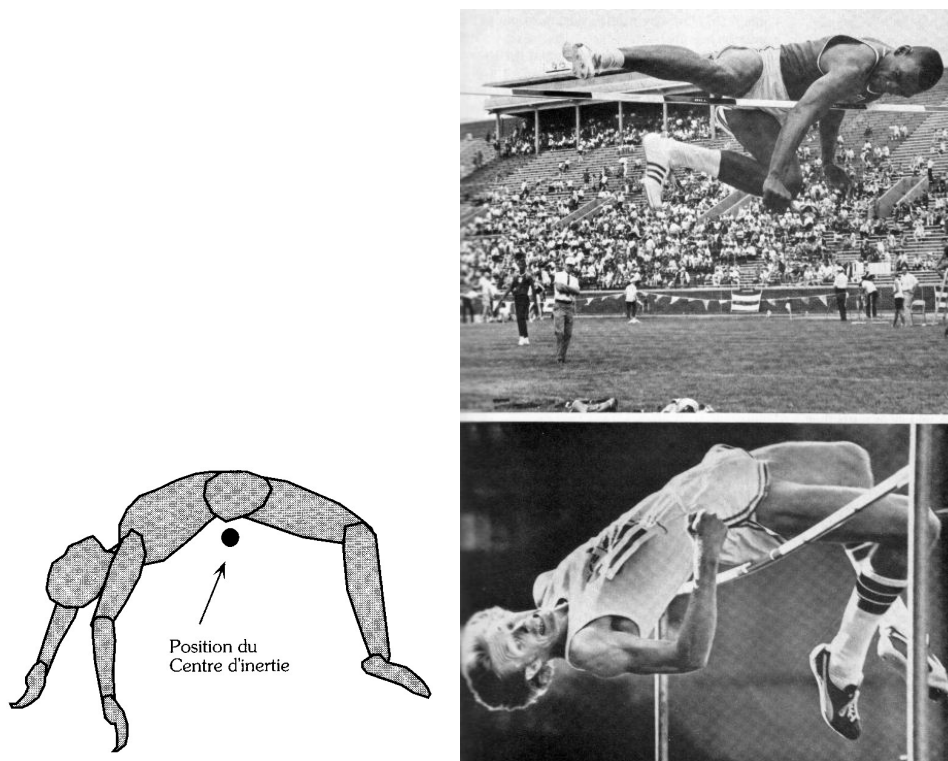


Abbildung 8.16: Massenmittelpunkt beim Hochsprung [12]; traditionelle Rolle und Fosbury Flop [25]

Auf den ersten Blick mag das als Verschwendung erscheinen, da der Schwerpunkt mit zunehmender Sprunghöhe immer mehr potentielle Energie hat, d.h. eine vollständige Umwandlung der kinetischen Energie in potentielle Energie zur maximalen Sprunghöhe führen sollte. Betrachtet man sich den Hochspringer in dem Moment, in dem er über die Latte geht, etwas genauer, so fällt auf, dass sein Schwerpunkt unterhalb des Körpers liegt und auch unterhalb der Latte durch fliegt. Dies ist aber nur möglich, weil erst Kopf und Oberkörper bei niedrigem Schwerpunkt über die Latte gehoben werden und wenn sich diese aufgrund der Rotationsbewegung bereits wieder absenken der Unterkörper und die Beine angehoben werden: der Hochspringer befindet sich zu keinem Zeitpunkt der Bewegung vollständig oberhalb der Latte, d.h. er muss auch nie den Körperschwerpunkt bis auf Lattenhöhe kriegen. Die Energieausnutzung wird optimal, wenn der Körper sehr weit nach hinten gebeugt werden kann, da dann der Schwerpunkt am niedrigsten liegt.

8.5 Komplexe Bewegungen, physikalisch beschrieben

8.5.1 Skater's Bewegung

Ein bereits recht komplexes Bewegungsmuster ergibt sich beim Skateboard bereits bei so einfachen Figuren wie einem Olli, vgl. Abb. 8.17. Die Figur startet aus einer Translationsbewegung. Das Drehmoment am Anfang der Bewegung ist Null. Der Sprung wird durch Verlagerung des Körpergewichts hinter die hintere Achse des Skateboards eingeleitet (Teilbild 3). Dabei wirkt die hintere Achse als Drehpunkt: zwar ist der Hebelarm nach hinten kürzer als der in vorwärts Richtung, da jedoch das Körpergewicht hinter die Drehachse verlagert wurde, entsteht ein Drehmoment, das das Skateboard aufrichtet – so weit, bis das Ende den Boden berührt. Erfolgt dieses Aufsetzen hinreichend schnell, so federt das Board vom Boden zurück und es ergibt sich eine schräg nach oben gerichtete Bewegung (Teilbild 4). Diese Bewegung

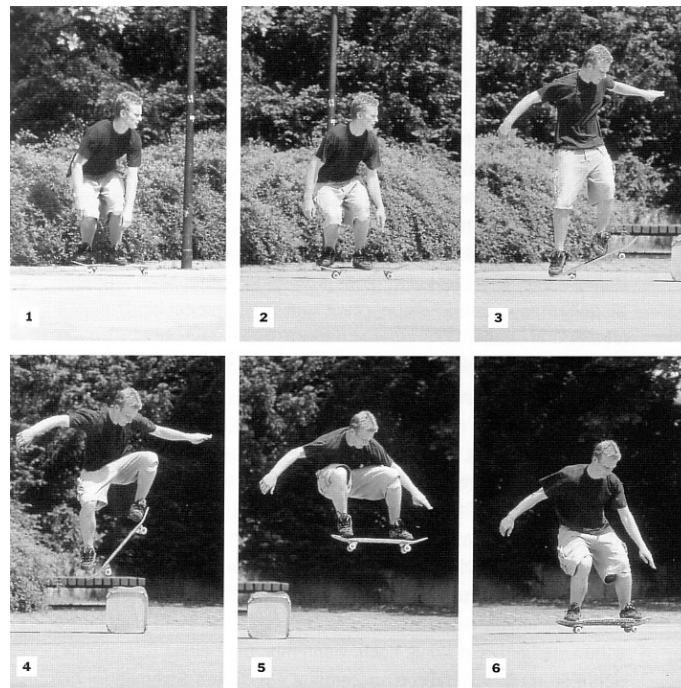


Abbildung 8.17: Sprung mit dem Skateboard [50]

des Boards wird durch das Vorrücken des vorderen Fußes über die Vorderachse im vorderen Bereich gebremst, so dass sich das Board im Flug waagrecht ausrichtet (Teilbild 5). Den Rest regelt die Gewichtskraft von Skater und Board, beide fallen gemeinsam zu Boden. Die Energie für den Sprung wird durch den Skater zur Verfügung gestellt, die Trägheit von Skater und Board bewirkt eine nahezu konstante horizontale Komponente der Geschwindigkeit (natürlich verzögert durch die Reibung).

8.5.2 Fallende Katzen

Ein nicht auf den Menschen bezogenes aber vom biomechanischen Standpunkt sehr interessantes Beispiel für eine recht komplexe Bewegung ist der Fall einer Katze: eine Katze fällt stets auf ihre Füße, unabhängig davon, wie ihre Orientierung beim Absprung bzw. Absturz war. Genauere Auswertungen stroboskopischer Bildsequenzen zeigen, dass die Katze nicht durch eine Bewegung beim Absprung in diese Rotation versetzt wird, das arme Tier rotiert auch, wenn es aus der Rückenlage einfach nach unten fallen gelassen wird. Der Drehimpuls der Katze am Anfang der Bewegung ist also Null. Da die Gewichtskraft auf den Massenmittelpunkt der Katze wirkt, bewirkt diese kein Drehmoment und der Drehimpuls der Katze sollte während des Falls Null bleiben.

Die Katze erzeugt die Rotation in einem komplexen Bewegungsmuster. Dieses beginnt damit, dass sie Vorder- und Hinterteil in unterschiedliche Richtungen dreht. Die Katze insgesamt hat dann weiterhin einen Drehimpuls von Null, da die beiden Drehimpulse von Vorder- und Hinterteil gleich groß aber entgegengesetzt sind. Zwar sind die Drehimpulse der beiden Teile gleich, die sich daraus ergebende Drehbewegung kann jedoch unterschiedlich sein, da sie zusätzlich vom Trägheitsmoment abhängt. Dieses wird von der Katze durch Anziehen und Strecken der Beine reguliert, so dass sich eine Rotation des Körpers ergibt und die Beine nach unten gerichtet sind, vgl. Abb. 8.18 und Abb. 8.19.

Dieses Modell scheint ein wenig in Konflikt mit den Erhaltungssätzen der Physik zu stehen. Die Erhaltung des Drehimpulses haben wir bereits diskutiert, sie ist erfüllt. Wie sieht es

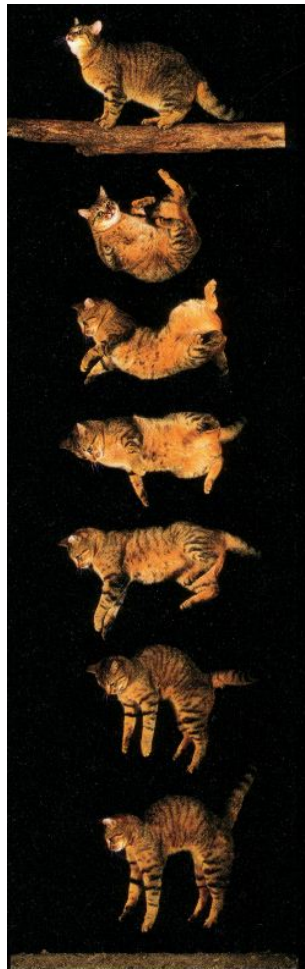


Abbildung 8.18: Fall einer Katze [26]

aber mit der Erhaltung der Energie aus? Wenn es zwischenzeitlich zu einer Rotation gekommen ist, so wurde (mindestens) eine Kraft aufgewendet, es wird also Arbeit verrichtet und die Energie ändert sich. Dies ist auch tatsächlich der Fall, da die Katze beim Anziehen und Strecken ihrer Beine Arbeit gegen die Schwerkraft leistet. Diese bleibt nicht als potentielle Energie erhalten sondern wird durch die damit verbundene Änderung des Trägheitsmoments und damit der Winkelgeschwindigkeit in kinetische Energie umgewandelt.

8.6 Energiebilanz und -umsätze

In einer früheren Übungsaufgabe haben Sie den Energieinhalt einer Tafel Schokolade im Vergleich zu verschiedenen physikalischen Arbeiten (Hubarbeit, Beschleunigungsarbeit) bestimmt. Dabei wurde die Diskrepanz zwischen der aus dem Energieinhalt zu erwartenden mechanischen Arbeit und der tatsächlich leistbaren deutlich. Die Ursache für diese Diskre-

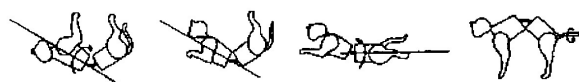


Abbildung 8.19: Fallende Katze: separate Drehungen von Vorder- und Hinterteil [57]

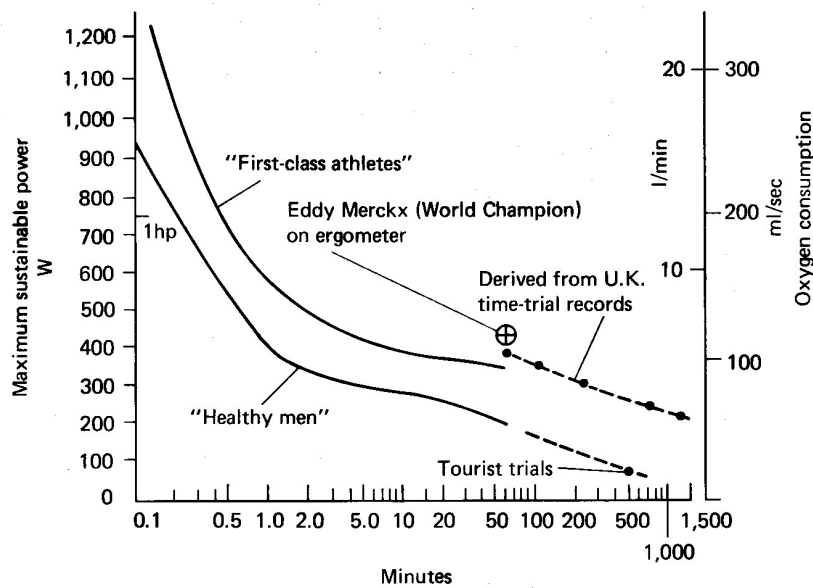


Abbildung 8.20: Leistungsfähigkeit des Menschen [54]

panz liegt in der Effizienz der Energieumwandlung. Ein großer Teil der dem Körper über die Nahrung zur Verfügung gestellten Energie wird als Grundumsatz für zwei Aufgaben benötigt:

- der menschliche Körper ist kein starrer Körper sondern die Knochen müssen durch die Muskeln in eine sinnvolle Lage zueinander gebracht werden. Daher verrichten die Muskeln die ganze Zeit über Haltearbeit – keine mechanische Arbeit im physikalischen Sinne sondern die die Umwandlung chemischer Energie in Muskelspannung und damit in Wärme.
- als lebender Organismus benötigt der menschliche Körper viel Energie zur Aufrechterhaltung biologischer Prozesse wie z.B. des Kreislaufs. Hier muss das Herz Arbeit gegen den Strömungswiderstand in den Gefäßen leisten. Da diese Arbeit gegen eine Reibungskraft verrichtet wird, ist sie nicht konservativ und kann nicht zum Leisten physikalischer Arbeit verwendet werden. Stattdessen wird auch diese Energie in Wärme umgewandelt.

Das Endprodukt dieser beiden Prozesse, die Abwärme, ist zwar im Sinne von mechanischer Arbeit keine sinnvolle Energienutzung, sie wird jedoch benötigt, um beim Warmblüter Mensch den Wärmeverlust an die, in der Regel kühlere, Umgebung zu kompensieren. Als gute Näherung können Sie davon ausgehen, dass ca. 20–30% der zur Verfügung stehenden chemischen Energie der Nahrung in mechanische Energie umgewandelt werden kann. Dieser Wirkungsgrad⁴ ist relativ niedrig, er ist mit dem anderer Wärmekraftmaschinen wie dem Automotor vergleichbar. Auch wenn im Bezug auf den Wirkungsgrad und die Energieumwandlung der Vergleich mit der Wärmekraftmaschine sinnvoll ist, ist er es in einem anderen Zusammenhang nicht: der Motor liefert eine relativ konstante Leistung während die Leistung der Mensch von äußeren Bedingungen und der Tagesform abhängt und selbst innerhalb einer Bewegung hochgradig variabel sein kann; so kann die maximale momentane Leistung beim pedalieren ungefähr 1 PS (entspricht 746 W) betragen, die mittlere Leistung liegt jedoch eher im Bereich von 0.2 PS.⁵

⁴Der Wirkungsgrad ist das Verhältnis aus erwünschter Arbeit, in diesem Fall mechanischer Arbeit, zu eingesetzter Energie, in diesem Fall die chemische Energie der Nahrung.

⁵Der Vergleich mit einer Wärmekraftmaschine ist auch insofern nicht korrekt, als dass eine Wärmekraftmaschine chemische Energie (Kohle, Gas, Erdöl) erst durch Verbrennung in Wärmeenergie umwandelt und diese dann in mechanische Arbeit gewandelt wird. Beim Menschen dagegen kann chemische Energie direkt in mechanische Energie im Sinne von Muskelkontraktion umgewandelt werden. Außerdem

Aufgrund der unterschiedlichen im Körper möglichen Mechanismen der Energiebereitstellung, ist die Leistung eines Menschen auch von der Dauer der Belastung abhängig: die Leistung beginnt mit einem Maximum, bei der der Muskel die Energie aus anaeroben Stoffwechselfvorgängen bezieht, und entwickelt sich zu einer Dauerleistung auf der Basis aerober Stoffwechselfvorgänge. Selbst im Bereich der Dauerbelastung ergibt sich im Laufe der Zeit eine langsame Abnahme der Leistungsfähigkeit. Letzteres scheint im wesentlichen durch die Begrenzung des für den Abtransport der Stoffwechselendprodukte verantwortlichen Systems bestimmt zu sein. Abbildung 8.20 gibt einen Hinweis auf diese Abhängigkeit der Leistungsfähigkeit im Laufe der Zeit. Beachten Sie, dass die Zeitskala logarithmisch ist und einen Bereich von bis zu 24 h umfasst. Die initiale Leistung innerhalb der ersten Sekunden der Bewegung beträgt ungefähr 900 W beim ‘gesunden Menschen’ und weit über 1200 W beim Spitzenathleten. Innerhalb der ersten Minute sinken diese Werte auf 350 W bzw. 550 W, d.h. ungefähr auf 1/3 des Anfangswerts. Von dort an sinkt die Leistungsfähigkeit nur noch langsam ab, nach ca. 1 Stunde ergeben sich Werte von ungefähr 200 W für den Normalverbraucher und ungefähr 350 W für den Spitzenathleten. Innerhalb der folgenden 10 Stunden halbieren sich diese Werte nochmals. Die Werte liegen oberhalb der vom Fahrradergometer bekannten Werte für die menschliche Leistungsfähigkeit, da auf letzterem auf Grund der fehlenden Kühlung durch den ‘Fahrtwind’ nicht die volle Leistung erbracht werden kann.

8.7 Aufgaben

8.7.1 Fragen

1. Wo befindet sich der Massenmittelpunkt eines Donut?
2. Warum ist ein Ruderboot (bezüglich des Gleichgewichts) stabiler als ein Kanu?
3. Stellen Sie sich vor, Sie sollen aus dem Lauf heraus einen Überschlag machen (Körper gerade). Mit Entsetzen stellen Sie bereits fliegend fest, dass ihre Geschwindigkeit dafür nicht ausreicht. Wie können Sie sich helfen?
4. Ist es für einen Turmspringer möglich, mehr Überschläge in der Tuck-Haltung als in der Layout-Haltung zu absolvieren?
5. Warum dreht sich die Eiskunsläuferin schneller, wenn sie die Arme anzieht?
6. Sie stehen vor einer Wand, die Zehen berühren die Wand. Warum können Sie sich in dieser Position nicht auf die Zehenspitzen stellen?
7. Ein Weitspringer benötigt für die letzten 3 m seines Anlaufs 0.4 s. Die mittlere horizontale Geschwindigkeit ist
 - 7.0 m/s
 - 8 m/s
 - 7.5 m/s
 - 9 m/s

muss der Mensch im Gegensatz zur Wärmekraftmaschine auch in Ruhe etliches an Energie verbrennen (Grundumsatz), was für eine Maschine nicht erforderlich ist. Ein weiterer Unterschied zwischen Mensch und Wärmekraftmaschine liegt in der Ausnutzung des in der Luft zur Verfügung stehenden Sauerstoffs. Nur ca. 20% der Luft sind der zur Verbrennung benötigte Sauerstoff, d.h. um einen Liter Sauerstoff für die Verbrennung zu gewinnen, müssen mindestens 5 Liter Luft durch die Lunge ventiliert werden. Diese ist jedoch so ineffizient, dass erst aus 24 Litern Luft 1 Liter Sauerstoff extrahiert wird, d.h. ca. 380% mehr Luft wird ventiliert als aus der Sicht des Sauerstoffgehalts erforderlich. Bei der Wärmekraftmaschine beträgt dieser Sauerstoffüberschuss nur ca. 5–10%. Lediglich Gasturbinen benötigen einen dem Menschen vergleichbaren Sauerstoffüberschuss von 200% [54].

8. Ein Trampolinspringer springt 5 m hoch. Seine Aufprallgeschwindigkeit bei der Landung im Tuch ist
- 3 m/s
 - 4 m/s
 - 6 m/s
 - 12 m/s
 - 10 m/s
9. Die Beschleunigung der Hand beim Wurf mit Ausholbewegung ist im Moment des Umkehrpunktes der Bewegung
- null
 - positiv
 - negativ
10. Die Flughöhe des Sprungs ist abhängig von
- der vertikalen Abfluggeschwindigkeit
 - der horizontalen Abfluggeschwindigkeit
 - der horizontalen und der vertikalen Abfluggeschwindigkeit.
11. Die Flugdauer eines Sprungs ist abhängig von
- der vertikalen Abfluggeschwindigkeit
 - der Flugweite
 - der horizontalen Fluggeschwindigkeit
 - der horizontalen und der vertikalen Fluggeschwindigkeit.
12. Die horizontale Geschwindigkeit eines Turners (Körperschwerpunkt) in der zweiten Flugphase beim Pferdsprung (Annahme keine Reibung)
- nimmt zu
 - bleibt konstant
 - nimmt linear ab
 - nimmt quadratisch ab.
13. Ein Athlet hält bei 90° Winkel im Ellenbogengelenk eine Kurzhantel mit einem Gewicht von 50 N. Der Abstand der Hantel zum Ellbogengelenk beträgt 0.4 m. Der Hebel des M. biceps sei 0.05 m. Wie groß ist die Kraft des Muskels?
- 800 N
 - 400 N
 - 100 N
 - 400 N
 - 1000 N
14. Ein Proband mit einer Masse von 60 kg erzeugt beim Vertikalsprung einen vertikalen Kraftstoß von 120 Ns. Mit welcher Geschwindigkeit verlässt er den Boden?
- 3 m/s
 - 5 m/s

- 2 m/s
 - 1 m/s
 - 2.5 m/s.
15. Wie groß ist seine Flughöhe ($g = 10 \text{ m/s}^2$)?
- 0.4 m
 - 0.2 m
 - 0.8 m
 - 1 m
 - 0.3 m
16. Das an einem Körper wirkende Drehmoment ist abhängig von
- der Kraft
 - von Kraft und Hebel
 - von der Lage des Körperschwerpunkts
 - vom Kraftangriffspunkt.
17. Die Radialkraft ist zur Fliehkraft
- senkrecht
 - parallel und wirkt in derselben Richtung
 - entgegen gesetzt und hat denselben Betrag?
18. Bei einer Videoaufzeichnung mit 50 Hz wird zwischen zwei Bildern eine Veränderung des Kniegelenkwinkels von 5° festgestellt. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit?
- $0.1^\circ/\text{s}$
 - $0.5^\circ/\text{Hz}$
 - $250^\circ/\text{s}$
 - $10^\circ/\text{s}$
 - $2.5^\circ/\text{s}$
19. Ein Hochspringer hat eine Masse von 60 kg. Seine mittlere vertikale Beschleunigungskraft beträgt 1200 N, die Beschleunigungsdauer beträgt 0.2 s. Die vertikale Abfluggeschwindigkeit des Springers ist
- 3.6 m/s
 - 3.8 m/s
 - 4.2 m/s
 - 4.8 m/s
 - 4.0 m/s
20. Ein Fußball ($m = 0.4 \text{ kg}$) verlässt bei einem Schuss den Fuß mit einer Geschwindigkeit von 108 km/h. Der Impuls, der beim Schuss übertragen wurde, beträgt
- 20 kg m/s
 - 16 kg m/s
 - 22 kg m/s

12 kg m/s

15 kg m/s

21. Bei einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung ergibt sich der Weg-Zeit-Verlauf aus:

$s(t) = \int a dt$

keine der Antworten ist richtig

$s(t) = at$

$s(t) = vt + s_0$

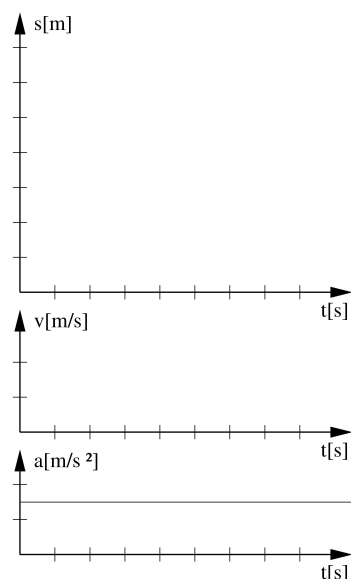
$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$

22. Die dargestellte Graphik zeigt den Beschleunigungs-Zeit-Verlauf einer Bewegung. Skizzieren Sie den Weg-Zeit-Verlauf und den Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf. Handelt es sich um

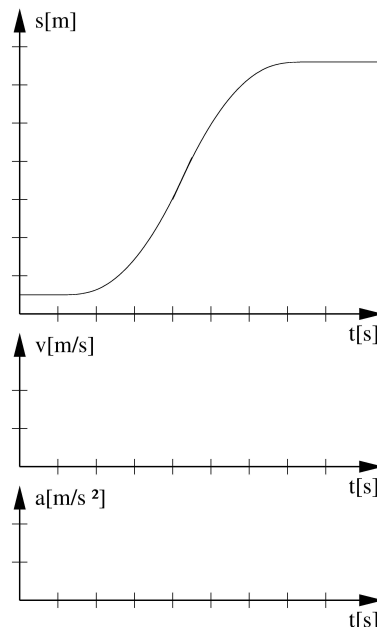
eine gleichförmig beschleunigte Bewegung

eine gleichförmige Bewegung

eine ungleichmäßig beschleunigte Bewegung?



23. Skizzieren Sie zum dargestellten Weg-Zeit-Verlauf den Geschwindigkeits-Zeit-Verlauf und den Beschleunigungs-Zeit-Verlauf.

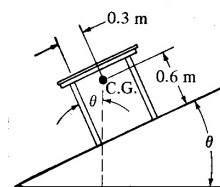


24. Die Geschwindigkeit des Körperschwerpunktes beim vertikalen Sprung mit Ausholbewegung ist im Moment des Umkehrpunktes der Bewegung

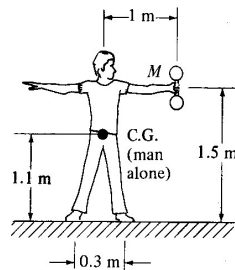
- null
 positiv
 negativ

8.7.2 Aufgaben

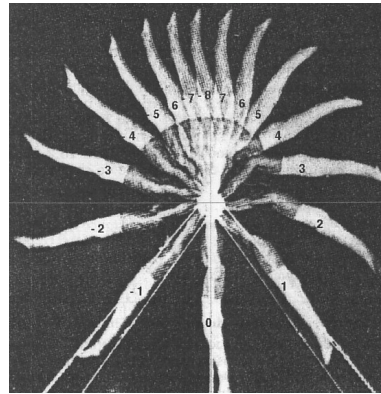
- Der Unterarm einer Frau hat eine Masse von 1.1 kg, der Oberarm eine von 1.3 kg. Bei gerade ausgestrecktem Arm ist der Massenmittelpunkt des Unterarms 0.3 m und der des Oberarms 0.07 m vom Schultergelenk entfernt. Wo liegt der Massenmittelpunkt des gesamten Arms relativ zum Schultergelenk?
- Ein 80 kg schwerer Wanderer trägt einen 20 kg schweren Rucksack. Der Massenmittelpunkt des Wanderers ohne Rucksack befindet sich 1.1 m über dem Boden. Der Massenmittelpunkt des Rucksacks liegt 1.3 m über dem Boden, wenn er getragen wird. Wie weit liegt der Schwerpunkt des Systems Wanderer–Rucksack über dem Boden?
- Ab welchem Winkel θ wird der Tisch umkippen [?]?



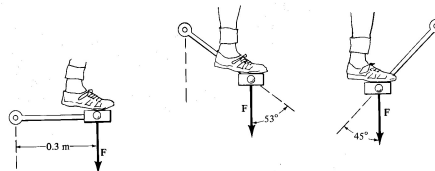
- Die abgebildete Person hat eine Masse von 100 kg. Ihre Arme sind horizontal zur Seite ausgestreckt, in einer Hand hält sie eine Masse M . (a) Bestimmen Sie die horizontale und die vertikale Position des Massenmittelpunkts (ohne Masse M befindet er sich in der Mitte zwischen den beiden Füßen). (b) Welche maximale Masse kann die Person halten ohne umzukippen [?]?



5. Wieviel kinetische Energie muss ein 70 kg Hochspringer beim Anlauf erzeugen, um über eine 2.4 m hohe Latte zu kommen? Nehmen Sie dazu an, dass der Massenmittelpunkt des Hochspringers normalerweise bei 0.8 m liegt und er um 0.2 m unter der Latte hindurch geht.
6. Welche mittlere Leistung erbringt ein Gewichtheber, der ein 130 kg Gewicht innerhalb von 1.2 s um 1.5 m hebt?
7. Welche Leistung erbringt ein 60 kg Sprinter, der aus dem Stand innerhalb von 3 s auf eine Geschwindigkeit von 10 m/s beschleunigt?
8. Die Stroboskopaufnahme zeigt den Bewegungsablauf bei einer Welle am Reck [?].
 - (a) Handelt es sich um eine Kreisbewegung? Wenn ja, um was für eine?
 - (b) Welche Bahn beschreibt der Körperschwerpunkt?
 - (c) Warum verändert sich der zwischen zwei Aufnahmen zurück gelegte Winkel?
 - (d) Gilt die Energieerhaltung? Begründung!
 - (e) Gilt die Erhaltung des Drehimpuls? Begründung!

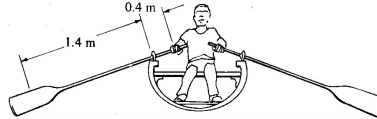


9. Ein Radfahrer übt eine abwärts gerichtete Kraft \vec{F} der Stärke 100 N auf ein Pedal aus. (a) Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung des Drehmoments für die drei gezeigten Fälle. (b) In welcher Pedalposition ist das Drehmoment maximal [?]?
 - (a) Bestimmen Sie den Betrag und die Richtung des Drehmoments für die drei gezeigten Fälle.
 - (b) In welcher Pedalposition ist das Drehmoment maximal [?]?

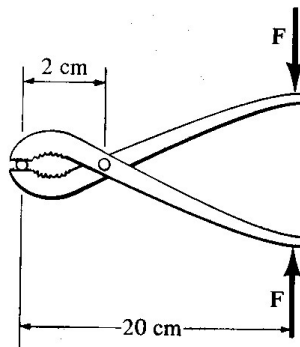


10. Zwei Kinder sitzen auf einer ausbalanzierten Wippe. Das eine hat eine Masse von 16 kg und sitzt in einem Abstand von 1.5 m vom Drehpunkt. Das zweite Kind sitzt in einem Abstand von 1.5 m. Wie groß ist seine Masse?

11. Ein Ruder wird in einem Abstand von 0.4 m vom Drehpunkt am Boot gehalten. Es berührt die Wasserfläche in einem mittleren Abstand von 1.4 m. Was ist der Vorteil dieser Konstruktion [?]?



12. Welchen mechanischen Vorteil hat eine Nussknacker in Zangenform? Welche Kraft wird auf die Nuss ausgeübt, wenn eine Kraft $F = 10 \text{ N}$ aufgewandt wird [?]?



13. Beim Stabhochsprung verwendet der Sportler den Stab um seine kinetische Energie in potentielle Energie umzuwandeln. Ein guter Läufer läuft mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s . Vernachlässigen sie den zusätzlichen Höhengewinn, den der Sportler durch Einsatz seiner Arme erreicht. Bis zu welcher Höhe kann er seinen Schwerpunkt allein durch den Anlauf heben?
14. Eine Frau mit einer Masse von 50 kg steigt auf einen 3000 m hohen Berg. (a) Wie groß ist die dabei verrichtete Arbeit? (b) 1 kg Körperfett stellt eine Energie von $3.8 \cdot 10^7 \text{ J}$ bereit. Wenn sie dieses mit einer Effizienz von 20% in mechanische Energie umwandeln kann, wieviel Fett verbrennt sie während des Aufstiegs?
15. Ein Mensch hebt (mit der Zielsetzung abzunehmen) ein 10 kg Gewicht 1000 mal über eine Höhe von 0.5 m . (a) Welche Arbeit verrichtet er dabei? (b) Fett stellt eine Energie von $3.8 \cdot 10^7 \text{ J}$ pro kg zur Verfügung, wovon jedoch nur 20% in mechanische Energie umgewandelt werden können. Wieviel Fett wird bei der Übung verbrannt?
16. Ein Mensch hebt eine 20 kg Masse vertikal über eine Strecke von 0.5 m . (a) Wieviel Arbeit wird dabei verrichtet? (b) Wenn er die Masse auf ihre ursprüngliche Höhe absenkt, wie groß ist die dabei verrichtete Arbeit? Und an wem wird sie verrichtet: an der Masse oder dem Mann? (c) Was geschieht mit dieser Energie?
17. Ein Mensch kann mechanische Arbeit mit einer Rate von 8 W pro kg Körpergewicht über längere Zeiträume verrichten. Wie schnell kann er damit eine Treppe hinauf laufen?
18. Eine Turmspringerin der Höhe h möchte einen doppelten Vorwärts-Flip in der Tuck-Haltung springen, d.h. mit den Armen um die angezogenen Beine gelegt. Sie verlässt das Sprungbrett in aufrechter Position mit einer Winkelgeschwindigkeit von 2 rad/s . Ihr Gyrationradius ist $0.25 h$ in der aufrechten Position und $0.1 h$ in der Tuck-Position. (a) Bestimmen Sie ihre Winkelgeschwindigkeit in der Tuck-Position. (b) Welche Zeit ist minimal für die zwei Umdrehungen erforderlich? (c) Wie hoch muss das Sprungbrett mindestens angebracht sein, um diesen Sprung auch dann ausführen zu können, wenn die Springerin anfänglich keine vertikale Komponente der Translationsgeschwindigkeit

- hat. (d) Hat eine große Person einer kleineren gegenüber irgendwelche Vorteile bei der Durchführung dieses Sprunges?
19. Ein Bungee-Jumper (betrachtet als Massenpunkt) der Masse $m = 90$ kg springt aus einer Höhe von 100 m an einem Seil (gehört wie eine Feder dem Hooke'schen Gesetz) der Länge $l_{\text{unbelastet}} = 72$ m ab, das sich bei Belastung durch die Gewichtskraft des Springers auf $l_{\text{belastet}} = 96$ m dehnt. Die Bewegung setzt sich zusammen aus einer Freiflugphase, in der das Seil nicht gespannt ist und nur die Erdbeschleunigung die Bewegung des Springers beeinflusst. Dem schließt sich eine Abbremsphase an, in der der Springer durch die Dehnung des Seils abgebremst wird. (a) Welche Geschwindigkeit hat er am Ende der Freiflugphase? (b) Wie groß muss die durch das Seil ausgeübte Verzögerung sein, damit der Springer nicht hart auf den Boden auftrifft? (c) Wie lange dauert die Abbremsphase? (d) Geben Sie eine Kenngröße für das Seil an, mit dem Sie diese Verzögerung charakterisieren können.
20. Einen Bungee-Jumper können wir uns als gedämpftes Federpendel vorstellen. Das Seil entspricht einer Feder, die Verlängerung des Seils über seine Ruhelänge entspricht der Auslenkung des Federpendels. Bei einem ungedämpften Federpendel würde der Körper mit einer Periode T um die Ruhelage schwingen, wobei sich die Auslenkung aus der Ruhelage nicht verändert. Für den Bungee-Jumper ist das nicht so attraktiv, da er irgendwann einmal wieder festen Boden unter den Füßen haben möchte. Daher muss die Schwingung gedämpft sein. Wie verändert sich dann die Schwingungsdauer gegenüber der ungedämpften Schwingung? Begründen Sie!

Kapitel 9

Hydrostatik: Kontinuierliche Medien in Ruhe

Bisher haben wir die Bewegung von Einzelkörpern betrachtet, sei es abstrakt als Massenpunkt oder anschaulicher als Zylinder oder Möwe. Diese Einzelkörper befinden sich in der natürlichen Umwelt stets in einem kontinuierlichen Medium: der Luft oder dem Wasser. Die Grundkonzepte zu deren Beschreibung sollen hier vorgestellt werden.

Materie kann in drei verschiedenen Zuständen auftreten: fest, flüssig oder gasförmig. Die Eigenschaften dieser Aggregatzustände sind:

	fest	flüssig	gasförmig
intermolekulare Kräfte	groß	gering	gering
Form	konstant	veränderlich	veränderlich
komprimierbar	nein	nein	ja

Flüssigkeiten und Gase haben ähnliche Eigenschaften insofern, als dass die intermolekularen Kräfte gering und die Medien damit leicht verformbar sind. Der wesentliche Unterschied besteht darin, dass Gase im Gegensatz zu Flüssigkeiten komprimierbar sind. Die Ähnlichkeiten zwischen Flüssigkeiten und Gasen erlauben in den meisten Situationen die Beschreibung durch die gleichen oder zumindest sehr ähnliche Gleichungen. Erst wenn die Möglichkeit der Kompression wichtig wird, unterscheiden sich die Beschreibungen. Wir werden dies im Vergleich von hydrostatischer Grundgleichung und barometrischer Höhenformel kennen lernen.

Da die Gemeinsamkeiten zwischen beiden überwiegen, beinhaltet die Hydrostatik und später die Hydrodynamik (Kapitel 10) die entsprechenden Gesetze für (bewegte) Gase. So ist die Aerodynamik in der Hydrodynamik enthalten, die meisten Beispiele in Kapitel 10 stammen auch eher aus der Aerodynamik.

9.1 Grundgrößen

In der Hydrostatik benötigen wir zwei neue Grundgrößen zur Beschreibung kontinuierlicher Medien.

In der Mechanik beschreibt man die Bewegung $\vec{r}(t)$ einer Masse m , bzw. in der idealisierten Form eines Massenpunktes, unter der Einwirkung einer Kraft \vec{F} . Der formale Zusammenhang zwischen diesen Größen ist durch das zweite Newton'sche Axiom (Aktionsgesetz) gegeben

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \stackrel{m=\text{const}}{=} m \cdot \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (9.1)$$

Diese Bewegungsgleichung ist in vektorieller Form gegeben, da gerade in kontinuierlichen Medien die Bewegungen in der Regel drei-dimensional sind: betrachten Sie nur einmal den Flug eines Vogels, den Fall eines Ahornsamens oder die Ausbreitung einer Rauchwolke.

9.1.1 Massendichte

Im Aktionsgesetz (9.1) sind der Ort \vec{r} , die Masse m und die Kraft \vec{F} die Grundgrößen. Welche Grundgrößen lassen sich im Falle eines kontinuierlichen Mediums wie z.B. der Atmosphäre oder eines Flusses verwenden? Die Gesamtmasse des Flusses ist sicherlich nicht sinnvoll: zum einen ist sie messtechnisch kaum zu erfassen und, je nachdem, wieviel Wasser der Fluss führt, nicht konstant; zum anderen interessiert nicht die Bewegung des Flusses insgesamt (der sollte, außer bei Überschwemmungen, immer in seinem Bett bleiben), sondern die des Wassers im Fluss. Um diese zu beschreiben, können wir uns einen kleinen Würfel Wasser in der Nähe der Quelle auswählen und seine Bewegung verfolgen. Diesen Würfel bezeichnen wir als *Flüssigkeitselement* oder *Volumenelement*. Beide Begriffe werden auch bei gasförmigen Medien verwendet. Dieses Volumenelement V hat die Masse m , d.h. es lässt sich wieder eine Grundgröße Masse einführen, die aber von der Größe V des Volumenelements abhängt. Eine Unabhängigkeit von V kann man erreichen, indem man die Massendichte ϱ als Masse pro Volumen einführt:

Definition 25 Die (Massen-)Dichte ϱ ist das Verhältnis aus der Masse m und dem Volumen V eines Körpers: $\varrho = m/V$.

Die Einheit der (Massen-)Dichte ist kg/m^3 .

Die Massendichte ϱ gibt die auf ein Volumenelement bezogene Masse. Sie beschreibt eine Eigenschaft der Flüssigkeit. Die Masse eines Volumenelements lässt sich daraus durch Multiplikation mit der Größe des Volumenelements bestimmen. Analog lassen sich auch andere Dichten einführen. So lässt sich die im Volumenelement enthaltene kinetische Energie E_{kin} als $mv^2/2$ bestimmen, was zu einer kinetischen Energiedichte der Flüssigkeit von $\epsilon_{\text{kin}} = E_{\text{kin}}/V = mv^2/(2V) = \varrho v^2/2$ führt. Entsprechend lässt sich eine Kraftdichte \vec{f} einführen als die Kraft \vec{F} pro Volumenelement V . Damit können wir die Bewegungsgleichung (9.1) umschreiben auf Dichten

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{V} = \frac{m}{V} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \varrho \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (9.2)$$

9.1.2 Druck

Definition 26 Der Druck p ist definiert als die Kraft F_{\perp} , die senkrecht auf eine Fläche A wirkt: $p = F_{\perp}/A$.

Druck entsteht durch die Stöße (und den damit verbundenen Impulsübertrag) zwischen den Molekülen eines kontinuierlichen Mediums bzw. zwischen Molekülen und einer Grenzfläche (z.B. Gefäßwand). Der Druck ist definiert als die Kraft pro Fläche (korrekt: die Kraftkomponente senkrecht zu einer Fläche dividiert durch diese Fläche):

$$p = \frac{F_{\perp}}{A} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right] = \text{Pa} \quad (9.3)$$

Alte Einheit des Drucks ist das bar mit $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ N/m}^2 = 10^5 \text{ Pa} = 1000 \text{ hPa}$. Hektopascal (hPa) ist die Einheit, die bei der Angabe des Luftdrucks im Wetterbericht verwendet wird, da 1 hPa dem früher verwendeten mbar entspricht.

9.1.3 Pascal'sche Prinzip

Eine Änderung des Druckes an irgendeinem Punkt einer eingeschlossenen Flüssigkeit setzt sich unmittelbar auf alle anderen Punkte fort. Daher ist der Druck der Flüssigkeit bei vorgegebener Tiefe stets gleich, unabhängig von der Form des Gefäßes, vgl. linkes Teilbild in Abb. 9.1. Ein Anwendung des Pascal'schen Prinzips ist die Hebebühne, vgl. rechten Teil von Abb. 9.1: ähnlich wie der Hebel soll die Hebebühne verwendet werden um große Massen mit

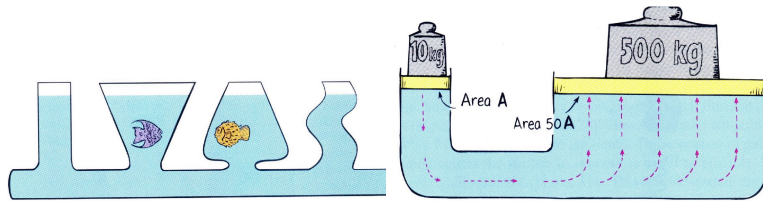


Abbildung 9.1: Druck und Gefäßform (links) und Hebebühne (rechts) (Hewitt, 1998)

einem relativ geringen Kräfteinsatz zu heben. Die große Masse (und damit eine große Gewichtskraft) wird auf eine große Fläche gestellt (rechter Teil). Der dadurch auf die Flüssigkeit ausgeübte Druck $p = F/A$ setzt sich in dieser fort und muss auf der linken Seite durch Auflage einer Masse kompensiert werden (Hinweis: da die Kraft in dieser Konfiguration ohnehin senkrecht auf der Fläche steht, können wir wie beim Hebel F_{\perp} durch F ersetzen). Da hier die Fläche des Zylinders kleiner ist, reicht auch eine kleinere Gewichtskraft (bzw. eine kleinere Masse), um den gleichen Druck zu erzeugen. Aus dem Gleichgewicht der Drücke im linken und rechten Zylinder der Hebebühne folgt also

$$p_l = p_r \quad \Rightarrow \quad \frac{F_l}{A_l} = \frac{F_r}{A_r}. \quad (9.4)$$

Darin kann man für die Gewichtskraft jeweils das Produkt aus Masse und Gravitationsbeschleunigung einsetzen, letztere heraus kürzen und erhält dann als Bedingung für die unterstützten Massen in Abhängigkeit von der Querschnittsfläche der Zylinder

$$\frac{m_l}{A_l} = \frac{m_r}{A_r}. \quad (9.5)$$

Die beim Heben mit einer Hebebühne verrichtete Arbeit muss die gleiche sein wie beim Anheben ohne die Hebebühne. Da auf der linken Seite eine geringere Kraft wirkt, muss der Hubweg entsprechend länger sein. Dieses Prinzip ist uns bereits beim Hebel und beim Flaschenzug in Abb. 6.3 begegnet.

9.2 Hydrostatische Grundgleichung

Der Druck p ist definiert als die Kraft F_{\perp} , die senkrecht auf eine Fläche A wirkt: $p = F_{\perp}/A$. Der Luftdruck ist daher die Gewichtskraft der Atmosphärensäule, die auf einer Einheitsfläche lastet. Geht man in der Atmosphäre ein Stückchen nach oben, so wird die Luftsäule über der Einheitsfläche geringer, der Luftdruck nimmt ab. Wir erwarten daher eine Funktion des Druckes in Abhängigkeit von der Höhe: $p = p(h)$. Die umgekehrte Situation begegnet uns beim Tauchen: dann lastet nicht nur die Luftsäule sondern auch die mit zunehmender Wassertiefe immer größere Wassersäule auf unseren Schultern, d.h. der Druck nimmt zu.

Betrachten wir ein Volumenelement innerhalb einer Luft- oder Wassersäule, vgl. Abb. 9.2. Das Volumenelement habe die Grundfläche A , die Höhe dh und befinde sich in einer Höhe h in der Luftsäule in Ruhe. Sein Volumen ist $V = A \cdot dh$. Dann wirken drei Kräfte: die Gewichtskraft auf das Volumenelement $F_g = mg = \rho Vg = \rho A dh g$ und die Gewichtskraft der darüberliegenden Luftsäule, die sich über den Luftdruck $p(h + dh)$ an der Oberkante des Volumenelements schreiben lässt als $F_{\downarrow} = p(h + dh) \cdot A$. Beide Kräfte wirken nach unten. Da sich das Volumenelement nicht bewegen soll, muss es von der darunterliegenden Luftsäule gestützt werden, d.h. es wirkt eine Kraft $F_{\uparrow} = p(h) \cdot A$ nach oben. Die Kräftebilanz lässt sich schreiben als

$$F_g + F_{\downarrow} = F_{\uparrow} \quad \Rightarrow \quad p(h + dh) \cdot A + \rho A dh g = p(h) \cdot A \quad (9.6)$$

Umformen und Einführung von $dp = p(h + dh) - p(h)$ liefert

$$dp = -\rho g \cdot dh. \quad (9.7)$$

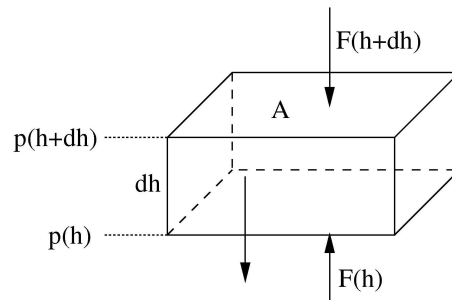


Abbildung 9.2: Kräfte auf ein Volumenelement

Diese Differentialgleichung beschreibt den allgemeinen Zusammenhang zwischen einer Druckänderung dp und einer Höhenänderung dh . Sie ist eine Bestimmungsgleichung für die gesuchte Funktion $p(h)$, die die Abhängigkeit des Drucks von der Höhe beschreibt. Hergeleitet haben wir sie unter der Annahme, dass sich das Volumenelement nicht bewegt (Kräftegleichgewicht), d.h. wir betrachten den hydrostatischen Fall.

9.2.1 Hydrostatische Grundgleichung (Flüssigkeiten)

Die von uns gesuchte Druckschichtung $p(h)$ ergibt sich aus (9.7) durch Integration. Wenn wir die rechte Seite integrieren wollen, müssen wir uns überlegen, ob ρ und g von der Höhe abhängen oder nicht: im ersten Fall bleiben sie unter dem Integral stehen, im zweiten können sie als Konstanten vor das Integral gezogen werden. Diese Frage beantworten wir dadurch, dass wir uns eine Situation vorstellen, die wir beschreiben wollen. Betrachten wir z.B. einen See oder einen Ozean, d.h. eine Flüssigkeit. Aus der Differentialgleichung (9.7) wollen wir bestimmen, wie der Druck mit der Wassertiefe zunimmt. Die typischen Längenskalen sind einige Meter bis maximal 10 km, d.h. der Höhenbereich ist insgesamt so klein, dass die Gravitationsbeschleunigung g konstant ist (korrekterweise würde sie sich bei einer Höhendifferenz von 10 km gegenüber dem Erdboden um 0.3 % ändern). Außerdem ist Wasser praktisch inkompressibel, d.h. auch die Dichte ρ ist konstant (korrekterweise nimmt sie geringfügig mit der Tiefe zu: in einer Tiefe von 1 km ist die Dichte jedoch nur um 0.5 % größer als an der Oberfläche; am tiefsten Punkt des Ozeans, im Marianengraben, um 6 %). Beide Größen können daher vor das Integral gezogen werden. Jetzt müssen wir uns noch ein geeignetes Koordinatensystem suchen, um die Integration auszuführen. Nehmen wir die Wasseroberfläche $h = 0$ als Referenzhöhe, auf der der Druck p_0 herrscht und integrieren bis zu einer Tiefe $-h$ (negatives Vorzeichen, da wir nach unten gehen), in der der Druck $p(h)$ herrschen soll. Damit wird (9.7) zu

$$\int_{p_0}^p dp = -\rho g \int_0^{-h} dh \quad (9.8)$$

bzw. nach Ausführen der Integration

$$p(h) - p_0 = \rho gh - \rho g \cdot 0 \Rightarrow p(h) = p_0 + \rho gh. \quad (9.9)$$

Diese Gleichung ist die hydrostatische Grundgleichung. Sie beschreibt, wie der Druck p in einer Flüssigkeit der Dichte ρ mit der Tiefe h zunimmt. Der Zusammenhang ist linear: $p \sim h$; der Gesamtdruck p auf einen Fisch/Taucher in einer Tiefe h setzt sich zusammen aus dem äußeren Druck p_0 und dem von der Wassersäule in der Tiefe h ausgeübten Druck ρgh . Taucht der Fisch um eine Höhe Δh ab, so nimmt der Druck um $\rho g \Delta h$ zu, unabhängig davon, von welcher Ausgangshöhe h der Fisch abtaucht. Ob man also von der Wasseroberfläche oder von 100 m Tiefe aus um dieses Δh abtaucht, die Druckzunahme ist gleich, auch wenn der Gesamtdruck unterschiedlich ist.

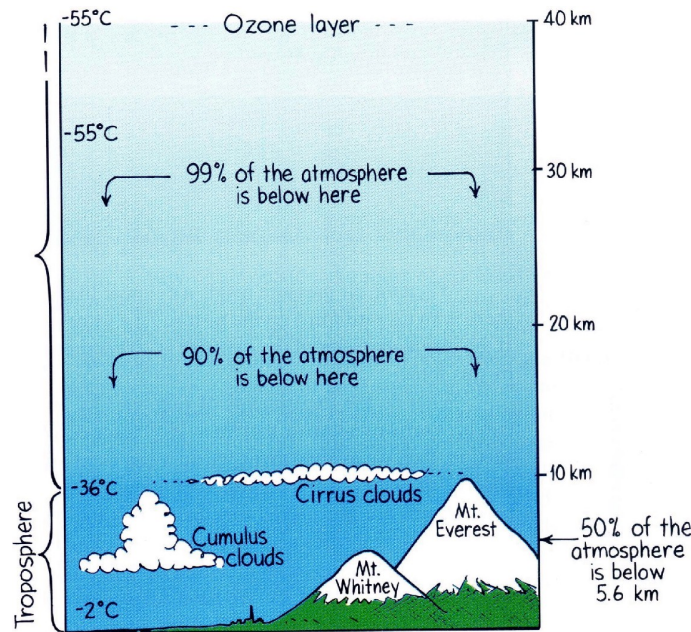


Abbildung 9.3: Aufbau der Atmosphäre [22]

9.2.2 Barometrische Höhenformel

Kann man Gleichung (9.9) auch auf die Druckschichtung in der Atmosphäre anwenden? Wenn alle Annahmen, die in (9.9) eingehen auch in der Atmosphäre gültig sind, ja. Das ist jedoch nicht der Fall: ein Gas ist kompressibel, d.h. seine Dichte ρ ist von der Höhe abhängig: $\rho(h)$. Damit ist die allgemeine Gleichung (9.7) anders zu behandeln, ρ kann nicht vor das Integral gezogen werden. Die Thermodynamik liefert für den Fall konstanter Temperatur $\rho/\rho_0 = p/p_0$. Setzen wir dies in (9.7) ein, so ergibt sich nach Umstellen

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} g dh . \quad (9.10)$$

Rechts stehen jetzt Konstanten, die vor das Integral gezogen werden können:

$$\int_{p_0}^p \frac{1}{p} dp = -\frac{\rho_0}{p_0} g \int_0^h dh . \quad (9.11)$$

Als Koordinatensystem haben wir wieder den Boden als $h = 0$ mit einem Druck p_0 gewählt und suchen nun den Druck p in einer Höhe h (positiv, da wir vom Erdboden aus nach oben gehen). Ausführen der Integration liefert

$$\ln p - \ln p_0 = -\frac{\rho_0}{p_0} gh \quad \Rightarrow \quad \ln p = \ln p_0 - \frac{\rho_0}{p_0} gh . \quad (9.12)$$

Um den Logarithmus los zu werden, wenden wir auf beide Seiten der Gleichung seine Umkehrfunktion, die Exponentialfunktion, an und erhalten die barometrische Höhenformel

$$p = p_0 \exp \left\{ -\frac{g\rho_0 h}{p_0} \right\} = p_0 \exp \left\{ -\frac{h}{H} \right\} . \quad (9.13)$$

Diese Gleichung sagt aus, dass der Druck exponentiell mit der Höhe abnimmt: wenn sich die Höhe um den gleichen Wert ändert, ändert sich der Druck jeweils um den gleichen Faktor. Daher wird die Skalenhöhe H eingeführt

$$H = \frac{p_0}{g\rho_0} . \quad (9.14)$$

Ort	Höhe [m]	p [mm Hg]	p_{O_2} [mm Hg]	p/p_0
Meeresnieveu	0	760	160	1.0
Mt. Washington	1 917	670	141	0.88
Pikes Peak	4 300	448	94	0.59
Mt. Blanc	4 810	421	88	0.55
Mt. McKinley	6 190	357	75	0.47
Mt. Everest	8 841	259	54	0.34
Jet (30 000 Fuß)	10 670	205	43	0.27
Jet (36 000 Fuß)	12 195	170	36	0.22

Tabelle 9.1: Luftdruck p , Partialdruck des Sauerstoffs p_{O_2} und Verhältnis von Druck zu Bodendruck p/p_0 für verschiedene Orte

Sie gibt die Höhe, über die der Druck auf einen Faktor $1/e \approx 0.37$ abnimmt. Für die oben betrachtete Atmosphäre ist $H \approx 8.63$ km, einige typische Werte für den Druck und den Sauerstoffpartialdruck sind in Tabelle 9.1 angegeben. Der Druck am Boden entspricht dem einer 10 m Wassersäule.

Wenn Sie in verschiedene Bücher zur Atmosphärenphysik schauen, werden Sie feststellen, dass die barometrische Höhenformel nicht nur in der in (9.13) gegebenen Form auftritt, sondern auch in Formen, die im Exponenten der e-Funktion ein Integral enthalten. Diesen unterschiedlichen Formulierungen liegen verschiedene Annahmen zu Grunde. Gleichung (9.13) wurde unter der Annahme konstanter Temperatur hergeleitet. Beobachtungen zeigen, dass in der Atmosphäre die Temperatur mit zunehmender Höhe um -6.5 K/km abnimmt. Berücksichtigt man diesen Effekt, so hat die zu integrierende Differentialgleichung eine etwas andere Form und liefert dementsprechend eine andere Version der barometrischen Höhenformel. Mit der hier hergeleiteten Gleichung können wir entsprechend der Voraussetzungen nur dann arbeiten, wenn die Temperaturänderung gering ist. Das ist z.B. dann der Fall, wenn wir uns auf geringe Höhenbereiche beschränken oder die Atmosphäre in großen Höhen betrachtet, da dort die Temperatur konstant ist.

9.2.3 Druck und Partialdruck

In Tabelle 9.1 ist neben dem Luftdruck auch der Partialdruck des in der Luft enthaltenen Sauerstoffs angegeben. Die Angabe eines Partialdrucks ist immer dann sinnvoll, wenn wir ein Medium betrachten, das aus einem Gemisch verschiedener Flüssigkeiten oder Gase besteht. Im Falle der Atmosphäre ist dies ein Gas, das zu 78% aus Stickstoff N_2 , zu 21% aus Sauerstoff O_2 und zu 1% aus Argon Ar besteht. Dazu kommen noch, in wesentlich geringeren Anteilen, Spurengase wie CO_2 und CH_4 sowie ein variabler Wasserdampfanteil.

Der Druck beschreibt die Kraft, die von dem Gas oder der Flüssigkeit auf eine Gefäßwand ausgeübt werden kann. Mikroskopisch sehen wir die Ursache dieser Kraft in dem Impulsübertrag: wenn die bewegten Moleküle des Mediums mit der Wand kollidieren, dreht sich ihr Impuls senkrecht zur Wand um. Bei diesem Stoß wird aufgrund der Impulserhaltung auch Impuls auf die Gefäßwand übertragen, eben diese Kraftstöße, die wir als Druck wahrnehmen. Jedes einzelne Molekül trägt immer wieder zu diesem Impulsübertrag bei. Haben wir ein Medium, das aus mehreren verschiedenen Sorten von Molekülen besteht, so können wir den Impulsübertrag jeder einzelnen Molekülsorte getrennt betrachten, d.h. auch den Druck, den die Moleküle einer Sorte auf die Gefäßwand ausüben. Diesen Teildruck bezeichnen wir als Partialdruck. Er würde sich auch ergeben, wenn wir alle Moleküle der anderen Teilchensorten aus dem Medium entfernen könnten und nur die eine betrachtete Molekülsorte verbleiben würde. Die Summe der Partialdrücke der verschiedenen im Medium vorhandenen Molekülsorten gibt den Gesamtdruck.

9.2.4 Biologische Konsequenzen eines veränderten Druckes

Zum Verständnis biologischer Vorgänge interessieren im wesentlichen der Gesamtdruck, der auf den Menschen bzw. allgemeiner das Lebewesen ausgeübt wird, sowie der Sauerstoffpartialdruck. Der erste hat Konsequenzen für den Gesamtorganismus, der letztere wird separat betrachtet, da der Sauerstoff das für den Unterhalt von Stoffwechselfvorgängen entscheidende Gas ist.

Mit einem stark vom Bodendruck abweichenden Druck haben im wesentlichen Taucher und Bergsteiger zu kämpfen, wobei bei ersteren die Variationen im Sauerstoffpartialdruck des umgebenden Mediums nicht beachtet werden müssen, da sie ohnehin auf eine externe Sauerstoffversorgung angewiesen sind.

Taucher: erhöhter Umgebungsdruck

Beim Tauchen nimmt der Druck mit jeweils 10 m zunehmender Wassertiefe um ein mal den Atmosphärendruck zu. Dieser erhöhte Druck wird auf Grund des Pascal'schen Prinzips auf alle Flüssigkeiten und Gase im Körper übertragen, z.B. auf Blut und Gewebe. Damit in allen Teilen des Körpers ein Druckgleichgewicht herrscht, muss das den Lungen zugeführte Gas den gleichen Druck haben wie die umgebende Flüssigkeit. Auf diese Weise herrscht in allen Teilen des Körpers der gleiche Druck. Würden sich Druckunterschiede im Körper entwickeln, so könnte die Differenz zwischen Innen- und Außendruck zu einem Riss der betreffenden Gefäße führen.

Während des Auf- oder Abstiegs muss der Taucher den Druck des Gases in seinen Lungen dem der umgebenden Flüssigkeit anpassen – entweder durch Anpassung des Ventils seiner Druckluftflaschen oder beim Aufstieg durch Ausatmen der in der Lunge enthaltenen Luft. Erfolgt diese Anpassung nicht, so kann die Druckdifferenz zwischen Luft in der Lunge und umgebendem Gewebe zu Rissen im Lungengewebe führen. Ein Überdruck in den Lungen kann außerdem bewirken, dass Gasblasen in den Luftstrom gelangen, die zu einer Verstopfung von Blutgefäßen im Gehirn oder Herzen und damit zum Tod führen können.

Bergsteiger: verringerter Umgebungsdruck

Die Variation in absolutem Druck ist beim Bergsteigen wesentlich geringer als beim Tauchen, die Veränderung im Umgebungsdruck auf dem Mount Everest entspricht der beim Tauchen bis in eine Tiefe von ca. 7 m. Daher ist die Bewahrung eines Druckgleichgewichts für den Gesamtorganismus wesentlich einfacher, auch sind die Druckunterschiede nicht groß genug, um bei einem gesunden Menschen zu Rissen im Gewebe zu führen.

Allerdings setzen Symptome der Höhenkrankheit als Unwohlsein bereits oberhalb 3000 m, als ernstere Beschwerden oberhalb 4000 m ein. Dies entspricht einer Abnahme des Drucks auf einen Wert von 75% bzw. 55% des Wertes am Boden. Die physiologischen Konsequenzen (erschwerter Atem, erhöhter Puls, Kopfschmerzen, Reizbarkeit, evtl. Bewußtseinsstörung, Übelkeit) scheinen weniger durch die Änderung des Umgebungsdrucks bedingt als vielmehr durch die Verringerung des Sauerstoffpartialdrucks. Dieser bewirkt eine Verringerung des Sauerstoffgehalts im Körpergewebe (Hypoxie) und damit eine Herabsetzung des Stoffwechsels verbunden mit einer Einschränkung körperlicher Funktionen. Hypoxie und verringerter Gesamtdruck können auch zu einem Übertritt von Flüssigkeit aus den Lungenkapillaren in den interstitiellen Raum führen (Lungenödem) oder zum Hirnödem.

9.2.5 Auftrieb

Das Archimedische Prinzip können wir uns ebenfalls anhand der Kräftebilanz in Abbildung 9.2 herleiten. Dort hatten wir uns klar gemacht, dass auf ein Volumenelement in einer Flüssigkeitssäule im stationären Zustand drei Kräfte wirken. Wir haben diese Gleichung in (9.7) so umformuliert, dass die Druckdifferenz Δp genau so groß sein muss, dass sie die auf die Grundfläche bezogene Gewichtskraft $F_g/A = \rho V g/A$ des Volumens kompensiert. Dann

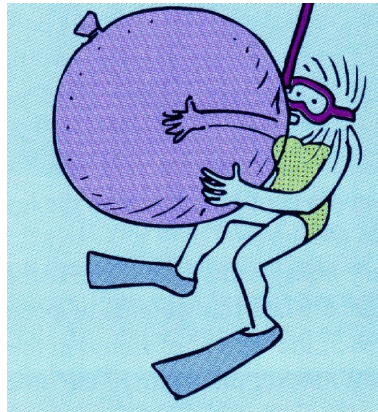


Abbildung 9.4: Das Wasservolumen im Ballon scheint für den Taucher gewichtslos, da die auf den Ballon wirkende Auftriebskraft entgegengesetzt gleich der auf ihn wirkenden Gewichtskraft ist [22]

bleibt das Volumen in Ruhe, es schwebt in der Flüssigkeit. Ersetzen wir das Volumenelement durch einen Körper der Dichte ϱ_K , so kann der Körper aufsteigen, absinken oder schweben. Welcher dieser drei Prozesse eintritt, hängt von der Kräftebilanz ab: ist die Gewichtskraft auf den Körper größer als die durch die Druckdifferenz bewirkte Kraft ($F_g > F_A$), so sinkt der Körper. Das ist offensichtlich dann der Fall, wenn die Dichte des Körpers größer ist als die der verdrängten Flüssigkeit: $\varrho_K > \varrho_{F1}$. Entspricht die Gewichtskraft auf den Körper der durch die Druckdifferenz bewirkten Kraft ($F_g = F_A$), so schwebt der Körper und die Dichten von Körper und Flüssigkeit sind gleich: $\varrho_K = \varrho_{F1}$. Ist sie geringer ($F_g < F_A$), so steigt der Körper auf. In diesem Fall ist die Dichte des Körpers geringer als die der umgebenden Flüssigkeit: $\varrho_K < \varrho_{F1}$.

Anhand dieser Kräftebilanz lässt sich die oft verwendete Formulierung des Archimedischen Prinzips verstehen:

Definition 27 *Der Betrag des Auftriebs, den ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper erfährt, ist gleich der Gewichtskraft der von dem Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge.*

Wir können uns dies auch anschaulich klar machen: Wenn wir dieses Volumenelement im Wasser anfassen würden (z.B. in einen Ballon verpackt, vgl. Abb. 9.4), würden wir es als gewichtslos empfinden – außerhalb des Wassers dagegen würden wir die volle Gewichtskraft dieses Ballons wahrnehmen. Diese scheinbare 'Gewichtslosigkeit' ist mit dem Phänomen des Auftriebs verbunden: ein in eine Flüssigkeit eingetauchter Körper erfährt einen Auftrieb, der gleich dem Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeit ist (Archimedisches Prinzip). Die Druckdifferenz kann gerade die Gewichtskraft eines Wasservolumens tragen. Tauchen wir eine Stahlkugel ein, so erscheint sie uns unter Wasser leichter als an Land, da ihre Gewichtskraft um den Auftrieb (d.h. die Gewichtskraft des von ihr verdrängten Wassers) reduziert ist. Sie sinkt allerdings trotzdem ab, da die Gewichtskraft größer als die Auftriebskraft ist. Umgekehrt müssen wir eine Kraft auswenden, um eine Styroporkugel unter Wasser zu drücken, da in diesem Fall die Auftriebskraft größer ist als die Gewichtskraft.

Formal lässt sich die Auftriebskraft schreiben als Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit und damit als

$$F_A = m_f \cdot g = \varrho_f \cdot V \cdot g . \quad (9.15)$$

Auftrieb funktioniert daher am besten, wenn die Dichte des Mediums groß ist (z.B. Totes Meer, allerdings funktioniert Auftrieb auch in Gasen, z.B. Heißluftballon).

Ein schwimmender Körper sinkt ab, wenn sich seine Dichte erhöht und damit die Gewichtskraft nicht mehr durch die Auftriebskraft kompensiert wird (Kontraktion der Muskeln

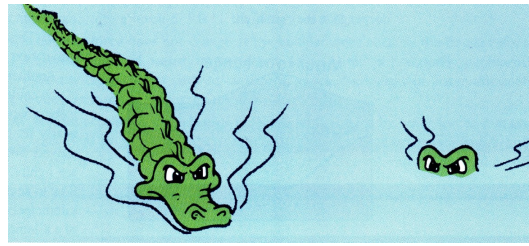


Abbildung 9.5: Hat das Krokodil Steine geschluckt, so hat sich seine Masse bei gleichem Volumen erhöht und es taucht tiefer ein [22]

eines Fisches zur Verringerung seines Volumens bei gleichbleibender Masse; Massenzunahme bei gleichbleibendem Volumen z.B. beim steinefressenden Krokodil, vgl. Abb. 9.5). Umgekehrt führt eine Vergrößerung des Volumens bei gleichbleibender Masse zu einer Erhöhung des Auftriebs: während ein Eisenblock sinkt, schwimmt ein Schiff.

9.3 Benetzung

Benetzung ist ein Beispiel für einen *Grenzflächeneffekt*. Bisher haben wir ein einzelnes Medium betrachtet, z.B. eine Flüssigkeit oder die Atmosphäre. Innerhalb dieses Mediums wirken Kräfte zwischen den Atomen oder Molekülen, die *Kohäsionskräfte*. Sie sind elektrischen Ursprungs und werden auch als van der Waals'sche Kräfte bezeichnet. Kohäsionskräfte treten in Flüssigkeiten und Festkörpern auf, bei Gasen erst kurz bevor diese zu kondensieren beginnen. Kohäsionskräfte sind stärker als die Gravitationskräfte.

Die zwischen Molekülen verschiedener Stoffe wirkenden Anziehungskräfte werden als *Adhäsionskräfte* bezeichnet. Sie können zwischen festen Körpern, zwischen festen Körpern und Flüssigkeiten oder zwischen festen Körpern und Gasen (*Adsorption*) wirken.

9.3.1 Oberflächenspannung

Die zwischen den Molekülen einer Flüssigkeit wirkenden Kohäsionskräfte heben sich im Innern der Flüssigkeit auf, da jedes Molekül allseitig von gleichartigen Molekülen umgeben ist. An der Oberfläche fehlen jedoch Moleküle und damit auch die nach außen gerichteten anziehenden intermolekularen Kräfte, so dass sich eine resultierende Kraft in das Innere der Flüssigkeit ergibt. Um Moleküle gegen diese Kraft an die Oberfläche zu bringen, muss eine Arbeit W verrichtet werden. Entsprechend haben Moleküle an der Oberfläche der Flüssigkeit eine potentielle Energie oder *Oberflächenenergie* W_{Ob} . Diese ist proportional zur Oberfläche A

$$W_{\text{Ob}} = \sigma \cdot A . \quad (9.16)$$

Darin ist σ die *spezifische Oberflächenenergie* oder *Oberflächenspannung*. Ihre Einheit ist J/m^2 , wie man durch Umstellen der Gleichung sieht. Ersetzen der Einheit J durch die Basiseinheiten liefert als alternative Einheiten für die Oberflächenspannung kg/s^2 oder N/m .

Da ein System stets bemüht ist, den Zustand kleinster potentieller Energie einzunehmen, sind alle Flüssigkeitsoberflächen Minimalflächen: jede gespannte Haut (in diesem Fall die Flüssigkeitsoberfläche) hat minimale Energie, wenn ihre Oberfläche minimal ist. Bei gegebenem Volumen hat die Kugel die kleinste Oberfläche, daher sind Tröpfchen kugelig.

Ein Wasserläufer kann auf der Wasseroberfläche laufen ohne ein zu sinken, da jedes Einsinken die Flüssigkeitsoberfläche eindellen und damit die Oberflächenenergie vergrößern würde. Die Masse des Wasserläufers ist jedoch zu gering, um die dazu benötigte Energie zur Verfügung zu stellen.

Benetzungsform	Benetzung	keine Benetzung
Ursache	Adhäsionskräfte \gg Kohäsionskräfte	Adhäsionskräfte \ll Kohäsionskräfte
Wirkung	Ausbreitung der Flüssigkeit auf der Oberfläche des festen Körpers	Flüssigkeit zieht sich tropfenförmig zusammen
Skizze		
Gleichung	$\sigma_{12} \cos \alpha = \sigma_{13} - \sigma_{23}$	
Randwinkel	$0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha \leq \pi$
Kapillarität		

Abbildung 9.6: Benetzung [21]

Legt man einen Faden auf eine Seifenlamelle und durchsticht den vom Faden abgegrenzten Bereich der Seifenlamelle, so ist der Rest der Lamelle bestrebt, seine Fläche zu minimieren und der Faden wird zu einem Kreis ausgezogen.

Mit Hilfe der Oberflächenspannung lässt sich die Tröpfchengröße einer aus einem Röhrchen sickenden Flüssigkeit bestimmen. An der unteren Öffnung des Röhrchens sammelt sich aufgrund der Oberflächenspannung ein Tropfen. Dieser wächst so lange bis seine Gewichtskraft die Kohäsionskräfte überschreitet. Die Oberflächenspannung zwischen Tropfen und einem Rohr mit Radius r bewirkt eine Kraft $F_O = 2\pi r\sigma$. Beim Abreißen ist diese gleich der Gewichtskraft $V\rho g$ des Tropfens, d.h. für das Volumen des Tropfens ergibt sich

$$V = \frac{2\pi r\sigma}{\rho g} . \quad (9.17)$$

Je kleiner eine Flüssigkeitsmenge ist, desto mehr überwiegen die Oberflächenkräfte z.B. über die Schwerkraft, denn die Oberfläche nimmt langsamer ab als das Volumen. Mit Hilfe zweier Seifenblasen unterschiedlicher Größe lässt sich dieser Effekt nachweisen: werden beide in Kontakt gebracht, so bläst die kleinere aufgrund ihrer großen Oberflächenspannung die große weiter auf; die größere Seifenblase schluckt die kleinere.

9.3.2 Kapillarität

Bei der Berührung eines Flüssigkeitstropfen mit einer festen Unterlage können zwei Extremfälle auftreten, vgl. Abb. 9.6:

- *vollkommene Benetzung*: die Adhäsionskräfte sind größer als die Kohäsionskräfte. Dann wird sich die Flüssigkeit auf der Oberfläche des festen Körpers ausbreiten.
- *unvollkommene Benetzung*: die Kohäsionskräfte sind wesentlich kleiner als die Adhäsionskräfte und die Flüssigkeit wird sich kugelförmig zusammen ziehen.

Es wirken die Oberflächenspannungen σ_{13} zwischen gasförmiger (1) und fester Phase (3), σ_{12} zwischen gasförmiger (1) und flüssiger (2) sowie σ_{23} zwischen flüssiger (2) und fester

(3) Phase. Der Winkel zwischen fester und flüssiger Phase ist α . Da Flüssigkeitstropfen nicht ohne Einwirkung äußerer Kräfte über waagerechte Platten wandern, müssen die waagerechten Spannungskomponenten gleich groß sein:

$$\sigma_{13} = \sigma_{23} + \sigma_{12} \cos \alpha \quad \text{oder} \quad \sigma_{12} \cos \alpha = \sigma_{13} - \sigma_{23} . \quad (9.18)$$

Vollkommene Benetzung ergibt sich für $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ (z.B. Wasser/Glas $\alpha \approx 0^\circ$); keine Benetzung für $\pi/2 < \alpha \leq \pi$ (z.B. Quecksilber/Glas $\alpha \approx 140^\circ$).

Diese Benetzungserscheinungen spielen in engen Röhrchen (Kapillaren) eine große Rolle. Findet Benetzung statt, so steigt die Flüssigkeit an der Wand der Kapillare auf. Dadurch entsteht eine große benetzte Oberfläche. Um diese im Interesse einer verringerten Oberflächenenergie zu minimieren, steigt Flüssigkeit in der Kapillare auf. Die dabei verrichtete Hubarbeit stammt aus der durch die Verringerung der benetzten Oberfläche frei werdenden Oberflächenenergie. Aus der Sicht der Kräfte bedeutet dies: die von der Oberflächenspannung σ her rührende Kraft F_σ muss genau die Gewichtskraft F_g der angehobenen Flüssigkeitssäule kompensieren:

$$2\pi r \sigma = \pi r^2 h \rho g . \quad (9.19)$$

Bei nicht vollständiger Benetzung ist die Steighöhe vom Randwinkel α abhängig, d.h. wir müssen $\sigma = \sigma_{12} \cos \alpha$ verwenden. Dann gilt

$$2\pi r \sigma_{12} \cos \alpha = \pi r^2 h \rho g \quad (9.20)$$

und damit ergibt sich die *kapillare Steighöhe* zu

$$h_{\text{steig}} = \frac{2\sigma_{12} \cos \alpha}{\rho g r} . \quad (9.21)$$

Die Steighöhe nimmt also mit abnehmendem Radius der Kapillare zu, d.h. in sehr engen Röhren lassen sich hohe Steighöhen erzielen – eine Tatsache, die Pflanzen, die ja über kein Kreislaufsystem verfügen, zum Transport von Wasser und Nährstoffen einsetzen. Die Kapillarwirkung ist für das Aufsteigen von Flüssigkeiten in allen porösen Körpern verantwortlich, neben Pflanzen auch Schwämme, Dochte oder Mauersteine.

Für nicht benetzende Flüssigkeiten liefert (9.21) negative Steighöhen, da für $\pi/2 < \alpha \leq \pi$ der Kosinus von α negative Werte annimmt. Das entspricht der Kapillardepression.

9.4 Aufgaben

9.4.1 Fragen

1. Was versteht man unter Dichte?
2. Warum wird die Dichte auch als spezifisches Gewicht bezeichnet? Ist diese Bezeichnung physikalisch korrekt?
3. Was versteht man unter Druck?
4. Ist der Druck eine gerichtete Größe?
5. Wie ändert sich der Druck in der Atmosphäre mit der Höhe? Warum ändert er sich überhaupt?
6. Wie ändert sich der Druck mit zunehmender Wassertiefe? Warum ändert sich der Druck überhaupt.
7. In welche Richtung weist der Luftdruck?
8. Hilft der Luftdruck der Gravitation, uns am Erdboden zu halten?

9. In welche Richtung weist der Druck auf einen Taucher in 500 m Wassertiefe?
10. Warum wird die Druckveränderung mit der Höhe in der Atmosphäre durch ein Exponentialgesetz beschrieben, die in Gewässern jedoch durch ein lineares Gesetz?
11. Erläutern Sie Guericques Experiment der Magdeburger Halbkugeln.
12. Veranschaulichen Sie, warum sich der Druck (egal ob in Flüssigkeiten oder Gasen) mit der Höhe ändert.
13. Was hat die größere Dichte: ein 1 kg Eisen oder 2 kg Eisen?
14. Eine Hohlkugel und eine Vollkugel werden aus der gleichen Menge Eisen hergestellt. Welche der beiden hat die größere mittlere Dichte?
15. Welche maximale Länge eines Strohhalmes können Sie verwenden, um damit zu trinken?
16. Wie verändert sich die Auflagefläche eines Reifens, wenn der Luftdruck in ihm reduziert wird?
17. Warum presst der Luftdruck einen Ballon nicht zusammen?
18. Warum können Sie die Höhe eines Berges mit einem Barometer messen?
19. Erläutern Sie das Archimedische Prinzip.
20. Was versteht man unter hydrostatischem Auftrieb?
21. Knetgummi hat eine größere Dichte als Wasser. Daher geht eine Kugel aus Knetgummi sofort unter. Wie können Sie sie zum Schwimmen überreden?
22. Warum verwenden Taucher Bleigewichte?
23. Warum können Sie in der Totmannhaltung auf dem Wasser treiben? Geht das auch in anderen Haltungen?
24. Warum kann Wasser selbst mit den stärksten Pumpen nicht auf eine Höhe von mehr als 10 m gesogen werden?
25. Salzwasser hat eine etwas größere Dichte als Frischwasser. Wird ein Boot in Salzwasser oder in Süßwasser etwas höher schwimmen?
26. Ein Eiswürfel schwimmt in einem Glas Wasser. Wird sich der Wasserspiegel heben, senken oder gleich bleiben wenn der Eiswürfel schmilzt?
27. Was versteht man unter Oberflächenspannung?
28. Was sind Kapillarkräfte?
29. Warum kann Wasser in einigen Kapillaren steigen während in anderen Kapillaren der Wasserspiegel herunter gedrückt wird?
30. Von welchen Parametern hängt die Steighöhe in einer Kapillare ab?
31. Erläutern Sie, warum ein Wasserläufer auf der Wasseroberfläche laufen kann ohne einzusinken.

9.4.2 Aufgaben

1. Welcher Druck wirkt auf eine Seegurke, die in 4800 m Wassertiefe schwimmt? Angenommen, die Seegurke habe eine Fläche von 200 cm^2 . Wie viele Kilo müssten Sie dem Tier aufbürden, damit es dem gleichen Druck ausgesetzt ist? Wenn Sie dieses Gewicht auf die Seegurke auflegen, empfindet diese es dann genauso wie den Wasserdruck in ihrer normalen Lebensumwelt?
2. Wenn die Seegurke fast 5 km Wassersäule auf ihren Schultern hat, kann sie dann überhaupt schwimmen oder wird sie flach auf den Meeresboden gepresst?
3. Welcher Druck wirkt auf einen Taucher in einer Wassertiefe von 30 m?
4. Ein Eisenstück mit einer Masse von 790 g verdrängt 100 g Wasser wenn es unter geht. Bestimmen Sie das Gewicht des Eisens in Luft und im Wasser.
5. Wie groß ist der Druck auf einen Taucher 5 m unter der Wasseroberfläche? (Dichte $\rho = 1000 \text{ kgm}^{-3}$)
6. Hydraulische Presse/Hebenbühne: Wie groß ist die zusätzlich unterstützte Masse auf einem Kolben mit 50 cm^2 Fläche einer hydraulischen Presse, wenn der Druck auf den anderen Kolben um weitere 10 N/cm^2 erhöht wird.
7. Ein Zahnarztstuhl von 1500 N wird hydraulisch nach dem Prinzip der Hebebühne bewegt. Die Querschnitte der beiden Zylinder sind 1500 cm^2 und 75 cm^2 . (a) Welche Kraft muss auf den kleineren Kolben ausgeübt werden, um den Stuhl zu heben? (b) Über welchen Weg muss der kleine Kolben bewegt werden, um den Stuhl um 0.1 m anzuheben?
8. Eis hat eine Dichte $\rho_{\text{Eis}} = 0.92 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, Wasser hat $\rho_{\text{Wasser}} = 1.03 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. Wieviele Prozent eines Eisbergs tauchen ein?
9. Ein Holzklötz der Masse $m = 3.67 \text{ kg}$ und der relativen Dichte 0.6 soll so mit Blei behaftet werden, daß er zu 90 % in Wasser eintaucht. Wieviel Blei ($\rho_{\text{Blei}} = 14.2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$) ist erforderlich, wenn (a) das Metall auf dem Holzklötz und (b) das Metall unter dem Holzklötz befestigt ist?
10. Ein 4 cm hoher Holzquader sinkt in Benzin ($\rho_{\text{Benzin}} = 0.7 \text{ g/cm}^3$) um $h = 0.8 \text{ cm}$ tiefer als in Wasser. Welche Dichte ρ_{Holz} hat das Holz?
11. Bäume transportieren Wasser in einem System von Kapillaren mit Radius $r = 2.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. Der Kontaktwinkel beträgt 0° , die Dichte von Wasser ist 10^3 kg , die Oberflächenspannung $7.28 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}$. Bis zu welcher Höhe kann Wasser maximal transportiert werden.

Kapitel 10

Hydrodynamik: Kontinuierliche Medien in Bewegung

In Kap. 9 haben wir Flüssigkeiten in Ruhe betrachtet. Die Beschreibung einer Strömung, d.h. der Bewegung eines kontinuierlichen Mediums, erfolgt in der Hydrodynamik. Die wichtigsten Konzepte sind die Erhaltung der Masse, formuliert durch die Kontinuitätsgleichung, und die Erhaltung der Energie, formuliert durch die Bernoulli Gleichung. Diese Gleichungen sind anwendbar auf alle Formen von Strömungen, z.B. in Gewässern, Gasen, Flüssigkeiten, die Strömung des Blutes im Kreislauf oder die des Verkehrs in einem Straßensystem. Sie sind auch anwendbar auf Strömungen um Körper wie sie beim Fliegen, Schwimmen, Segeln, und an Windenergiekonvertern auftreten. Für die folgenden Betrachtungen gelten einige Grundannahmen:

1. Fluide sind *Kontinua*. Sie bestehen nicht aus Teilchen sondern können beliebig in kleinere Ströme unterteilt werden. Diese Annahme ist für praktische Leitungssysteme hinreichend, in den Kapillaren des Blutkreislaufs dagegen problematisch.
2. Fluide sind *inkompressibel*. Für Flüssigkeiten ist diese Annahme sinnvoll, für Gase scheint sie unserer Erfahrung zu widersprechen: in der Luftpumpe lässt sich Luft komprimieren. Kompression von Gasen ist jedoch nur im statischen Zustand einfach; in bewegten Gasen findet nennenswerte Kompression erst statt, wenn die Strömungsgeschwindigkeit im Bereich der Schallgeschwindigkeit liegt (Luft ca. 340 m/s; Wasser ca. 1500 m/s). Wenn ein Luftstrom durch ein Hindernis abgebremst wird, ergibt sich bei realistischen Geschwindigkeiten von $v = 10$ m/s (20 m/s, 30 m/s=108 km/h) eine Kompression um 0.06 % (0.24 %, 0.52 %).
3. Strömungen sind *stationär*: an jedem Punkt im Raum ist die Strömungsgeschwindigkeit zeitlich konstant, auch wenn die Geschwindigkeiten in den einzelnen Punkten unterschiedlich sind, d.h. ein Flüssigkeitselement während seiner Bewegung schneller oder langsamer werden kann.
4. An Grenzflächen zwischen Fluid und Festkörper gilt die *non-slip* Bedingung: das Fluid haftet auf Grund der Reibung am Körper, so dass die Fluidgeschwindigkeit an der Körperoberfläche Null ist. Daraus erklärt sich, warum sich auf Ventilatorblättern Staub ablagert und warum Leitungen ebenso wie Blutgefäße eher durch Ablagerungen als durch Dünnschichten durch die Strömung gefährdet werden.

10.1 Bezugssysteme

Bei der Betrachtung von Bewegungen ist die Angabe eines Bezugssystems unerlässlich: was bewegt sich relativ wozu wie schnell. Oder aus Sicht des Bahnbenutzers: wie schnell werden

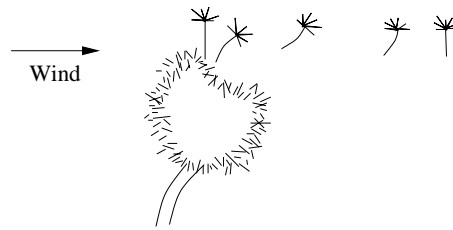


Abbildung 10.1: Die Ablösung eines Löwenzahnsamens von der Pflanze und seine anschließende Bewegung mit der Luft werden in zwei verschiedenen Bezugssystemen beschrieben, vgl. Text

die Bäume, Häuser und Kühe an mir vorbeigetragen. In der klassischen Mechanik betrachten wir Bewegung gegenüber dem Boden. Wasser und Luft sind in der Regel selbst in Bewegung. Beim Segeln bzw. Fliegen wird einem die Existenz unterschiedlicher Bezugssysteme bei der Angabe von Geschwindigkeiten deutlich: die Geschwindigkeit über Grund gibt die Geschwindigkeit relativ zum Erd- bzw. Meeresboden an und ist wichtig, um die Position abzuschätzen oder die Zeit, die zum Zurücklegen einer bestimmten Strecke benötigt wird. Andererseits kann auch die Geschwindigkeit gegenüber dem Medium, oder die Relativgeschwindigkeit, angegeben werden. Letztere bestimmt die dynamischen Eigenschaften des umströmten Körpers, d.h. seine Segel- oder Flugeigenschaften, und ist normalerweise die Geschwindigkeit, die bei Schiffen mit dem Log oder bei Flugzeugen mit dem Prandtl'schen Staurohr gemessen wird.

Die Wahl des geeigneten Bezugssystems wird durch die physikalische Situation nahegelegt. Manchmal kann es sogar sinnvoll sein, dass Bezugssystem im Laufe der Betrachtung zu verändern. Betrachten wir dazu einen Löwenzahnsamen, s. Abb. 10.1. Ist dieser noch mit der Pflanze verbunden, so ist die Betrachtung in einem ortsfesten Bezugssystem sinnvoll. Dann erkennen wir die beiden auf den Samen wirkenden Kräfte: die mechanische Verbindung zwischen Samen und Pflanze hält dessen Stiel an der Pflanze fest. Der angreifende Wind dagegen übt auf das fedrige Ende des Samens eine Kraft aus, so dass sich der Samen in den Wind neigt. Diese Orientierung wird während des Ablösevorgangs beibehalten. Ist der Samen jedoch einmal abgelöst, so wirken nur die Schwerkraft, die den Samen nach unten zieht, und die durch den anströmenden Wind ausgeübte Kraft, die auf den ganzen Samen wirkt und diesen beschleunigt – bis er Windgeschwindigkeit erreicht hat und der Wind keine Kraft mehr auf ihn ausübt. Als Konsequenz richtet sich der Samen vertikal aus. In größerem Maßstab lässt sich diese Ausrichtung beim Heißluftballon beobachten.

10.2 Stromlinien

Zur Beschreibung einer Strömung verwenden wir das Konzept des Strömungsfeldes. Ein Feld ist ein drei-dimensionaler Raum, in dem für jeden Raumpunkt \vec{r} bestimmte Eigenschaften angegeben werden. Beim Strömungsfeld sind dies die Dichte $\varrho(\vec{r}, t)$ und die Geschwindigkeit $\vec{v}(\vec{r}, t)$. Bei der stationären Strömung sind die Parameter $\varrho(\vec{r})$ und $\vec{v}(\vec{r})$, d.h. weder Dichte noch Geschwindigkeit hängen von der Zeit ab.

Ein wichtiges Konzept zur Beschreibung eines Strömungsfeldes sind die *Stromlinien*, s. Abb. 10.2. Sie werden dadurch bestimmt, dass die Geschwindigkeit für eine große Anzahl von Raumpunkten aufgetragen wird. Ist eine hinreichend große Zahl von Geschwindigkeitsvektoren gegeben, so schließen sie sich zu Stromlinien zusammen. Formal ist der Geschwindigkeitsvektor in einem bestimmten Raumpunkt die Tangente an die Stromlinie in diesem Punkt. Anschaulich sind die Stromlinien die Bahnen von Testelementen in einer stationären Strömung. Die Tangenten geben die Richtung der Strömungsgeschwindigkeit, die Dichte der Stromlinien ist ein Maß für die Geschwindigkeit. Mehrere Stromlinien bilden eine *Stromröhre* bzw. einen *Stromfaden*. Da der Geschwindigkeitsvektor die Tangente an eine Stromlinie ist, hat die Geschwindigkeit \vec{v} keine Komponente senkrecht zur Stromlinie, d.h. alle Teilchen bleiben innerhalb einer Stromröhre, selbst wenn sich der Querschnitt oder die Form der

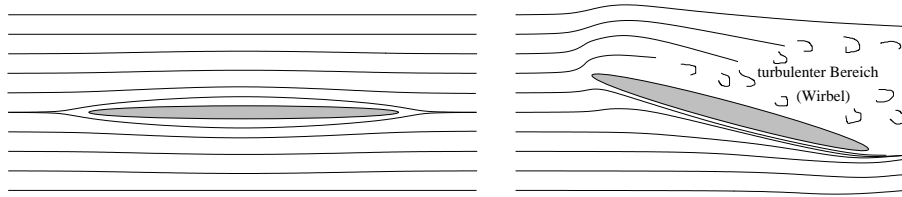


Abbildung 10.2: Stromlinien um ein Profil in einer laminaren (links) und einer turbulenten (rechts) Strömung; ein wesentliches Merkmal einer turbulenten Strömung ist die Ausbildung von Wirbeln

Stromröhre verändert. Eine Stromröhre wird daher auch als *Flussröhre* bezeichnet, da der Fluss durch sie hindurch eine Konstante ist.

Mit Hilfe des Konzeptes der Stromlinie lassen sich die Unterschiede zwischen laminarer Strömung und turbulenter Strömung verdeutlichen: in einer *laminaren Strömung* liegen die Stromlinien nebeneinander ohne sich zu durchmischen. Diese Strömung wird als *Schichtströmung* bezeichnet. In einer *turbulenten Strömung* dagegen bewirkt die Reibung zwischen der Flüssigkeit und den Randschichten oder zwischen verschiedenen Flüssigkeitsschichten unterschiedlicher Geschwindigkeit die Bildung von Wirbeln, so dass sich kein geschlossenes Stromlinienbild mehr ergibt.

10.3 Kontinuitätsgleichung

Die *Kontinuitätsgleichung* lässt sich mit Hilfe des Konzeptes der Flussröhre herleiten: pro Zeiteinheit muss die gleiche Masse durch den Querschnitt einer Flussröhre fließen, unabhängig davon, wie weit diese ist. Damit ist die Kontinuitätsgleichung die Übertragung des Konzeptes der Massenerhaltung auf die Hydrodynamik: die Masse bzw. die Volumenelemente, die links in die Flussröhre eintreten, müssen rechts auch wieder herauskommen. Masse m ist Dichte ρ mal Volumen V ; das Volumen kann als Produkt aus Querschnittsfläche A und dem im Zeitintervall Δt von der Strömung zurückgelegtem Weg $s = v \cdot \Delta t$ geschrieben werden:

$$\Delta m = \rho \cdot V = \rho \cdot A \cdot s = \rho \cdot A \cdot v \cdot \Delta t . \quad (10.1)$$

Division durch Δt liefert den *Massenstrom*:

$$\dot{m} = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 \quad (10.2)$$

und damit die Kontinuitätsgleichung

$$\rho A v = \text{const} . \quad (10.3)$$

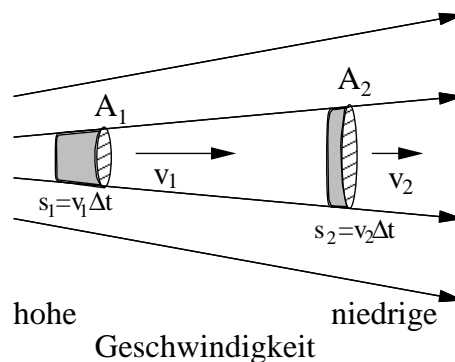


Abbildung 10.3: Zur Herleitung der Kontinuitätsgleichung: das Volumen, was links in die Flussröhre eintritt, muss rechts auch wieder aus ihr austreten

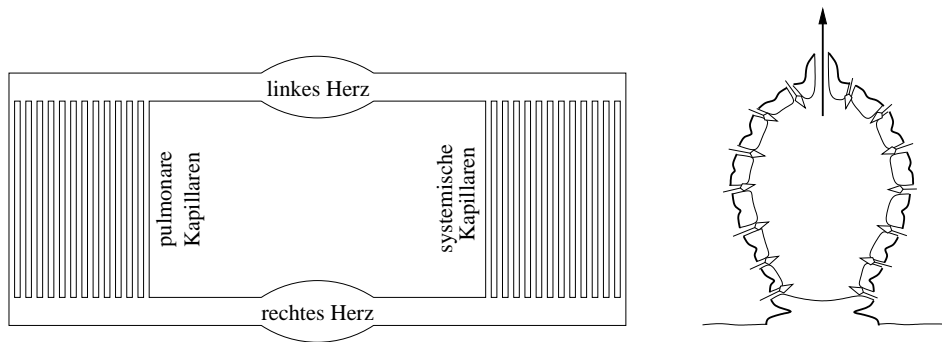


Abbildung 10.4: Kontinuitätsgleichung in verzweigten Röhren. Links: schematische Darstellung des Kreislaufsystems eines Vogels oder Säugetiers. Geringere Strömungsgeschwindigkeiten in den Kapillaren als in der Nähe des Herzens sind möglich, weil die gesamte Querschnittsfläche der Kapillaren die jeder Herzkammer übersteigt. Rechts: Strömung in einem Schwamm; hohe Ausstromgeschwindigkeiten können durch eine große Zahl von Einströmöffnungen mit niedriger Strömungsgeschwindigkeit erreicht werden

Betrachtet man ein inkompressibles Medium, so ist ρ konstant und es ergibt sich die *Kontinuitätsgleichung für ein inkompressibles Medium*:

$$vA = \text{const} . \quad (10.4)$$

Die Größe $\dot{V} = Av$ ist der *Volumenstrom*, d.h. das Volumen, das pro Zeiteinheit durch einen Querschnitt A strömt.

Die physikalische Bedeutung der Kontinuitätsgleichung für eine inkompressible Strömung ist einfach: bei einer Verkleinerung der Querschnittsfläche wird die Geschwindigkeit größer, d.h. die Stromlinien rücken, wie auch anschaulich zu erwarten, dichter zusammen. Umgekehrt bewirkt eine Vergrößerung des Querschnitts eine Verringerung der Strömungsgeschwindigkeit. Ein Beispiel ist die stärkere Strömung eines Flusses unter dem Engpass Brücke, ein anderes Beispiel ist das Dünnwerden eines Wasserstrahls mit zunehmendem Abstand vom Wasserhahn. Eine Halbierung der Querschnittsfläche verdoppelt die Strömungsgeschwindigkeit, eine Halbierung des Rohrdurchmessers vervierfacht sie. Dadurch erhöht sich die Gefahr der Wirbelbildung ebenso wie der Erosion. Bedeutsam ist dieser Zusammenhang z.B. bei der Arteriosklerose: eine Abnahme des Gefäßdurchmessers um 30 % durch Ablagerung an den Gefäßwänden bewirkt eine Verdopplung der Strömungsgeschwindigkeit. Dadurch können die Ablagerungen losgerissen werden und kleine Gefäße (z.B. Herzkranzgefäße) verstopfen.

Die Kontinuitätsgleichung gilt auch, wenn sich der Querschnitt des Strömungssystems durch Aufspaltung auf verschiedene Röhren verändert. Dann bestimmt man die für die Strömung zur Verfügung stehende Querschnittsfläche A durch Summation über die Flächen A_i der einzelnen Röhren: $A = \Sigma A_i$. Diese Summe ist die in der Kontinuitätsgleichung zu verwendende Fläche.

Typische Beispiele für natürliche, sich verzweigende Systeme sind der Kreislauf und die Lunge, schematisch dargestellt im linken Teil von Abb. 10.4. In beiden Fällen werden an das System zwei sich scheinbar widersprechende Anforderungen gestellt: (1) es müssen weite Röhren für den Transport über große Entfernungen vorhanden sein,¹ und (2) es müssen sehr enge Röhren für einen effizienten Austausch mit dem umgebenden Gewebe vorhanden sein, um dessen Nährstoffversorgung zu gewährleisten. Auf der Basis der Kontinuitätsgleichung ließe sich letzteres alleine durch Verengung des Querschnitts erreichen. Dann wäre jedoch die Strömungsgeschwindigkeit in der Kapillare so groß, dass kein Austausch mit der Umgebung erfolgen könnte: im menschlichen Kreislauf beträgt die Pumpleistung (Volumen-

¹In einer realen Röhre sind die Verluste durch Reibung um so größer, je enger der Querschnitt der Röhre wird. Gerade bei langen Röhren würden kleine Querschnitte zu großen Reibungsverlusten führen und damit zur Sicherstellung der Gefäßversorgung eine hohe Pumpleistung erfordern, vgl. Abschn. 10.7.2.

strom) ca. 6 l/min, die Aorta hat einen Durchmesser von 2.5 cm. Damit ergibt sich eine Strömungsgeschwindigkeit von 0.2 m/s.² Im Gegensatz dazu hat der engste Bereich des Kreislaufsystems, die Kapillare, einen Durchmesser von nur ungefähr 6 μm . Ohne Zulasung von Verzweigungen müsste die Strömungsgeschwindigkeit in der Kapillare 833.3 m/s oder 3000 km/h betragen, deutlich oberhalb der Schallgeschwindigkeit. Bei verzweigten Kapillaren dagegen beträgt die Strömungsgeschwindigkeit nur ca. 1 mm/s. Um den durch die Aorta geförderten Volumenstrom zu transportieren sind daher ca. $3 \cdot 10^9$ parallele Kapillaren notwendig.

Schwämme sind ein anderes Beispiel für die Anwendung der Kontinuitätsgleichung. Physikalisch gesehen ist ein Schwamm eine Ansammlung vieler kleiner Röhren mit kleinen Öffnungen und einer großen apicalen Öffnung, vgl. Abb. 10.4. Der Ausstoß aus dieser weiten Öffnung erfolgt mit einer Geschwindigkeit von ca. 0.2 cm/s, dabei wird ein dem Gesamtvolumen des Schwamms³ entsprechendes Volumen innerhalb eines Zeitraums von ca. 15 sec gefördert; das entspricht dem 100 fachen der Förderleistung des menschlichen Herzens. Die hohe Ausstoßgeschwindigkeit ist erforderlich, da der Schwamm bereits alle Nährstoffe aus dem Wasser herausgefiltert hat und dieses Wasser nicht noch einmal durch seine Poren einsaugen soll. Wie aber funktioniert nun dieser Einsaugmechanismus, der gleichzeitig der Motor des schnellen Ausstoßes sein muss? Das Wasser wird durch ca. 25 μm lange Flagellen mit einer Geschwindigkeit von 50 $\mu\text{m/s}$, das ist 1/4000 der Ausstoßgeschwindigkeit, durch die Poren gefördert. Diese geringe Geschwindigkeit erlaubt es dem Schwamm, die Nährstoffe aus dem Wasser aufzunehmen. Die hohe Ausstoßgeschwindigkeit kann von den Flagellen erreicht werden, da eine sehr große Zahl von ihnen parallel arbeitet.

Die Kontinuitätsgleichung wird von verschiedenen Tieren, wie z.B. Tintenfisch, Qualle oder Kammuschel, auch zur Fortbewegung eingesetzt. Gemäß Kontinuitätsgleichung ist eine enge Ausstoßöffnung gleichbedeutend mit einer hohen Ausströmgeschwindigkeit, d.h. einem hohen Impuls des ausströmenden Wassers. Aufgrund der Impulserhaltung bedeutet das auch einen effizienten Antrieb für das Tier. Der dabei erzeugte *Schub T* ergibt sich als das Produkt aus Massenstrom und der Differenz zwischen der Geschwindigkeit u_2 des Strahls und der Geschwindigkeit u_1 des ungestörten Wassers

$$T = \frac{m}{t}(v_2 - v_1) . \quad (10.5)$$

Die Leistung ergibt sich als das Produkt aus Schub T und Reisegeschwindigkeit bzw. Geschwindigkeit v_1 der ungestörten Strömung zu

$$P_{\text{out}} = \frac{mu_1}{t}(v_2 - v_1) . \quad (10.6)$$

Die hinein gesteckte Leistung ergibt sich aus der kinetischen Energie pro Zeit

$$P_{\text{in}} = \frac{m}{2t}(v_2^2 - v_1^2) . \quad (10.7)$$

Die Effizienz lässt sich als Quotient von Output zu Input bestimmen:

$$\eta_f = \frac{2u_1}{u_2 + u_1} \quad (10.8)$$

und wird als Froude'sche Vortriebs-Effizienz bezeichnet. Die Effizienz wird maximal, wenn die Ausströmgeschwindigkeit nur etwas größer ist als die Reisegeschwindigkeit, da dann Zähler und Nenner ungefähr gleich sind. Strahlantrieb bei im Wasser lebenden Organismen ist nicht besonders effizient im Vergleich zum Antrieb mit Finnen, lässt sich aber recht einfach realisieren. Realistische Wirkungsgrade liegen bei ungefähr 30 %.

²Dies ist eine typische Strömungsgeschwindigkeit, die in den Kreislaufsystemen der meisten größeren Säugetiere beobachtet werden kann. Auch der Luftstrom in der menschlichen Luftröhre hat ungefähr diese Geschwindigkeit. Im Gegensatz dazu sind die Strömungsgeschwindigkeiten in Pflanzen deutlich geringer, da dort keine Pumpe als Antrieb zur Verfügung steht sondern der Transport alleine durch die Kapillarkräfte bewirkt wird. In einer Eiche z.B. beträgt die Strömungsgeschwindigkeit ungefähr 10 mm/s.

³Bei einem kleinen Schwamm beträgt das Volumen ungefähr 100 000 mm³, die Ausfluss-Öffnung hat einem Querschnitt von 100 mm².

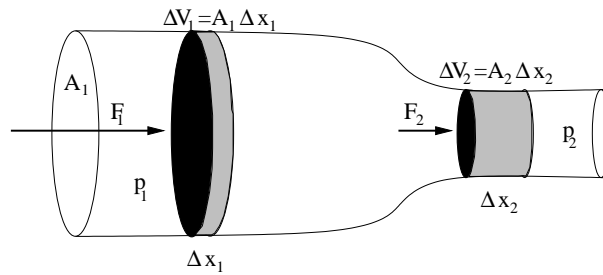


Abbildung 10.5: Zur Herleitung der Bernoulli-Gleichung

10.4 Bernoulli-Gleichung

In idealen Flüssigkeiten wirken keine Reibungskräfte. Daher muss jede Druckarbeit, die auf ein Volumen ausgeübt wird, als vermehrte kinetische Energie dieses Volumens wieder auftauchen. Betrachten wir dazu ein Rohr mit variablem Querschnitt. Um ein Volumenelement $V_1 = A_1 \cdot \Delta x_1$ im weiten Teil durch die Fläche A_1 zu befördern, muss man es um ein Stück Δx_1 verschieben, d.h. es ist gegen den Druck p_1 der Flüssigkeit eine Arbeit

$$\Delta W_1 = F_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot A_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot V_1 \quad (10.9)$$

zu verrichten. Im engen Teil der Röhre gilt entsprechend

$$\Delta W_2 = F_2 \cdot \Delta x_2 = p_2 \cdot A_2 \cdot \Delta x_2 = p_2 \cdot V_2 . \quad (10.10)$$

Diese Arbeit bewirkt eine Veränderung der potentiellen Energie des Volumenelements. Dessen kinetische Energie ist gegeben als

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \rho \cdot v^2 \cdot \Delta V \quad (10.11)$$

oder als kinetische Energiedichte ϵ_{kin}

$$\epsilon_{\text{kin}} = \frac{E_{\text{kin}}}{V} = \frac{1}{2} \rho v^2 . \quad (10.12)$$

In einer idealen Flüssigkeit gilt die Energieerhaltung, d.h. die Summe aus potentieller und kinetischer Energie ist konstant:

$$p_1 \Delta V_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 \Delta V_1 = p_2 \Delta V_2 + \frac{1}{2} \rho_2 v_2^2 \Delta V_2 . \quad (10.13)$$

In einer inkompressiblen Flüssigkeit ist ρ konstant und daher $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$. Damit folgt aus der Energieerhaltung

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 . \quad (10.14)$$

Für eine inkompressible, reibungsfreie Flüssigkeit, die in einem waagerechten Rohr fließt, gilt daher die *Bernoulli Gleichung*

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_o = \text{const} . \quad (10.15)$$

Die Konstante p_o ist der Gesamtdruck, der an der Stelle mit $v = 0$ als der Druck der Flüssigkeit erreicht wird. Die Größe $p_s = p_o - p = \frac{1}{2} \rho v^2$ ist der *Staudruck*, der beim Auftreffen der bewegten Materie auf eine Fläche erzeugt würde. Diese Größe wird auch als *dynamischer Druck* oder *Strömungsdruck* bezeichnet. Die Größe $p = p_o - p_s$ ist der *statische Druck* der strömenden Flüssigkeit.

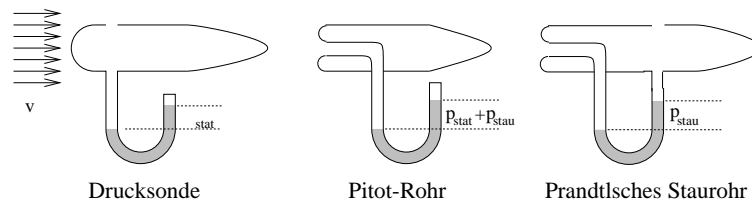


Abbildung 10.6: Verfahren zur Druckmessung: links Drucksonde zur Messung des statischen Drucks, in der Mitte Pitot-Rohr zur Messung des Gesamtdrucks, rechts Prandtl'sches Staurohr zur Messung des Staudrucks

10.4.1 Erweiterte Bernoulli Gleichung und Gesetz von Toricelli

Betrachtet man kein waagerechtes sondern ein schräggeltes Rohr, so ist neben der Druckarbeit und der kinetischen Energie auch die potentielle Energie in der Energiebilanz zu berücksichtigen:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh = \text{const} = p_o . \quad (10.16)$$

Auch diese Gleichung beschreibt eine Energieerhaltung und wird als Bernoulli-Gleichung bezeichnet. Für den Spezialfall einer Flüssigkeit in Ruhe verschwinden die Terme, die die Geschwindigkeit enthalten, und es ist

$$p_1 - p_2 = \rho g(h_1 - h_2) \Rightarrow dp = \rho gdh . \quad (10.17)$$

Diese Gleichung haben wir bereits als hydrostatische Grundgleichung kennen gelernt.

Die erweiterte Bernoulli-Gleichung erklärt z.B. das *Gesetz von Toricelli*: Die Ausflussgeschwindigkeit einer reibungslosen Flüssigkeit durch ein Loch in der Seitenwand eines mit dieser Flüssigkeit gefüllten Behälters ist gleich der Geschwindigkeit, die ein Körper erreichen würde, wenn er die Strecke vom Spiegel der Flüssigkeit zur Ausflussöffnung frei fallen würde.

10.4.2 Pitot-Rohre und Druckmessung

Alle drei der in der Bernoulli Gleichung vorkommenden Drucke lassen sich an beliebiger Stelle in der Strömung messen. Der statische Druck p wird mit der *Drucksonde* gemessen: die Stromlinien gehen an der Drucksonde vorbei, durch seitliche Öffnungen wird der statische Druck p in der Flüssigkeit auf das Manometer geleitet und dort gemessen. Der Gesamtdruck lässt sich mit dem *Pitot-Rohr* oder einem Steigrohr messen. Wird das Rohr parallel zu den Stromlinien in die Strömung eingebracht, so gilt am Kopf des Rohres $v = 0$ und es wird der Gesamtdruck gemessen. Der Staudruck p_s wird mit dem *Prandtl'schen Staurohr*, einer Kombination aus Drucksonde und Pitotrohr, als die Differenz von Gesamtdruck und statischem Druck gemessen. Für kleine Strömungsgeschwindigkeiten ist das Prandtl'sche Staurohr ungeeignet, da es, wie das Pitot-Rohr, sehr empfindlich auf kleine Abweichungen seiner Ausrichtung relativ zur Strömungsrichtung reagiert. Daher wird das Prandtl'sche Staurohr nicht zur Messung von Windgeschwindigkeiten verwendet, es ist jedoch als Geschwindigkeitsmesser in Flugzeugen zur Messung der Relativgeschwindigkeit Flugzeug gegen Luft im Einsatz.

Pitot-Rohre kommen auch in der Natur vor. Abbildung 10.7 zeigt zwei Beispiele. Die Larven von *Macronema* z.B. formen ein Pitot-Rohr, in dessen Mitte sie ein Netz zum Filtern von Nährstoffen spannen: eine Öffnung ist stromaufwärts gerichtet und ist nahezu dem vollen statischen plus dynamischen Druck ausgesetzt; ein kleiner Teil geht durch die Strömung durch den Körper verloren, d.h. das Wasser kommt nicht vollständig zum Stillstand. Die andere Öffnung ist nahezu parallel zur Strömung und erfährt daher nur den statischen Druck. Diese Druckdifferenz treibt den Strom durch den Körper und den darin befindlichen Nahrungsfiler. *Styela montereyensis* hat eine komplexere Strategie entwickelt, da sie sich im flachen Wasser mit periodisch wechselnder Strömungsrichtung befindet. Der Wechsel in der Strömungsrichtung wird durch einen flexiblen, am Boden verankerten Fuß ausgeglichen, von

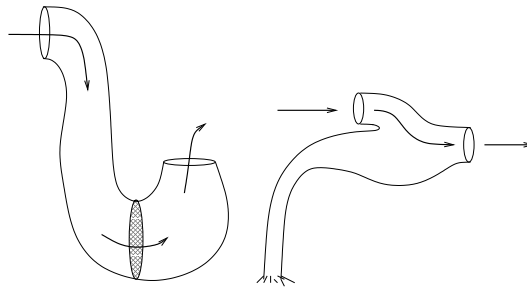


Abbildung 10.7: Natürliche Pitot-Rohre: Larve von *Macroneuma* (links) und *Styela Monteyenis* (rechts)

dem ausgehend sich *Styela* wie eine Wetterfahne an die Strömung anpasst, so dass die Einströmöffnung stets in die Strömung weist.

10.5 Hydrodynamischer Auftrieb

Das hydrodynamische Paradoxon beschreibt ein unerwartetes Phänomen, das sich durch das Bernoullische Prinzip erklären lässt: eine hohe Strömungsgeschwindigkeit bedeutet einen geringeren statischen Druck als in der Umgebungsluft und diese Druckdifferenz kann verwendet werden, um Körper gegen die Schwerkraft zu halten (hydrodynamischer Auftrieb). Ein Beispiel lässt sich wie folgt realisieren: lässt man Luft durch einen Trichter nach unten strömen, so kann diese Luft einen Tischtennisball im Trichter gegen die Gravitation halten anstelle ihn, wie erwartet, wegzupusten.

Um einen Gegenstand anzuheben, muss die Schwerkraft mg auf den betreffenden Gegenstand überwunden oder zumindest kompensiert werden. Dazu muss der Unterdruck über dem Gegenstand dem Staudruck der Strömung entsprechen, d.h. es muss gelten

$$\frac{1}{2} \rho_{\text{Luft}} v^2 \cdot A > mg . \quad (10.18)$$

Ein störendes natürliches Auftreten des hydrodynamischen Auftriebs ist das Abheben von Dächern bei Sturm: ein Dach wird nicht durch den Winddruck weggedrückt, sondern durch die über dem Dach komprimierten Stromlinien und die damit verbundene Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit bzw. die Verringerung des statischen Drucks angehoben. Daher findet die Abdeckung auf der dem Wind abgewandten Seite, der Lee-Seite, statt.

Auch natürliche Objekte haben mit dem durch das Bernoulli Prinzip bedingten Auftrieb zu kämpfen. Beispiele aus dem Tierreich sind die Flunder und der Sanddollar. Einige Arten Sanddollar sind perforiert, so dass der durch Bernoulli vermittelte Sog nicht den Sanddollar anhebt sondern Wasser durch dessen Öffnungen saugt, was auch der Nahrungsaufnahme dienen kann. Die Flunder dagegen gräbt sich teilweise ein, erhöht also ihre Masse durch Auflegen von Sand.

Andere Paradoxa lassen sich ebenfalls durch das Bernoullische Prinzip erklären: (1) Ein schneller Luftstrom zwischen zwei vertikalen Metallplatten oder Blättern Papier bewirkt, dass sich diese anziehen. In der freien Natur beobachten wir dieses Phänomen als den Sog eines uns überholenden Lastwagens, den Sog zwischen einem Schiff und der Kanalböschung oder den Sog zwischen zwei Schiffen, die sich in geringem Abstand passieren. (2) Eine drehbar gelagerte Scheibe stellt sich in einer Strömung quer zur Strömung ein und nicht etwa senkrecht dazu: die Platte liege ursprünglich parallel zur Strömung. Wird sie nur etwas ausgelenkt, so werden an den umströmten Rändern die Stromlinien zusammengedrückt und es entsteht ein Unterdruck, der die Platte vollends in die Strömung dreht. Eine etwas kompliziertere Anwendung dieses Prinzips ist die im Wind flatternde Fahne

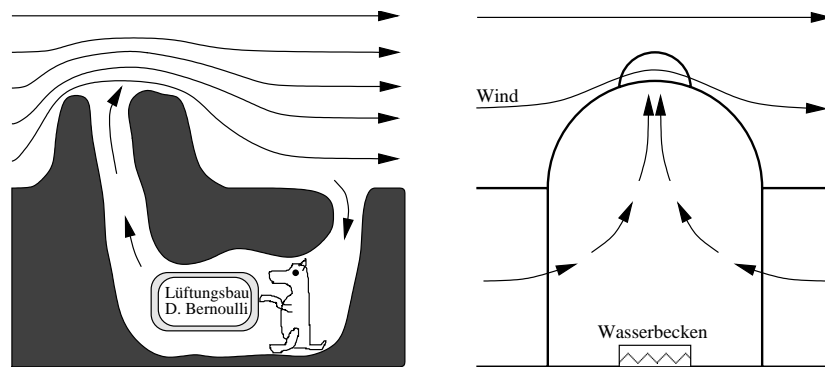


Abbildung 10.8: Belüftung des Baus beim Präriehund (links) und beim Menschen (rechts)

10.5.1 Lüftende Präriehunde

Präriehunde verwenden den Bernoulli-Effekt und die Kontinuitätsgleichung zur Belüftung ihrer Bauten, vgl. Abb. 10.8. Einer der beiden Eingänge liegt bis zu 3 m höher, so dass über ihm aufgrund der Kontinuitätsgleichung die Strömungsgeschwindigkeit erhöht ist. Dadurch ist der statische Druck geringer als über dem anderen Eingang und es entsteht ein Druckgefälle, das eine Luftströmung durch den Bau treibt. Menschen haben dieses System in verschiedenen Gebäudetypen dadurch kopiert, dass in der Kuppel/im Dach durch einen offenen Bereich Luft abgesaugt wird (die durch das Dach abgelenkte Luft überströmt selbiges schnell genug, um einen Unterdruck zu erzeugen) und damit ebenfalls Belüftung und Kühlung entstehen. Ventilatorhauben arbeiten nach diesem Prinzip, ebenso wie Bunsenbrenner, Zerstäuber und Wasserstrahlpumpen.

10.5.2 Fliegen

Während der hydrodynamische Auftrieb bei einem Hausdach im Sturm eher störend ist, wird er beim Fliegen ausgenutzt: in der Natur durch die Flügel der Vögel, technisch durch die Tragflächen der Flugzeuge. Auch der Propeller bzw. der Rotor eines Hubschraubers verwenden diese Druckdifferenz, wobei beim Propeller der Auftrieb zum Vortrieb genutzt wird (Propeller als waagrecht gestellter Rotor). Ebenso lässt sich das Segeln am Wind durch eine hochgestellte Tragfläche interpretieren – es gibt Rennyachten, die mit einer senkrecht gestellten Tragfläche segeln.

Ein einfaches hands on Experiment können Sie selbst durchführen, wenn Sie die Hand aus dem Fenster eines fahrenden Autos oder Zuges halten: eine flach gehaltene Hand (Handfläche ungefähr parallel zum Boden) erfährt einen Auftrieb; die senkrecht zum Wind gehaltene Hand dagegen spürt den Druck der anströmenden Luft und lässt sich nur schwer in die Strömung drehen (vgl. die bereits beim hydrodynamischen Paradoxon erwähnte Platte, die sich quer in die Strömung stellt).

Experimentell lässt sich der aerodynamische Auftrieb an Hand eines an einer Waage befestigten Profils in einer Strömung bestimmen. Betrachtet man die Stromlinien um ein derartiges Profil, so wird der Grund für den Auftrieb offensichtlich: die Stromlinien werden durch das Profil in einer Weise geteilt, dass sie sich oberhalb des Profils zusammendrängen (hohe Strömungsgeschwindigkeit) und unterhalb relativ weit separiert sind (geringe Strömungsgeschwindigkeit). Diese Geschwindigkeitsdifferenz entspricht nach Bernoulli einer Differenz im statischen Druck. Die sich daraus ergebende Auftriebskraft berechnet sich über die Differenz der beiden statischen Drucke und die Fläche A des Profils zu

$$F_A \approx \frac{1}{2} \rho \cdot (v_1^2 - v_2^2) \cdot A. \quad (10.19)$$

Das \approx in der Gleichung entsteht, weil die Geschwindigkeitsdifferenz nicht über die gesamte Fläche konstant ist. Eine korrektere Formulierung der Auftriebskraft ist in (10.23) gegeben.

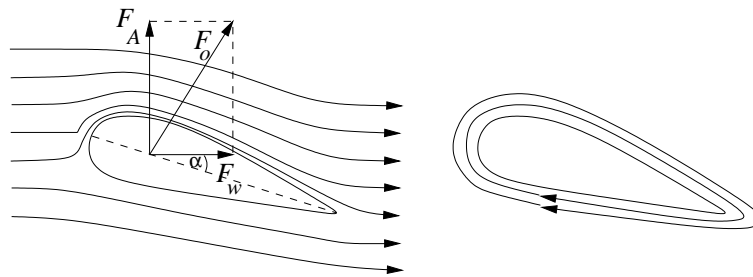


Abbildung 10.9: Auftriebs- und Widerstandskraft an einem Flügel (links) und Wirbel um den Flügel (rechts)

Bei der Herleitung von (10.19) sind wir davon ausgegangen, dass das Medium inkompressibel ist und die Reibung vernachlässigt werden kann. Im realen Fall dagegen sind die Reibung zwischen der Luft und der Tragfläche sowie Wirbelbildung an der Tragfläche zu berücksichtigen, vgl. Abb. 10.9. Insbesondere der sich an der hinteren Tragflächenkante ablösende Anfahrwirbel hat eine große Bedeutung für die Entstehung einer Zirkulationsströmung (Wirbel) um die Tragfläche und damit die Ausbildung der Auftriebskraft: der Zirkulationswirbel bewirkt unterhalb der Tragfläche eine zur Vorderkante der Tragfläche gerichtete Strömung und reduziert damit die Geschwindigkeit der anströmenden Luft relativ zur Tragfläche, während er oberhalb der Tragfläche für eine Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit sorgt, vgl. Abb. 10.9. Der Wirbel hat damit einen Drehsinn ähnlich wie der Wirbel um einen rotierenden Zylinder beim Magnus-Effekt (siehe unten). Theoretisch lässt sich dieser Wirbel und das sich daraus ergebende Gesamtströmungsmuster in der Kutta–Joukowski–Theorie beschreiben, wobei der Auftrieb um einen Tragflügel der Spannweite S in einer Strömung mit der Geschwindigkeit v durch eine Auftriebskraft

$$F_A = \rho v S \Gamma \quad (10.20)$$

beschrieben werden kann mit

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int \text{rot} \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int \nabla \times \vec{v} \cdot d\vec{A} \quad (10.21)$$

als der Zirkulation um die Tragfläche.

Der Auftrieb um die Flügel von Vögeln entsteht ebenfalls durch den Druckunterschied zwischen der Ober- und der Unterseite des Flügels.⁴ Allerdings hat ein Vogel einem Flugzeug gegenüber bessere Variationsmöglichkeiten: in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit gegen Luft, variiert der Vogel sein Flügelprofil um die Druckdifferenz und damit den benötigten Auftrieb konstant zu halten: spreizen der Federn erhöht die Fläche A in (10.19), so dass sich der Auftrieb erhöht bzw. bei geringen Fluggeschwindigkeiten, z.B. bei Start oder Landung, noch ein hinreichender Auftrieb zur Verfügung steht. Die Landeklappen eines Flugzeuges dienen dem gleichen Zweck.

10.5.3 Am–Wind–Segeln

Ein weiteres Anwendungsbeispiel für den aerodynamischen Auftrieb ist das Am–Wind–Segeln, d.h. das Segeln in Richtung des Windes, vgl. linkes Teilbild in Abb. 10.10. Moderne Schiffe können bis zu 45° an den Wind herangehen (zu Columbus Zeiten waren nur 90° , d.h. quer zum Wind, zu erreichen), Rennyachten sogar bis zu 30° . Im Gegensatz zum Flugzeug wird kein starres Anströmungsprofil verwendet, sondern der Wind selbst bläht das Segel in ein aerodynamisches Profil; durch Fieren der Schoten lässt sich dieses Profil modifizieren und der Windgeschwindigkeit und -richtung anpassen. Dieses Profil wird derart umströmt, dass

⁴Genaugenommen betrachten wir hier nicht das Fliegen eines Vogels sondern das Gleiten, d.h. die Bewegung der Flügel wird nicht berücksichtigt.

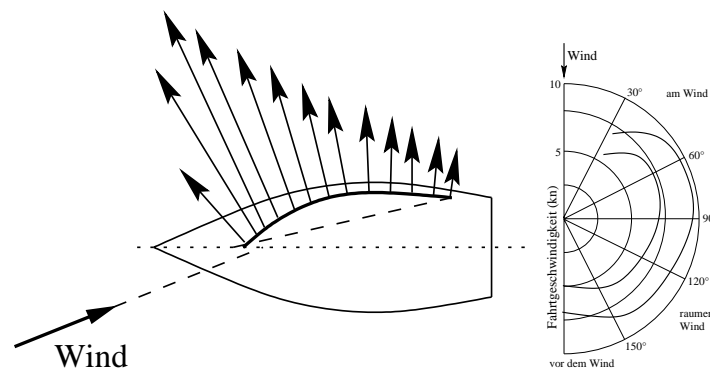


Abbildung 10.10: Links: Am-Wind-Segeln und Auftriebskräfte am Segel; rechts: Fahrgeschwindigkeit bei verschiedenen Kursen relativ zum Wind

einerseits ein Druck zur Seite erfolgt (der durch Kiel oder Schwert aufgefangen werden muss; Krängungskraft) und andererseits ein Vortrieb, vgl. linkes Teilbild in Abb. 10.10. Der Vortrieb entsteht im wesentlichen im Vorderteil des Segels, da die Druckkraft dort eine Komponente in Vorwärtsrichtung hat, während der hintere Teil des Segels zur Krängungskraft und zum Widerstand beitragen und vom Unterwasserschiff abgefangen werden muss, um eine Querversetzung des Bootes zu vermeiden.

Der rechte Teil von Abb. 10.10 zeigt die mit einem Segelboot erreichbaren Geschwindigkeiten in Abhängigkeit von Windgeschwindigkeit und -richtung. Die größten Geschwindigkeiten erreicht ein Boot bei Kursen ungefähr quer zum Wind, bei Vor-dem-Wind Kursen ist die Geschwindigkeit nur gering. Das gibt einen ersten Hinweis, dass die Druckkräfte (Kurse vor dem Wind) weniger effizient sind als die Auftriebskräfte.

Die geringere Geschwindigkeit bei Am-Wind Kursen im Vergleich zu Kursen quer zum Wind erklärt sich durch die Kombination von Auftriebskraft und Widerstandskraft des Segels. In beiden Kursen ist die Segelstellung relativ zum Wind ähnlich, d.h. auch Auftriebskräfte und Widerstandskräfte relativ zum Segel sind vergleichbar. Bei Kursen quer zum Wind ist die Widerstandskraft quer zum Boot gerichtet und wirkt als Krängungskraft. Beim Am-Wind Kurs dagegen hat sie eine Komponente parallel zum Schiffsrumpf und wirkt als verzögernde Kraft.

Gleitschirme und stablose Lenkdrachen (z.B. beim Kite-Surfen) haben mit Segeln eine gewisse Verwandtschaft: in allen Fällen wird der nicht nur benötigt, um an einem aerodynamischen Profil einen Auf- oder Vortrieb zu erzeugen, sondern auch, um das aerodynamische Profil selbst zu erzeugen und zu erhalten.

10.5.4 Windenergiekonverter (WEK)

Aerodynamische Profile können unterschiedlich in eine Luftströmung eingebracht werden. In den bisher betrachteten Fällen Flugzeug und Segelschiff stand das Profil starr zur Strömungsrichtung. Eine andere Situation ergibt sich bei Propeller und Rotor: durch mechanische Energie wird eine Rotationsbewegung erzeugt, die beim Durchschneiden der Luft für einen Vortrieb (Propeller) oder Auftrieb (Hubschrauberrotor) sorgt, oder es wird ein Profil in eine Strömung so eingebracht, dass es einen Auftrieb erfährt, der in eine Rotationsbewegung umgewandelt werden kann. Die Rotationsenergie wiederum wird in elektrische Energie umgewandelt (Windenergiekonverter, WEK).

Nutzt man mit rotierenden Körpern den hydrodynamischen Auftrieb, so ist eine Variation des Profils mit dem Abstand von der Drehachse erforderlich: da der Rotor als starrer Körper rotiert, ist seine Winkelgeschwindigkeit ω unabhängig vom Radius r , nicht jedoch die Bahngeschwindigkeit $v = \omega \cdot r$. Diese nimmt von innen nach außen zu, d.h. es muss außen ein größerer Auftrieb in Rotationsrichtung vorhanden sein. Die erforderliche Anpassung

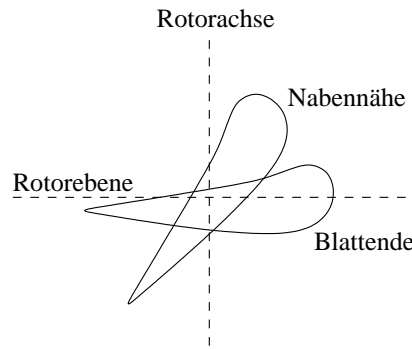


Abbildung 10.11: Verdrehung des Flügelprofils beim Windenergiekonverter mit dem Abstand des Profils von der Drehachse

des Profils erfolgt durch Veränderung des Profilquerschnitts oder durch Verwindung eines konstanten Profils, vgl. Abb. 10.11.

Auftriebs- und Widerstandskraft, Gleitzahl

Im Folgenden wollen wir die Dynamik eines Windenergiekonverters etwas genauer betrachten. Dazu gehen wir wieder von einem Tragflächenprofil aus. Auf dieses Profil wirken zwei Kräfte, die Auftriebskraft F_A senkrecht zur Strömungsrichtung und die Widerstandskraft F_W parallel zur Anströmung. Das Profil ist um einen Anstellwinkel oder Pitch α gegen die Strömung gestellt. Die Widerstandskraft F_W , die von der Luftreibung an der Profilloberfläche verursacht wird, ist gegeben durch (vgl. Herleitung zu (10.53))

$$F_W = c_W \frac{1}{2} \rho_L v^2 A \quad (10.22)$$

mit c_W als dem Widerstandsbeiwert, ρ_L als der Dichte der Luft, v als der Anströmgeschwindigkeit und A als der Gesamtfläche aller Blätter des Rotors. Letztere ist bei annähernd rechteckigem Blattumriss gegeben zu $A = B_p L z_F$ mit B_p als der Profilbreite, L als der Profillänge und z_F als der Zahl der Flügel des Windrades. Für die Auftriebskraft F_A gilt entsprechend

$$F_A = c_A \frac{1}{2} \rho_L v^2 A \quad (10.23)$$

mit c_A als Auftriebsbeiwert. In diesen Auftriebsbeiwert geht neben der Flügelgeometrie auch der durch (10.20) und (10.21) beschriebene Wirbel ein. Widerstandskraft und Auftriebskraft ergeben zusammen die resultierende Kraft

$$F_{RS} = \sqrt{F_A^2 + F_W^2} . \quad (10.24)$$

Der Widerstandsbeiwert c_W und der Auftriebsbeiwert c_A werden für verschiedene Profile in Abhängigkeit vom Anstellwinkel experimentell ermittelt und in einem Polardiagramm aufgetragen, vgl. Abb. 10.12. Beim WEK fällt auf, dass dieses Profil selbst bis zu einem negativen Anstellwinkel von -6° noch einen positiven Auftriebsbeiwert besitzt. Das ist übrigens auch bei der Flugzeugtragfläche und einigen Insektenflügeln der Fall: sonst würden Landemanöver mit nach unten gerichteter Nase oder Abwinde zu sofortigen Abstürzen führen. Beim WEK ist der Auftriebsbeiwert bei einem Anstellwinkel von $\alpha = 15.5^\circ$ maximal. Bei größeren Anstellwinkeln wird der Auftriebsbeiwert wieder geringer, da dann die Strömung im hinteren Teil der Profiloberkante abreißt, d.h. das Profil wird nicht mehr vollständig umströmt. Dann ist die für den Auftrieb zur Verfügung stehende effektive Fläche geringer und damit auch der Auftrieb. Zur Charakterisierung von aerodynamischen Profilen wird die Gleitzahl $E_G = c_A/c_W$ als das Verhältnis aus Auftriebs- und Widerstandsbeiwert benutzt. Die maximale Gleitzahl für ein Profil wird durch eine Tangente an das Polardiagramm durch

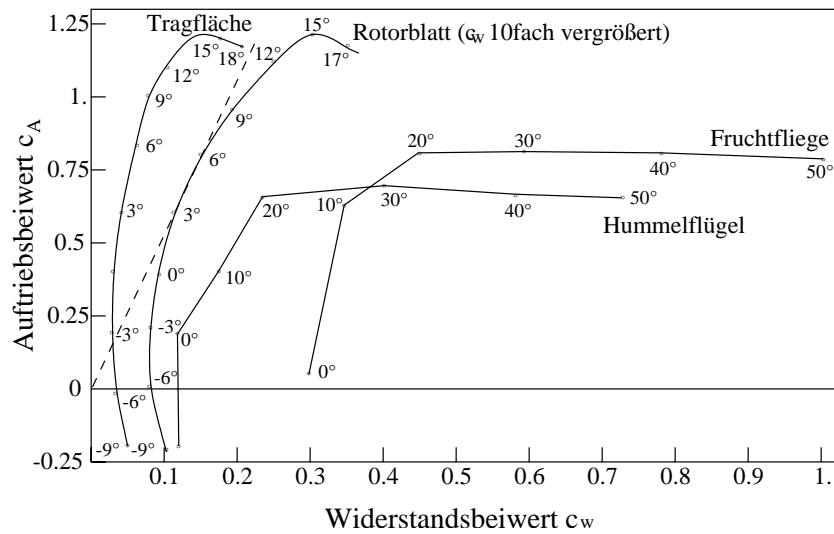


Abbildung 10.12: Zur Definition der Gleitzahl

den Ursprung bestimmt: jede Gerade durch den Ursprung gibt ein festes Verhältnis von Auftriebskraft zu Widerstandskraft; bei der Tangente wird dieses Verhältnis maximal. Sie markiert nicht nur den maximalen Gleitwert sondern auch den Anstellwinkel, bei dem dieser erreicht wird, vgl. gestrichelte Linie in Abb. 10.12.

Leistungsbeiwert

Der maximale ideale Leistungsbeiwert gibt an, welcher Anteil der im Wind enthaltenen kinetischen Energie durch den WEK höchstens genutzt werden kann. Betrachten wir dazu den Verlauf der Strömung um den Windenergiekonverter. Da der WEK dem Wind Strömungsenergie entzieht, nimmt die Windgeschwindigkeit ab. Nach der Kontinuitätsgleichung muss die Strömung hinter dem Windkonverter dann einen größeren Querschnitt haben als davor. Größen ohne Index bezeichnen im folgenden die Eigenschaften der ungestörten Strömung vor dem Rotor, der Index 0 gibt die Größen in der Ebene des Rotors, der Index 2 die hinter dem Rotor. Die Geschwindigkeit in der Rotorebene kann als Mittelwert der Geschwindigkeiten vor und hinter dem Rotor angenähert werden: $v_0 = (v + v_2)/2$. Die kinetische Energiedichte der Strömung ist $\rho v^2/2$. Aus der Energiedichte lässt sich die zur Verfügung stehende Energie oder besser Leistung bestimmen: Energiedichte ist Energie pro Volumen, Leistung* ist Energie pro Zeit. Multiplizieren wir die Energiedichte mit dem Volumenstrom (Volumen pro Zeit) gemäß (10.4), so ergibt sich die Leistung zu:

$$P = \epsilon \cdot \dot{V} = \frac{E}{V} \cdot \frac{V}{t} = \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot Av = \frac{1}{2} \rho v^3 A. \quad (10.25)$$

Die zur Umwandlung am Windenergiekonverter zur Verfügung stehende Leistung ist die Differenz der Leistungen des zu- und abströmenden Windes

$$P_{\text{konv}} = \frac{1}{2} \rho (v^2 \cdot vA - v_2^2 \cdot v_2 A_2) = \frac{1}{2} \dot{m} (v^2 - v_2^2) \quad (10.26)$$

wobei im letzten Schritt die Konstanz des Massenstroms $\dot{m} = \rho Av$ verwendet wurde. Um einen Bezug zu der einzigen bekannten Fläche, der Fläche A_0 des Windenergiekonverters, herzustellen, drücken wir den Massenstrom durch die Werte in der Rotorebene aus und erhalten für die Leistung

$$P_{\text{konv}} = \frac{\rho(v + v_2)A_0}{4} (v^2 - v_2^2) = \frac{\rho}{4} A_0 v^3 \left(1 + \frac{v_2}{v}\right) \left[1 - \left(\frac{v_2}{v}\right)^2\right]. \quad (10.27)$$

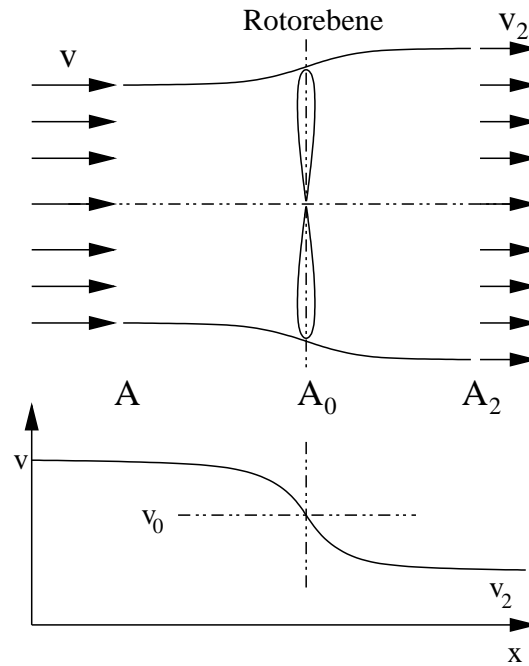


Abbildung 10.13: Veränderung der Windgeschwindigkeit beim Durchgang durch einen WEK

Die maximale Windleistung in der Rotorfläche ergibt sich für die ungebremste Windgeschwindigkeit als $P_{\max} = \rho v^3 A_0/2$; das Verhältnis aus maximaler Leistung P_{\max} und Rotorleistung P_{konv} , der ideale Leistungsbeiwert c_p , ist

$$c_p = \frac{P_{\text{konv}}}{P_{\max}} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v_2}{v}\right) \left[1 - \left(\frac{v_2}{v}\right)^2\right]. \quad (10.28)$$

Der maximale Leistungsbeiwert $c_{p,\max}$ ergibt sich durch Differentiation nach dem Geschwindigkeitsverhältnis und Null-setzen dieser Ableitung zu

$$c_{p,\max} = 0.593 \quad (10.29)$$

bei einem Geschwindigkeitsverhältnis von $v_2/v = 1/3$. Ein idealer Windenergiekonverter kann also bestenfalls 59.3 % des Leistungsangebots in Nutzleistung umsetzen, wobei er so ausgelegt werden muss, dass die Windgeschwindigkeit hinter dem Rotor $1/3$ der anströmenden Windgeschwindigkeit beträgt. Reale Windenergiekonverter haben geringere Leistungsbeiwerte, der hier gegebene maximale Leistungsbeiwert ist unabhängig von der Bauart des Windenergiekonverters. Die Leistung geht mit v^3 , d.h. eine Verdoppelung der Windgeschwindigkeit gibt die 8fache Leistung!

Die Strömung hinter dem Windenergiekonverter ist gestört: ein Wirbeltrichter bildet sich, wenn sich die im WEK abgebremste Luft mit der schnelleren, freiströmenden Luft durch turbulenten Austausch mischt. Innerhalb des Wirbeltrichters kann kein weiterer Windenergiekonverter effizient arbeiten, d.h. die Packungsdichte in Windparks ist begrenzt.

Widerstandsläufer

Der Widerstandsläufer ist ein Windrad, das sich nicht den hydrodynamischen Auftrieb zu Nutze macht, sondern durch den vom Wind erzeugten Druck auf eine quer zum Wind gestellte Fläche getrieben wird. Entscheidend ist daher die Widerstandskraft

$$F_W = c_W \frac{1}{2} \rho v^2 A \quad (10.30)$$

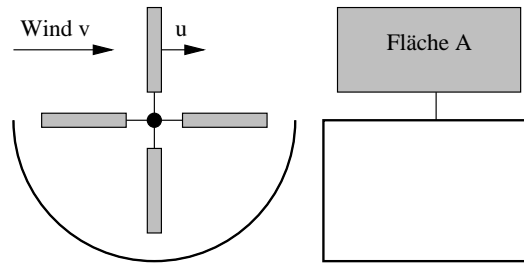


Abbildung 10.14: WEK auf der Basis eines Widerstandsläufers

mit c_W als dem Widerstandsbeiwert, der von der Geometrie des Körpers abhängt. An einem mit der Geschwindigkeit u bewegten Rotorblatt ist die Widerstandskraft

$$F_W = c_W \frac{1}{2} \rho_L (v - u)^2 A, \quad (10.31)$$

da die Widerstandskraft durch die relative Geschwindigkeit zwischen Strömung und Körper bestimmt ist, nicht durch die Geschwindigkeit relativ zum Boden. Die Leistung eines Widerstandsläufers ist gegeben zu

$$P_{WL} = F_W \cdot u = \frac{1}{2} \rho c_W (v - u)^2 u A. \quad (10.32)$$

Für den Leistungsbeiwert des Widerstandsläufers ergibt sich daraus

$$c_{p,W} = \frac{P_{WL}}{P_{\max}} = \frac{c_W \frac{\rho}{2} (v - u)^2 u A}{\frac{\rho}{2} v^3 A} = c_W \left(1 - \frac{u}{v}\right)^2 \frac{u}{v}. \quad (10.33)$$

Der maximale Leistungsbeiwert ergibt sich nach Differenzieren nach u/v zu

$$c_{p,W,\max} = c_W \frac{4}{27} \quad (10.34)$$

bei einem Geschwindigkeitsverhältnis von $u/v = 1/3$. Selbst mit einem sehr großen Widerstandsbeiwert c_W von 2.3 (C-Profil mit der offenen Seite dem Wind zugewandt, vgl. Abb. 10.23) ergibt sich bestenfalls eine Ausbeute von 34 %. Aufgrund dieses geringen Leistungsbeiwerts sind Widerstandsläufer den aerodynamischen Rotoren weit unterlegen. Ihr Vorteil liegt in der Fähigkeit, auch bei schwachem und unstetigem Wind zu funktionieren – allerdings ist dann die Ausbeute aufgrund der v^3 -Abhängigkeit der Leistung nur gering.

10.6 Magnus-Effekt

Der aerodynamische Auftrieb wird durch die unterschiedlichen Windgeschwindigkeiten auf der Ober- und Unterseite eines Körpers bewirkt. Bei der Tragfläche oder dem Windenergiekonverter wird der Geschwindigkeitsunterschied durch das zur Strömungsachse asymmetrische Profil bestimmt. Alternativ kann aerodynamischer Auftrieb auch mit einem symmetrischen Körper erzeugt werden. In Ruhe würde dieser Körper symmetrisch umströmt und keinen Auftrieb erfahren, vgl. linkes Teilbild in Abb. 10.15. Rotiert der Körper, so bildet sich aufgrund der non-slip Bedingung ein Strömungswirbel (Mitte). Die Überlagerung der Geschwindigkeitsfelder von Wirbel und anströmendem Medium führt zu Geschwindigkeitsunterschieden auf der Unter- und Oberseite des Körpers. Ob daraus ein Auf- oder Abtrieb resultiert, hängt von der Rotationsrichtung relativ zur Strömung ab. In Abb. 10.15 ergibt sich ein Auftrieb; bei Umkehr der Rotation des Zylinders oder bei Umkehr der Richtung der Luftströmung würde sich ein Abtrieb ergeben – werden beide umgedreht, so ergibt sich ein Auftrieb wie in Abb. 10.15. Der Betrag des Auftriebs hängt von der Rotationsgeschwindigkeit ω , dem Radius r des Körpers und der Strömungsgeschwindigkeit ab:

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \cdot [(v + \omega r)^2 - (v - \omega r)^2] = 2 \rho v \omega r. \quad (10.35)$$

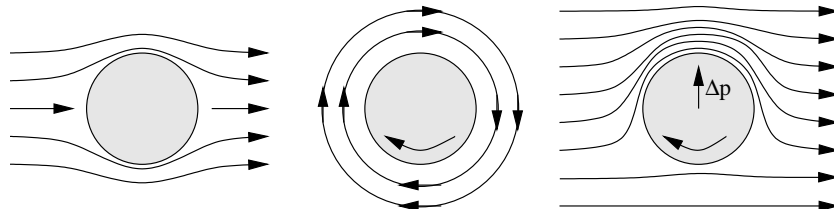


Abbildung 10.15: Magnus-Effekt: bei der Umströmung eines ruhende symmetrischen Profils entstehen keine Geschwindigkeitsunterschiede und damit auch kein Auftrieb (links). Ein rotierendes symmetrisches Profil umgibt sich mit einem Wirbel (Mitte), so dass sich in einer Luftströmung ein asymmetrisches Geschwindigkeitsprofil und damit ein Auftrieb ergibt (rechts)

10.6.1 Flettner-Rotor

Der Flettner-Rotor ist eine Variante des Schiffsantriebs, bei dem unter Einsatz einer relativ geringen Motorleistung die Leistung des Windes zum Antrieb verwendet wird. Flettner erprobte diese Form des Antriebs 1925/1926 mit dem Schoner Buckau, dessen Gaffelriggs er durch zwei rotierende zylindrische Türme mit Durchmessern von 2,8 m und Höhen von 18,3 m über Deck ersetzte, vgl. Abb. 10.16. Da die Türme zusammen mit Unterbauten nur 4 t wogen gegenüber den 35 t des Gaffelriggs, erhöhte sich die Stabilität des Schiffes beträchtlich. Die Zylinder wurden von einem 45 PS Dieselmotor betrieben, ihre Drehzahl betrug 700 min^{-1} . Die Atlantik-Überquerung zeigte, dass die Antriebsform stabil und sicher ist, aber eben wie bei einem konventionellen Segler von Windrichtung und -stärke abhängt. Daher konnte sich der Flettner-Rotor nie kommerziell gegen die Dampfmaschine durchsetzen. Dennoch wird seit einiger Zeit wieder am Flettner-Rotor und an Varianten desselben geforscht. Diese Untersuchungen haben günstige Stabilitäts-, Manövrier- und Segeleigenschaften ergeben und gezeigt, dass der Flettner-Rotor eine wirksame Antriebsform ist und als ein Zusatzantrieb Verwendung finden könnte.

10.6.2 Flugbahn eines Golfballs

Beim Golf wird der Ball beim Abschlag in eine schnelle Rotation mit 50 bis 130 Umdrehungen/s versetzt. Dadurch ergibt sich am Anfang der Flugbahn ein sehr starker Auftrieb, der die auf den Ball wirkende Gravitationskraft ungefähr kompensiert: der Ball fliegt nahezu gradlinig, so als würden keine Kräfte auf ihn wirken, vgl. Abb. 10.17. Dadurch wird die Scheitelhöhe der Flugbahn vergrößert und damit auch die Reichweite des Balls. Der absteigende Ast der Flugbahn ist eine Wurfparabel, da der Ball erst dann abzusinken beginnt, wenn sein

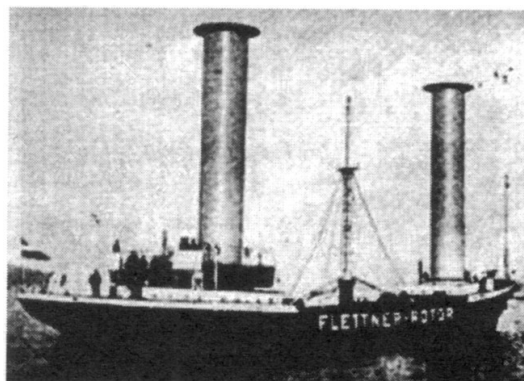


Abbildung 10.16: Flettner-Rotor im Einsatz

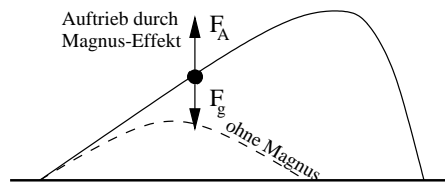


Abbildung 10.17: Flugbahn eines Golfballs: durch die Rotation des Golfballs entsteht ein zusätzlicher Auftrieb, der zu einer anfangs nahezu gradlinigen Flugbahn und damit insgesamt zu einer größeren Reichweite führt

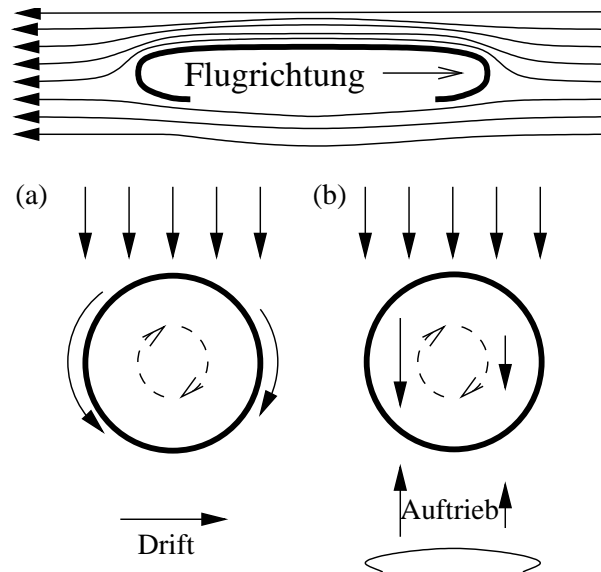


Abbildung 10.18: Strömung und Kräfte am Frisbee

Spin durch Reibung deutlich reduziert ist und der Magnus-Effekt nicht mehr zum Tragen kommt.

Rotierende Bälle werden auch im (Tisch-)Tennis verwendet, hier allerdings um den Ball unmittelbar hinter dem Netz zu versenken und nicht um die Flugbahn zu verlängern. Im Baseball werden rotierende Bälle mit einer Rotationsachse senkrecht zum Erdboden verwendet, wodurch der Ball um die Kurve fliegt und damit für den Fänger nahezu unberechenbar ist.

Auch einige Pflanzensamen nutzen durch Rotation um die eigene Achse den Magnus-Effekt aus. Dadurch sinken sie langsamer zu Boden und können vom Wind über weitere Strecken vertrieben werden.

10.6.3 Frisbee

Aerodynamische Effekte können wir am Frisbee zusammenfassen. Betrachten wir dazu seine Flugbahn: der Frisbee wird um eine Achse rotierend ungefähr waagrecht geworfen. Nach einiger Zeit weicht er zur Seite aus und legt sich noch zusätzlich auf die Seite. Dieses Flugverhalten können wir mit dem Magnus-Effekt verstehen, wobei letzterer zweimal angewandt werden muss: an den Rändern des Frisbees bewirkt der Magnus-Effekt eine Abweichung zur Seite, da die Scheibe auf der einen Seite mit der Flugrichtung rotiert, auf der anderen dagegen, vgl. Abb. 10.18. Dies ist die Ablenkung von der Geraden, wie sie beim um die Ecke geworfenen Baseball auftritt. Zusätzlich wirkt der Magnus-Effekt auch auf der Oberseite der Scheibe, wodurch der Auftrieb auf der einen Seite etwas geringer ist als auf der anderen. Daher legt sich die Frisbee-Scheibe zusätzlich auf die Seite.

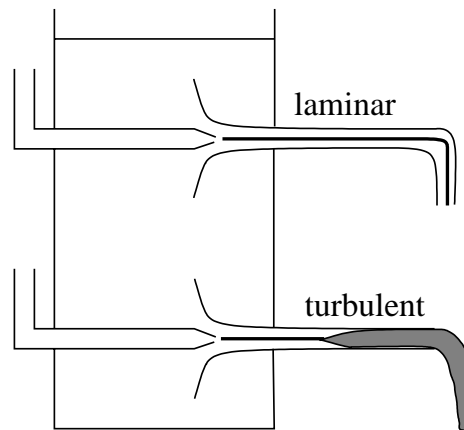


Abbildung 10.19: Da die Ausströmgeschwindigkeit gemäß Toricelli im unteren Rohr wesentlich höher ist als im oberen, ist die Strömung im oberen Rohr laminar, im unteren dagegen turbulent

10.7 Reale Flüssigkeiten

Bisher haben wir Flüssigkeiten als ideale Flüssigkeiten betrachtet und die Reibung vernachlässigt. Insbesondere bei der Herleitung des Bernoulli Prinzips wurde Reibungsfreiheit vorausgesetzt, da die Energieerhaltung in Anwesenheit von Reibung nicht in der einfachen Form formuliert werden kann. Reibung beruht auf den intermolekularen Kräften, mit denen die Flüssigkeitsteilchen aneinander oder an Wänden haften. Das Erscheinungsbild der Reibung hängt auch von der Strömung selbst ab, vgl. dazu den Reynolds-Versuch: aus einem großen Tank kann an zwei Stellen Flüssigkeit in Rohre austreten, vgl. Abb. 10.19. Die Flüssigkeit hat, entsprechend dem Gesetz von Toricelli, im unteren Rohr eine höhere Geschwindigkeit als im oberen. Ein feiner Tintenfaden, der von dieser Strömung mitgetragen wird, macht die unterschiedlichen Strömungen deutlich: im oberen Rohr (langsame Strömung) befindet sich der Tintenfaden als enger Faden in der Mitte der Strömung, d.h. es bildet sich eine laminare Strömung oder Schichtströmung aus. Im unteren Rohr dagegen bildet sich aufgrund der höheren Geschwindigkeiten eine turbulente Strömung aus und der Tintenfaden geht nach einer kurzen Strecke in Wirbel über, die den gesamten Rohrdurchmesser füllen. Wirbelbildung ist charakteristisch für Reibung, die Strömung ist turbulent.

10.7.1 Newton'sches Reibungsgesetz

Betrachten wir zwei Platten im Abstand D , zwischen denen sich eine Flüssigkeit befindet, vgl. Abb. 10.20. Die untere Platte ist in Ruhe ($v_u = 0$), die obere bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit v_o nach rechts. Aufgrund der no-slip Bedingung hat die oberste

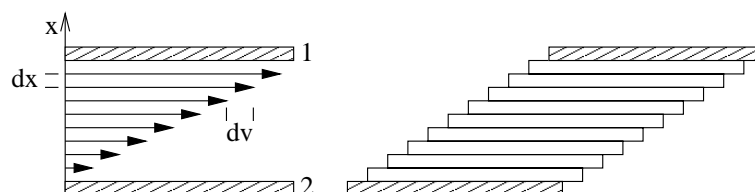


Abbildung 10.20: Die Bewegung der oberen Platte sorgt für die Ausbildung eines Geschwindigkeitsgradienten in der Flüssigkeit (links). Rechts das mechanische Analogon eines Papierstapels, bei dem die oberen Blätter verschoben und die unteren auf Grund der Reibung mitgeführt werden

Flüssigkeitsschicht ebenfalls die Geschwindigkeit v_0 während die unterste Flüssigkeitsschicht in Ruhe ist. In der Flüssigkeitsschicht bildet sich ein Geschwindigkeitsgradient $0 \leq v \leq v_0$, der aber nicht notwendigerweise wie in der Abbildung angedeutet linear sein muss. Daher wird der Geschwindigkeitsgradient als Differentialquotient dv/dx geschrieben. Gleiten die einzelnen Flüssigkeitsschichten übereinander ohne sich zu vermischen (rechter Teil von Abb. ??), so ist die Strömung laminar.

Das durch Reibung verursachte Übereinandergleiten der verschiedenen Flüssigkeitsschichten kann auch bei einem durch eine Scherkraft verschobenen Papierstapel beobachtet werden, wobei die einzelnen Papierbögen den Flüssigkeitsschichten entsprechen. Die *Reibungskraft* F_R , die notwendig ist, um eine Platte der Fläche A mit der konstanten Geschwindigkeit v parallel zu einer ruhenden Wand zu verschieben, ist proportional zur Fläche A und zum *Geschwindigkeitsgradienten* dv/dx , d.h. dem Geschwindigkeitsunterschied benachbarter Flächen:

$$F_R = \mu A \frac{dv}{dx} . \quad (10.36)$$

Alternativ kann man mit Hilfe der *Schubspannung* Schubspannung τ auch schreiben

$$\tau = \frac{F_R}{A} = \mu \frac{dv}{dx} . \quad (10.37)$$

Gleichung (10.36) ist das *Newton'sche Reibungsgesetz*. Die Proportionalitätskonstante μ ist die *dynamische Viskosität* oder die *Zähigkeit*. μ ist eine Materialkonstante, die mit dem Druck und der Temperatur variiert. Anstelle der dynamischen Viskosität wird manchmal die *Fluidität* $\phi = 1/\mu$ verwendet. Das Verhältnis der dynamischen Viskosität zur Dichte ist die *kinematische Viskosität* oder kinematische Zähigkeit:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} . \quad (10.38)$$

Da sich die kinematische Viskosität durch Division durch die Dichte ergibt, ist sie in Luft deutlich größer als in Wasser, obwohl die dynamische Viskosität von Luft deutlich geringer ist als die von Wasser. Daher müssen Sie bei der Angabe von Viskositäten stets deutlich machen, ob es sich um eine dynamische oder eine kinematische Viskosität handeln soll.

10.7.2 Laminare Rohrströmung: Hagen–Poiseuille

Eine Anwendung des Reibungsgesetzes ist eine laminare Rohrströmung, z.B. der Blutstrom in einer Ader. Bei der laminaren Rohrströmung haftet die Flüssigkeit an den Wänden und bewegt sich in der Mitte am schnellsten. In Analogie zur Schichtströmung können wir uns die Strömung aus kleinen Zylindern zusammengesetzt vorstellen, die reibungsbehaftet aneinander vorbei gleiten. Ein Flüssigkeitszylinder mit dem Radius r gleite am angrenzenden Hohlzylinder ab. An der Grenzfläche ist die Druckkraft gleich der Reibungskraft, d.h. $F_P = F_R$ bzw.

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\mu A \frac{dv}{dr} = -\mu 2\pi r l \frac{dv}{dr} . \quad (10.39)$$

Umformen (Separation der Variablen) ergibt

$$r dr = -\frac{2\mu l}{(p_1 - p_2)} dv \quad (10.40)$$

woraus sich nach Integration ergibt

$$r^2 = -\frac{4\mu l}{(p_1 - p_2)} v + C . \quad (10.41)$$

Die Integrationskonstante C lässt sich aus den Randbedingungen bestimmen: bei $r = R$, d.h. am äußeren Rand, ist $v = 0$, d.h. es wird $C = R^2$. Einsetzen in 10.41 und Auflösen nach v liefert das *Hagen–Pouseuillesche Gesetz*

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4\mu l} (R^2 - r^2) . \quad (10.42)$$

Damit ergibt sich ein parabolisches Profil, d.h. die Geschwindigkeit steigt mit dem Abstand von der Wand quadratisch an.

Der Massenstrom ergibt sich daraus zu

$$\dot{m} = \varrho Av = \frac{dm}{dt} = \int_0^R \frac{\varrho\pi(p_1 - p_2)}{2\mu l} (R^2 - r^2)r \, dr = \frac{\varrho\pi R^4(p_1 - p_2)}{8\mu l}. \quad (10.43)$$

Der Volumenstrom ergibt sich wegen $\dot{m} = \varrho\dot{V}$ zu

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4(p_1 - p_2)}{8\mu l}. \quad (10.44)$$

Der Massen- bzw. Volumenstrom kann aufgrund der Abhängigkeit von R^4 bei einer Vergrößerung des Radius wesentlich stärker gesteigert werden als durch eine Vergrößerung der Druckdifferenz $p_1 - p_2$. Daher auch die hohe Belastung des Herzens bei Arteriosklerose: für eine Abnahme des Durchmessers der Adern um nur 16 % muss bereits die doppelte Pumpleistung aufgebracht werden; bei einer Abnahme um 50 % wäre bereits die 16fache Pumpleistung erforderlich! Außerdem folgt aus der Gleichung, dass bei konstantem Querschnitt der Druckabfall $p_1 - p_2$ proportional zur Rohrlänge l ist: das entspricht dem bereits erwähnten Problem, dass die Haupttransportröhren des Kreislaufsystems einen relativ großen Querschnitt haben sollten, da der Druckabfall allein schon aufgrund ihrer Länge recht hoch ist.

Da die Reibungskraft gleich der an den Rohrenden wirkenden Druckkraft ist, lässt sich die Reibungskraft aus dem Druckgefälle bestimmen:

$$F_R = F_P = (p_1 - p_2)A = (p_1 - p_2)\pi R^2 = 8\mu l \frac{\dot{V}}{R^2} \quad (10.45)$$

wobei im letzten Schritt die Druckdifferenz mit Hilfe des Volumenstroms (10.44) ausgedrückt wurde. Verwendet man die mittlere Strömungsgeschwindigkeit, so ergibt sich wegen $\dot{V} = \pi R^2 v_m$ für die Reibungskraft

$$F_R = 8\pi\mu l v_m \quad (10.46)$$

Um diese Reibungskraft zu überwinden, muss ein Druckgefälle aufgebaut bzw. aufrechterhalten werden. Im Kreislauf übernimmt das Herz diese Aufgabe.

Bernoulli Gleichung bei Newtonscher Reibung

Durch die Reibungskraft ergibt sich in der Stromröhre ein Druckverlust p_V , der die Druckdifferenz $p_1 - p_2$ vermindert. Die Bernoulli-Gleichung kann auf newtonsche Flüssigkeiten erweitert werden, wenn man diesen Druckverlust berücksichtigt:

$$\varrho gh_1 + \frac{1}{2}\varrho v_1^2 + p_1 = \varrho gh_2 + \frac{1}{2}\varrho v_2^2 + p_2 + p_V. \quad (10.47)$$

Dieser Druckverlust wird als *Druckhöhe* $p_V = \varrho gh_V$ bezeichnet. Sie kann anschaulich interpretiert werden als diejenige Höhe, um die der Zufluss angehoben werden muss, um am Ausfluss der Stromröhre denselben Druck wie im reibungsfreien Fall zu erzeugen. Anschaulich wird sie in der Höhe eines Wasserturms, die zur Überwindung der Reibungsverluste im Wasserversorgungsnetz beiträgt.

Laminare Strömungen um Körper: Kugelfallviskosimeter

Eine ähnliche Betrachtung kann man auch für eine laminare Strömung um einen Körper, z.B. eine Kugel, durchführen. Dann gilt das *Stoke'sche Reibungsgesetz*

$$F_R = 6\pi\mu r v \quad (10.48)$$

mit v als der Relativgeschwindigkeit zwischen Kugel und Flüssigkeit und r als dem Radius der Kugel.

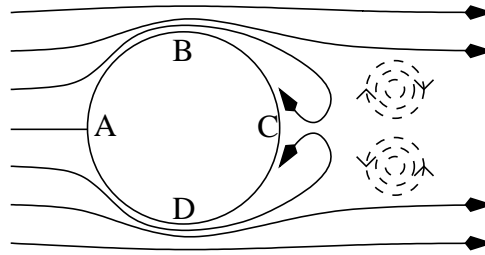


Abbildung 10.21: Wirbelbildung

Durch Bestimmung der Sinkgeschwindigkeit einer Kugel in einem Rohr konstanten Querschnitts kann die Viskosität der im Rohr befindlichen Flüssigkeit bestimmt werden. In diesem Kugelfallviskosimeter ergibt sich die Reibungskraft F_R als die Differenz zwischen der Gewichtskraft F_G und der Auftriebskraft F_A :

$$F_R = F_G - F_A \quad \Rightarrow \quad 6\pi\mu r v = \varrho_K V_K g - \varrho_{F1} V_{F1} g. \quad (10.49)$$

Mit dem Kugelvolumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ergibt sich für die Fallgeschwindigkeit

$$v = \frac{2gr^2(\varrho_K - \varrho_{F1})}{9\mu} \quad (10.50)$$

und für die Viskosität

$$\mu = \frac{2gr^2(\varrho_K - \varrho_{F1})}{9v}. \quad (10.51)$$

10.7.3 Umströmen von Körpern

Bei einer laminaren Strömung liegen die Geschwindigkeitsvektoren der Flüssigkeitsteilchen parallel. Bei einer turbulenten Strömung dagegen sind die Geschwindigkeitsvektoren hochgradig variabel: sie ändern sich mit dem Ort und der Zeit. Daher ist eine turbulente Strömung nicht stationär; als stationär kann sie angenähert, wenn die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit konstant ist.

Wirbelbildung

Wirbel bilden sich beim Ablösen von Flüssigkeitsschichten. Im reibungsfreien Fall ist die Strömung symmetrisch um die Kugel, d.h. die Stromlinien, die sich vor der Kugel teilen, treffen sich hinter ihr wieder. Im Punkt A trifft die Strömung direkt auf die Kugel. Hier verschwindet die Strömungsgeschwindigkeit, d.h. der statische Druck ist maximal. Entsprechendes gilt im reibungsfreien Fall am gegenüberliegenden Punkt C. In den Punkten B und D dagegen ist die Geschwindigkeit maximal und damit nach Bernoulli der statische Druck minimal. Durch diese Druckdifferenz würden die Flüssigkeitsteilchen im idealen Fall von A nach B bzw. D beschleunigt und durch die zunehmende Druckkraft von B bzw. D auf C zu wieder abgebremst, so dass die Geschwindigkeit im Punkt C wieder Null wäre. Unter der Wirkung von Reibungskräften kommen die Flüssigkeitsteilchen jedoch bereits vor Erreichen des Punktes C zur Ruhe. Die Reibungskraft mit der umgebenden Flüssigkeit wird sie dann zwingen, ihre Richtung zu ändern; die Flüssigkeitselemente werden hinter den Körper getragen. Dadurch gelangt keine Flüssigkeit zu Punkt C, so dass dort ein Unterdruck entsteht, der die mit der Strömung fortgerissenen langsamen Teilchen in Richtung auf den Körper zurückzieht. Auf diese Weise bildet sich ein Wirbel aus, der sich ablösen kann und mit der Strömung fortgetragen wird. Der Prozess beginnt von neuem, so dass sich hinter dem Hindernis eine Wirbelstraße bildet.

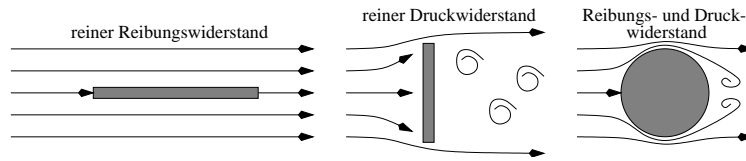


Abbildung 10.22: Widerstandskraft

Widerstandskraft

Die Widerstandskraft F_W , die auf den umströmten Körper wirkt, setzt sich aus zwei Anteilen zusammen:

- die *Reibungskraft*, wie sie sich z.B. längs einer überströmten Platte auftritt. Dies ist die auch bei laminarer Strömung wirkende Reibungskraft. Nach einer bestimmten Lauflänge entlang der Platte kann die Grenzschicht der Strömung turbulent werden. Der Umschlag zur Turbulenz hängt von der Form der Plattenvorderkante, aber auch von der Rauigkeit der Oberfläche ab. Treten Wirbel auf, so kann zusätzlich zum Reibungswiderstand auch ein Druckwiderstand auftreten.
- die *Druckwiderstandskraft*, Druckwiderstandskraft wie sie sich beispielsweise hinter einer quer angeströmten Platte bildet. In den Wirbeln auf der Plattenrückseite bewegen sich die Teilchen sehr schnell, was nach Bernoulli einen reduzierten Druck zur Folge hat. Damit ergibt sich eine Druckdifferenz von der Vorder- zur Rückseite der Platte und daraus eine Kraft auf die Platte, die Druckwiderstandskraft. Sie tritt auch bei Umlenkungen auf und ist proportional zum Staudruck und zur angeströmten Stirnfläche A , d.h. dem in Strömungsrichtung wirkenden Profil:

$$F_D = c_D \frac{1}{2} \rho v^2 A . \quad (10.52)$$

Darin ist c_D der *Druckwiderstandsbeiwert*.

Die gesamte Widerstandskraft ergibt sich als Summe aus Reibungskraft und Druckwiderstandskraft:

$$F_W = F_R + F_D = \frac{1}{2} c_W A v^2 . \quad (10.53)$$

Darin ist c_W der bereits bekannte *Widerstandsbeiwert*. Die Widerstandskraft nimmt proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit zu: bewegt sich ein Körper mit der doppelten Geschwindigkeit, so ist zur Aufrechterhaltung der Geschwindigkeit die vierfache Kraft aufzuwenden. Daher steigt der Benzinverbrauch eines Kfz mit der Geschwindigkeit: je schneller das Auto, um so größer die Reibungskraft und damit die zur Überwindung der Reibung aufzuwendende Antriebskraft.

Die Leistung, die gegen eine turbulente Strömung aufgebracht werden muss, ergibt sich wegen $P = Fv$ zu

$$P = c_w \frac{1}{2} \rho A v^3 . \quad (10.54)$$

Die Strömungsleistung nimmt mit der dritten Potenz der Geschwindigkeit zu, d.h. eine Verdopplung der Geschwindigkeit entspricht einer Verachtfachung der Leistung. Das ist bereits vom Windenergiekonverter bekannt. In diesem Fall bedeutet es jedoch, dass bei Verdopplung der Fahrzeuggeschwindigkeit die achtfache Leistung zum Überwinden der Reibung aufgebracht werden muss.

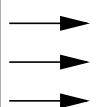







	Platte	c_w 1.1-1.3
	langer Zylinder	0.35-1.2
	Kugel	0.18-0.45
	Halbkugel	mit Boden 0.4 ohne Boden 0.34
	Halbkugel	mit Boden 1.2 ohne Boden 1.3
	Kegel mit Halbkugel	0.16-0.2
	Halbkugel mit Kegel	0.07-0.09
	Stromlinienkörper	0.055

Abbildung 10.23: Widerstandsbeiwerte

Widerstandsbeiwert

Der Widerstandsbeiwert ist eine dimensionslose Proportionalitätskonstante, die man im Windkanal misst. Er ist nur bei Vernachlässigung der Reibungskraft, d.h. bei hohen Anströmgeschwindigkeiten, konstant und ist dann *Widerstandsbeiwert* durch die Geometrie des Körpers bestimmt und nicht durch die Viskosität der umströmenden Flüssigkeit (letztere ginge in die Reibungskraft ein). Abbildung 10.23 gibt die Widerstandsbeiwerte für einige typische Geometrien. Der *Stromlinienkörper* ist der Körper mit dem geringsten bekannten Widerstandsbeiwert von 0.055. Dieser Körper hat die Besonderheit, dass der Druckabfall längs der Form so langsam stattfindet, dass keine Wirbel auftreten können. Für Kraftfahrzeuge wäre dies zwar aerodynamisch die ideale Form, würde jedoch zu langen Heckteilen führen. Um sie zu verkürzen und trotzdem günstige c_w Werte zu erreichen, wird das Strömungsprofil nur schwach verjüngt und durch eine Abrisskante begrenzt. Die störende Reibungswirkung von Wirbeln kann auch dadurch gemindert werden, dass die Wirbel durch Schlitze an der Oberfläche abgesaugt werden.

Gedellte Golfbälle, Haie und geriffelte Flugzeuge

Da die Wirbelbildung hinter dem umströmten Objekt entscheidend in den Widerstandsbeiwert c_w eingeht, kann es die scheinbar paradoxe Situation geben, dass eine etwas rauere Oberfläche zu einem geringeren c_w -Wert führt. Entdeckt wurde dieser Effekt zufällig Ende des 19. Jahrhunderts: ein benutzter und von den Schlägen eingedellter Golfball fliegt weiter als ein frischer, glatter Golfball! Dellen. Als Konsequenz haben Golfbälle heute ein Muster von 366 symmetrisch angeordneten Dellen. Durch diese Dellen löst sich der Luftstrom erst wesentlich später vom Ball und der hinter dem Golfball entstehende Wirbel wird kleiner. Dadurch ist der Druckwiderstand und auch der Gesamtwiderstand geringer, obwohl der Reibungswiderstand größer ist.

Auch die Natur macht sich bei aerodynamischen Profilen ähnliche Effekte zu Nutze. So

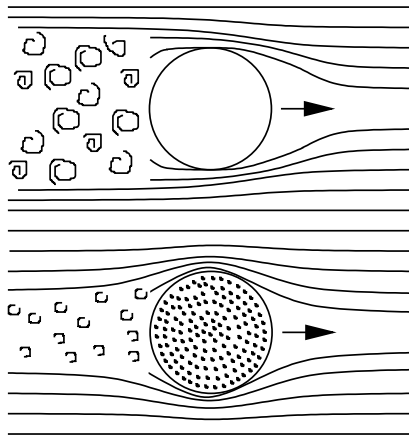


Abbildung 10.24: Wirbelbildung hinter glattem und eingedelltem Golfball

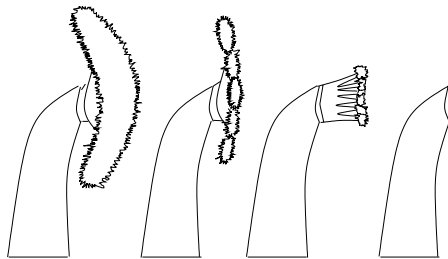


Abbildung 10.25: Die Seeanemone passt sich der Strömungsgeschwindigkeit an, der Widerstandsbeiwert ändert sich mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit von 0.9 über 0.4 und 0.2 auf 0.2

ist die Haut eines Hais etwas rau, was ihm eine deutlich höhere Geschwindigkeit verleiht als einem entsprechenden Strömungskörper mit glatter Oberfläche. Auch die Delphinhaut ist rau, allerdings verändert der Delphin seinen Widerstandsbeiwert zusätzlich durch geringfügige Verformungen der Haut, wodurch eine bessere Anpassung an das Strömungsprofil erreicht wird.

Auch in technischen Anwendungen wird dieses Verfahren kopiert. So wird auf den Airbus 340–300 eine raue Folie (Haischuppenüberzug) aufgebracht, die den Widerstandsbeiwert um 4 % senkt. Wirtschaftlich ergibt sich sogar ein Gewinn von 8 % aus den gesparten Treibstoffkosten und den aufgrund des geringeren Startgewichts zusätzlich mitgenommenen Passagieren. Auch bei Rennyachten werden raue Rumpfoberflächen zur Erreichung höherer Geschwindigkeiten verwendet.

Anpassungsfähigkeit

Wir haben den Widerstandsbeiwert bisher als verzögernde Kraft auf eine Bewegung interpretiert: ein Auto wird um so stärker abgebremst, je höher der c_W -Wert ist. Eine andere Situation stellt sich für einen Gegenstand in einer Strömung: auch hier ergibt sich eine Widerstandskraft. Allerdings ist ihre Folge keine Verzögerung sondern eine Belastung der Struktur (Bruch oder Ablösen vom Boden). Pflanzen versuchen daher, ihre der Strömung ausgesetzte Stirnfläche zu verringern; entweder, in dem sie sich, wie eine Wetterfahne, in die Strömung drehen, oder in dem sie ihre Form und damit den Widerstandsbeiwert verringern. Die Seeanemone hat folgende Anpassungsstrategie entwickelt: bei geringen Strömungsgeschwindigkeiten ist sie voll entfaltet, so dass dem Wasser eine große Menge Nährstoffe entnommen werden kann. Dann ist aufgrund der geringen Wassergeschwindigkeit die Widerstandskraft trotz des hohen

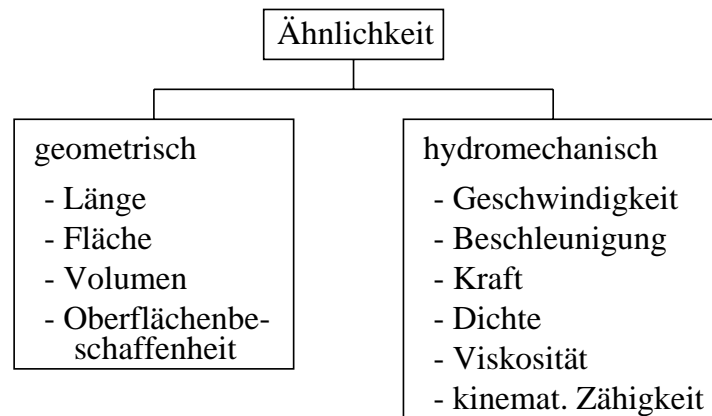


Abbildung 10.26: Geometrische und hydromechanische Ähnlichkeit

c_W Wertes gering. Mit zunehmender Wassergeschwindigkeit verkleinert die Seeanemone ihre Fläche und damit den c_W Wert um die Widerstandskraft, d.h. ihre strukturelle Belastung, konstant oder zumindest unter einem kritischen Wert zu halten. Die Widerstandsbeiwerte in der Zeichnung sind, von links nach rechts, 0,9, 0,4, 0,3 und 0,2.

Auch Blätter von Bäumen passen sich dem Wind an, damit ein belaubter Baum überhaupt eine Chance hat, einen Sturm zu überstehen. Tulpenbaumblätter falten zuerst die breiten Lappen am Steil zusammen und rollen sich dann der Länge nach bis sie sehr dünne, feste Zylinder bilden, die dem Wind kaum noch Angriffsfläche bieten. Auch die Scheinakazie rollt ihre Blätter ein, während andere Pflanzen, wie z.B. die Stechpalme, ihre Blätter flach aufeinander drücken und so einen dünne Blätterstapel bilden.

10.7.4 Ähnlichkeitsgesetze und dimensionslose Größen

Um strömungsmechanische Vorgänge im Labor zu studieren, werden Skalierungen vorgenommen, d.h. es werden Modelle im verkleinerten Maßstab gebaut. Um übertragbare Aussagen zu erhalten, muss das Modell dem Original ähnlich sein. Geometrische Ähnlichkeit lässt sich leicht erreichen: Modell und Original müssen in ihren geometrischen Abmessungen (Längen, Flächen, Volumen, Oberflächenrauigkeit) proportional sein. Schwieriger lässt sich die hydromechanische Ähnlichkeit realisieren. Hier müssen Proportionalitäten zwischen Original und Modell für Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Dichte, Viskosität und kinematische Zähigkeit erreicht werden. Hydromechanische Ähnlichkeit ist gegeben, wenn die Reynoldszahl von Modell und Original übereinstimmen.

Reynoldszahl

Auf die strömenden Teilchen wirken als äußere Kräfte Druckkräfte \vec{F}_P , Reibungskräfte \vec{F}_R und die Trägheitskraft $\vec{F}_t = m\vec{a}$. Bei hydromechanischer Ähnlichkeit muss an jeder Stelle der Strömung das Verhältnis dieser drei Kräfte zwischen Original und Modell gleich sein:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{P,1} &= \alpha \vec{F}_{P,2} \\ \vec{F}_{R,1} &= \alpha \vec{F}_{R,2} \\ \vec{F}_{t,1} &= \alpha \vec{F}_{t,2}\end{aligned}\tag{10.55}$$

Da die Summe über alle drei Kräfte Null ist, ist es hinreichend, die Ähnlichkeitsbetrachtung für nur zwei Kräfte anzustellen, z.B. für die Reibungskraft und die Trägheitskraft. Für die Reibungskraft galt $F_R = \mu A dv/dx$. Betrachtet man nur die Dimensionen, so gilt

$$[F_R] = [\mu][L]^2 \frac{[v]}{[L]} = [\mu][L][v] .\tag{10.56}$$

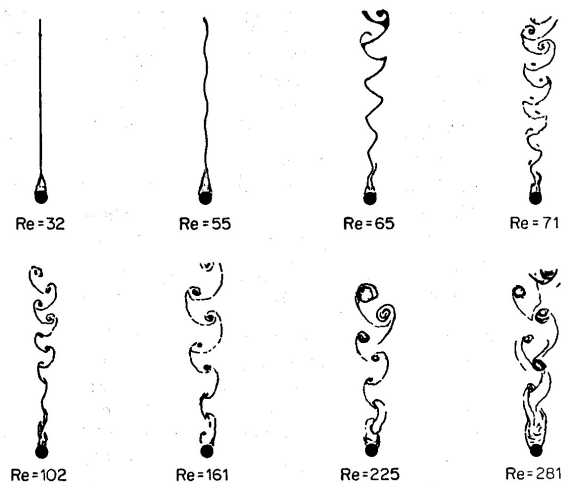


Abbildung 10.27: Veränderung des Strömungsmusters hinter einem Körper in Abhängigkeit von der Reynoldszahl [51]

Die Trägheitskraft ist $F_t = ma = \rho Va$; ihre Dimensionen sind

$$[F_t] = [\rho][L]^3[a] = [\rho][L]^2[v]^2. \quad (10.57)$$

Verwenden wir (10.55), so ergibt sich als Dimensionsbetrachtung

$$\frac{F_{R_1}}{F_{R_2}} = \frac{F_{t_1}}{F_{t_2}} = \frac{[\mu_1][L_1][v_1]}{[\mu_2][L_2][v_2]} = \frac{[\rho_1][L_1]^2[v_1]^2}{[\rho_2][L_2]^2[v_2]^2} \quad (10.58)$$

und damit

$$\frac{[\rho_1][L_1][v_1]}{[\mu_1]} = \frac{[\rho_2][L_2][v_2]}{[\mu_2]}. \quad (10.59)$$

Verwenden wir die kinematische Zähigkeit $\nu = \mu/\rho$, so lässt sich die Bedingung für *strömungsmechanische Ähnlichkeit* auch schreiben als

$$\frac{L_1 v_1}{\nu_1} = \frac{L_2 v_2}{\nu_2} = \frac{Lv}{\nu} = Re. \quad (10.60)$$

Darin ist v die Strömungsgeschwindigkeit und L eine charakteristische Länge. Diese wird durch den Versuchsaufbau bestimmt, für den die *Reynoldszahl* Re benötigt wird. Beispiele wären ein Rohr- oder Kugeldurchmesser oder die Länge einer Platte. Die in Gleichung 10.60 bestimmte dimensionslose Größe ist die Reynoldszahl. Sie ist von der Temperatur und vom Druck abhängig, da die kinematische Viskosität von diesen beiden Größen abhängt.

Da die Reynoldszahl ein Maß für das Verhältnis aus Trägheits- und Reibungskraft ist, kann sie auch als ein Kriterium für den Zustand der Strömung verwendet werden. Bei einer laminaren Strömung gilt $Re < Re_{\text{krit}}$, d.h. die Reynoldszahl ist kleiner als eine kritische Reynoldszahl. Ist die Strömung turbulent, so ist $Re > Re_{\text{krit}}$. Der Übergang zwischen den beiden Zuständen erfolgt in der Nähe der kritischen Reynoldszahl. Allerdings ist der Übergang nicht sprunghaft, d.h. die Reynoldszahl gibt nur einen Hinweis, ob eine Strömung eher laminar oder eher turbulent ist. Abbildung 10.27 zeigt das Strömungsmuster um einen langen Zylinder in Abhängigkeit von der Reynoldszahl; der Zylinder wird von unten angeströmt.

Die Bereiche typischer Reynoldszahlen für verschiedene natürliche und insbesondere auch biologische Objekte sind in Abb. 10.28 gegeben; zum Vergleich ist der Bereich von Reynoldszahlen für typische Flugobjekte angegeben. Die Reynoldszahlen umfassen einen Bereich von 10 Größenordnungen. Je größer und massiver die Objekte sind, um so größer wird die

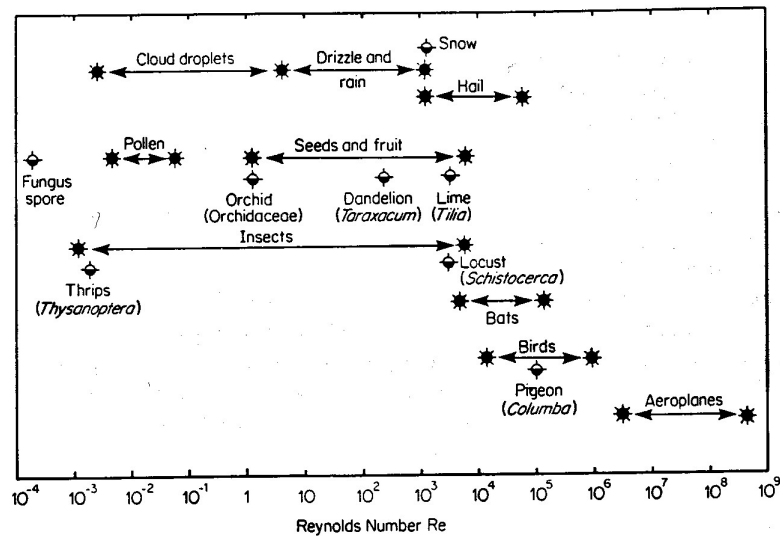


Abbildung 10.28: Bereiche kritischer Reynoldszahlen für verschiedene biologische Objekte [51]

Reynoldszahl, d.h. um so turbulenter ist die Strömung; während die Strömung um Wolkenröpfchen eher laminar ist, bilden sich um Regentropfen bereits die ersten Turbulenzen während sich um die massiveren Hagelkörner eine turbulente Strömung ausbildet. Ähnliches sehen wir bei den Pflanzen: die Strömung um Pollen und Sporen ist laminar während die um Samen und Früchte eher turbulent wird. Darin spiegelt sich die Beeinflussung der Strömung durch die Objekte wieder: eine Spore hat nicht die nötige Energiedichte, um die Strömung um sich herum zu beeinflussen. Ein Vogel (oder ein Flugzeug) dagegen hat eine wesentlich größere Energiedichte als die umgebende Strömung, bewirkt deren Ablenkung und damit den Übergang von einer laminaren zu einer turbulenten Strömung.

Froudezahl

Spielt die Gravitationskraft für Original und Modell eine wichtige Rolle, z.B. bei hydraulischer oder pneumatischer Förderung, bei Wasserkraftanlagen oder bei der Widerstandsermittlung von Oberflächenwellen für Schiffskörper, so wird als Ähnlichkeitszahl die Froudezahl verwendet. Hier wird die Ähnlichkeit von Trägheitskraft und Schwerkraft gefordert. Ähnlich der Reynoldszahl ergibt sich die *Froudezahl* zu

$$Fr = \frac{v}{\sqrt{Lg}} \quad (10.61)$$

Bei Strömungsuntersuchungen für Schiffsmodelle im Schleppkanal müssten idealerweise der Widerstand durch die Oberflächenwellen (Froudezahl) und der Reibungswiderstand (Reynoldszahl) bei der Skalierung berücksichtigt werden. Allerdings haben beide Konstanten unterschiedliche Abhängigkeiten von der Länge L des umströmten Objekts: $Re \sim L$ und $Fr \sim 1/\sqrt{L}$. In der Praxis wird bei Schiffen hauptsächlich auf die Gleichheit der Froudezahl geachtet, weil der Einfluss der Oberflächenwellen größer ist als der der Reibungskraft; so wie beim Widerstandsbeiwert bei großen Geschwindigkeiten nicht die Reibungskraft sondern die Druckwiderstandskraft bestimmend ist.

10.8 Anmerkung zum Vogelflug

Wir haben in Abschn. 10.5.2 bereits über die Anwendung der Bernoulli-Gleichung (bzw. des hydrodynamischen Paradoxons) auf das Fliegen gesprochen. Dort wurde ein starrer Flügel wie

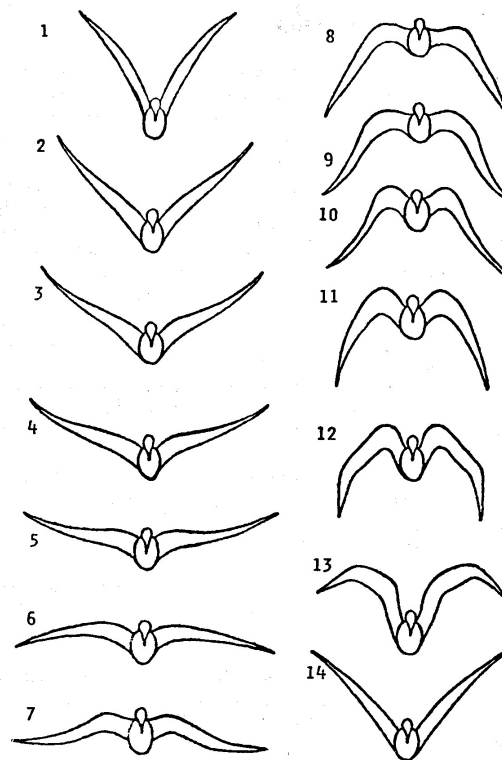


Abbildung 10.29: Flügelschlag einer Möwe [51]

beim Flugzeug oder Windenergiekonverter betrachtet. Auf biologische Objekte angewandt lässt sich damit am ehesten der Gleitflug beschreiben, der allerdings bei einigen der größeren Vögel eine entscheidende Rolle für die Bewegung spielt.

Vogelflug ist jedoch auch mit dem Flügelschlagen verbunden. Diese Bewegung unterscheidet sich vom Gleitflug. Zwar sind wieder die Gravitationskraft und eine irgendwie gestaltete, entgegen gesetzt gerichtete Auftriebskraft zu vergleichen, jedoch ist in diesem Fall die Auftriebskraft nicht zeitlich konstant sondern verändert sich im Laufe des Flügelschlags. Der hydrodynamische Auftrieb ergibt sich aus den unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten ober- und unterhalb des Flügels, d.h. wir betrachten die Bewegung der Luft parallel zur Flügelfläche. Beim Flügelschlag dagegen erfolgt die entscheidende Bewegung senkrecht zur Flügelfläche: dieser wird durch die Luft auf und ab gesenkt. Dabei erfährt der Flügel einen der Bewegung entgegengesetzte Widerstandskraft, die den Flügel (und damit den Vogel) beim Abwärtsschlag nach oben treibt, beim Aufwärtsschlag dagegen nach unten. Wenn beide Widerstandskräfte gleich wären, würde der Vogel daraus keinen Auftrieb erfahren. Da in die Widerstandskraft nach (10.53) die Flügelfläche A eingeht, erzeugt der Vogel beim Abwärtsschlag mit voll ausgebreiteter Schwinge eine größere nach oben gerichtete Kraft als er beim Aufwärtsschlag mit gebeugter Schwinge erfährt. Dies ist in Abb. 10.29 für die Flügelbewegung einer Möwe angedeutet.

10.9 Aufgaben

10.9.1 Fragen

1. Erläutern Sie den Begriff der relativgeschwindigkeit.
2. Was versteht man unter einer stationären Strömung?

3. Wozu werden Stromlinien verwendet? Was ist ihre physikalische Bedeutung?
4. Was ist eine laminare Strömung?
5. Was versteht man unter einer Flussröhre?
6. Was versteht man unter der non-slip Bedingung?
7. Nennen Sie Beispiele, in denen Sie die non-slip Bedingung beobachten können.
8. Warum können sich auch in starken Strömungen an den Gefäßwänden oder an anderen Hindernissen Ablagerungen bilden?
9. Sie sind in einen Schwarm Killerbienen geraten. Killerbienen können mit einer Geschwindigkeit von 7.5 m/s (gegenüber dem Wind) fliegen. Der Wind weht mit 4.5 m/s. Ist es besser, mit dem Wind oder gegen den Wind zu laufen? Was machen Sie, wenn sich die Killerbienen noch im Bereich gegen den Wind befinden aber in ihre Richtung fliegen: laufen Sie auf den Schwarm zu oder von ihm weg?
10. Werden einem mit dem Wind fliegenden Vogel die Schwanzfedern durcheinander ge- weht?
11. Warum kann ein Vogel (z.B. eine Möve) in starkem Wind über einem festen Punkt schweben ohne herunterzufallen?
12. Ein Heißluftballon fährt in Höhen von wenigen hundert Metern, d.h. in einem Bereich, in dem die Windgeschwindigkeiten größer sind als am Boden. Wie schützen Sie sich als Passagier vor dem Wind?
13. Touren mit dem Heißluftballon werden in der Regel nur bei geringem Wind unternom- men. Warum?
14. Welche fundamentale Gleichung der Hydrodynamik folgt aus der Massenerhaltung?
15. Welche fundamentale Gleichung der Hydrodynamik folgt aus der Energieerhaltung?
16. Auf welchem Grundkonzept der Physik basiert die Kontinuitätsgleichung?
17. Auf welchem Grundkonzept der Physik basiert die Bernoulli-Gleichung?
18. Warum strömt das Wasser unter einer Brücke schneller?
19. Wenn man die Ausstoßgeschwindigkeit des Bluts am menschlichen Herzen betrachtet und mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung die Strömungsgeschwindigkeit in eine Kapillare berechnet, ergibt sich eine Überschallströmung. Wenn unser Blut so schnell wird, warum hören wir dann keinen Überschallknall?
20. Warum ist die Windgeschwindigkeit auf einem Berg so hoch (auch höher, als in der freien Atmosphäre drum herum)?
21. Was versteht man unter hydrodynamischem Auftrieb?
22. Wie hängen hydrodynamischer Auftrieb und hydrostatischer Auftrieb zusammen? Wo- durch entstehen die beiden?
23. Erläutern und vergleichen Sie die folgenden physikalischen Größen: Staudruck, dyna- mischer Druck, Strömungsdruck, statischer Druck.
24. Ein Wasserbehälter hat in seiner Seitenwand ein kleines Löchlein. Wie bewegt sich das austretende Wasser? Begründen Sie.

25. Warum verringert sich der Querschnitt des Wasserstrahls mit zunehmendem Abstand vom Wasserhahn? Entwickeln Sie ein Verfahren, wie Sie aus dem in zwei verschiedenen Abständen vom Wasserhahn gemessenen Durchmesser die Ausflussgeschwindigkeit am Wasserhahn bestimmen können.
26. Können Sie die Bernoulli-Gleichung verwenden, um die Strömung in den Stromschnellen eines Gebirgsflusses zu beschreiben? Begründen Sie.
27. Erklären Sie die Funktionsweise von Düsen am Beispiel der Reichweite des Wasserstrahls bei einem Gartenschlauch mit und ohne aufgesetzte Düse und am Beispiel des Rakentriebwerks.
28. Auf einem aufwärts gerichteten Luftstrom (oder Wasserstrahl) kann ein leichter Ball tanzen. Er lässt sich auch durch einen Schlag oder sehr schräg gerichteten Luftstrom nicht von diesem trennen. Warum?
29. Zwei nahe beieinander liegende Schiffe haben die Tendenz, zusammenzutreiben. Ähnlich treibt ein Schiff gegen die Kaimauer. Gilt das auch für zwei Boote, die einen Fluss hinunter treiben? Wenn ein LKW Ihr Wohnwagengespann überholt, wird dieses kräftig nach links gezogen. Warum?
30. Verneigendes Schilf: Wenn Sie mit dem Boot einen relativ engen schilfbestandenen Fluss entlang fahren, wie bewegen sich die Halme?
31. Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit ein Gegenstand fliegen kann?
32. Warum werden Dächer bei Sturm auf der dem Wind abgewandten Seite abgedeckt?
33. Erklären Sie die Kräftebilanz am Flügel eines Vogels.
34. Hydrodynamischer Auftrieb an einer Tragfläche entsteht durch deren Form und die damit verbundenen unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten ober- und unterhalb der Tragfläche. Kann hydrodynamischer Auftrieb auch auf einen symmetrischen Körper (z.B. eine Kugel oder einen Zylinder) wirken?
35. Erläutern Sie das Flugverhalten eines Frisbees.
36. Warum wird ein Golfball beim Anschlag in Rotation versetzt?
37. Ein Blatt fällt nicht senkrecht vom Baum, gleitet auch nicht auf einer schiefen Ebene wie ein Segelflugzeug sondern pendelt mehrmals beim Fallen hin und her. Warum? Probieren Sie mit Papier- und Kartonblättern verschiedener Größe und Stärke. Wie hängen Pendelamplitude und -periode von den Blatteigenschaften und dem Anfangs-Anstellwinkel ab? Verhalten sich Samen von Ahorn, Linde und Ulme anders? Wenn ja, warum?
38. Warum flattern Fahnen im Wind auch dann, wenn er ganz gleichmäßig weht? Was bestimmt die Frequenz des Flatterns?
39. Wenn ein Hubschrauber eine völlig starre Luftschraube hätte, könnte er zwar stabil auf der Stelle schweben, würde aber beim Vorwärtsflug sofort zu einer Seite kippen. Warum? Wie vermeidet man dieses Umkippen?
40. Kurvenflug eines Vogels: Ein Vogel legt sich beim Kurvenflug in die Kurve. Warum? Welche Richtung hat die Auftriebskraft? Hilft diese, die Kurve zu fliegen?
41. Wenn Sie einen leichten Löffel mit der runden Seite an einen Wasserstrahl halten, scheint er wie am Wasserstrahl angeklebt zu sein. Sie können den Löffel loslassen, Sie können ihn schräg halten – er wird sich weigern, den Strahl zu verlassen! Man sollte meinen, das herausfließende Wasser würde den Löffel wegschieben, nicht festhalten. Was ist die Ursache?

42. Was unterscheidet reale und ideale Flüssigkeiten?
43. Gilt die Bernoulli-Gleichung in realen oder idealen Flüssigkeiten oder in beiden?
44. Welche Annahmen gehen in das Newton'sche Reibungsgesetz ein?
45. Welche physikalischen Prozesse gehen in den Reibungskoeffizienten in Flüssigkeiten ein?
46. Erklären Sie die Wirbelbildung beim Umströmen eines Hindernis.
47. Welche Größen gehen in den Widerstandsbeiwert ein?
48. Was sind die Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Reibungskraft und Druckwiderstandskraft?
49. Von welchen Größen hängt der Widerstandsbeiwert ab?
50. Warum sind Golfbälle eingedellt?
51. Was sind die Unterschiede und was die Gemeinsamkeiten von mechanischer und hydrodynamischer Ähnlichkeit?
52. Warum werden Ähnlichkeitsgesetze eingeführt?
53. Nennen Sie Beispiele für Ähnlichkeitszahlen.
54. Welche Terme der Bewegungsgleichung gehen in die Definition der Reynoldszahl ein?
55. Welche Terme der Bewegungsgleichung gehen in die Definition der Froudezahl ein?
56. Unter welchen Bedingungen kann die Reynoldszahl zur Skalierung eines Problems verwendet werden, unter welchen die Froudezahl?

10.9.2 Aufgaben

1. Eine große Arterie in einem Hund hat einen inneren Radius von 0.4 cm. Blut fließt durch diese Arterie mit einer Rate von $1 \text{ cm}^3/\text{s}$. (a) Bestimmen Sie die mittlere und die maximale Geschwindigkeit des Bluts. (b) Bestimmen Sie das Druckgefälle über ein 10 cm langes Stück der Arterie. (c) Welche Leistung ist erforderlich, um den Blutstrom in diesem Segment aufrecht zu erhalten?
2. Blut fließt mit einer Geschwindigkeit von 30 cm/s durch eine Aorta mit Radius 1.0 cm. Wie groß ist der Volumenstrom (Durchflussmenge)?
3. Ein Fluss hat eine Breite von 25 m und eine Tiefe von 4 m. Die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers beträgt 2 m/s. Berechnen Sie den Volumenstrom. Wie verändern sich Volumenstrom und Strömungsgeschwindigkeit, wenn der Fluss unter eine Brücke auf eine Breite von 18 m reduziert wird?
4. Ein Fluss hat eine Breite von 125 m und eine Tiefe von 5 m. Im Mündungsbereich weitet er sich auf eine Weite von 275 m auf. Wie verändern sich Volumenstrom und Strömungsgeschwindigkeit?
5. Blut fließt in einer Arterie mit Radius 0.3 cm und Strömungsgeschwindigkeit 10 cm/s. Durch Arteriosklerose verringert sich der Radius auf 0.2 cm. Wie groß ist hier die Strömungsgeschwindigkeit?
6. In einem Warmwasserrohr verringert sich infolge von Kalkablagerungen der Rohrdurchmesser um 20 %. Berechnet werden soll die prozentuale Änderung des Massenstroms \dot{m} .

7. Ein Blutgefäß mit Radius r spaltet sich in 4 Gefäße jeweils mit Radius $r/3$ auf. Die Strömungsgeschwindigkeit des Bluts im großen Gefäß ist v . Wie groß ist die Strömungsgeschwindigkeit in den kleinen Gefäßen?
8. Eine Wasserleitung (Querschnitt $A_1 = 100 \text{ cm}^2$) weist eine Einschnürung (Querschnitt $A_2 = 20 \text{ cm}^2$) auf. Der Druck ist an der Verengung $0.51 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ niedriger als davor. Mit welcher Geschwindigkeit strömt das Wasser durch die Leitung?
9. In einem Chemikalentank, der bis zur Höhe $h = 25 \text{ m}$ mit einer ätzenden Flüssigkeit der Dichte $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ gefüllt ist, strömt aus einem kleinen Leck in einer Höhe $h_1 = 24.5 \text{ m}$ Flüssigkeit aus und trifft im Abstand x_1 auf den Boden. Sie haben Ihren Werkschutz so positioniert, dass die Leute die Flüssigkeit sofort durch Aufschaufeln eines Bindemittels neutralisieren können. Begründen Sie, warum die Flüssigkeit bei x_1 auf den Boden trifft und nicht einfach am Behälter herunter rinnt. Bestimmen Sie x_1 . Da bildet sich in einer Höhe von $h_2 = 2 \text{ m}$ über dem Boden ein zweites Leck. Müssen Sie die Werkschutzleute jetzt weiter zurück ziehen, dichter an den Tank schicken oder an ihrer momentanen Position lassen?
10. Ein zylindrisches Gefäß hat in den Höhen $h_1 = 10 \text{ m}$ und $h_2 = 5 \text{ m}$ übereinander liegende Öffnungen. In welcher Höhe H über dem Gefäßboden muss sein Flüssigkeitsspiegel liegen, damit die ausströmende Flüssigkeit aus beiden Öffnungen gleich weit auf die Waagerechte in der Höhe des Gefäßbodens auftrifft?
11. Der (statische) Luftdruck am Boden beträgt 1000 hPa , die Dichte von Luft beträgt 1.28 kg/m^3 . Bestimmen Sie die Änderung des statischen Drucks für Windgeschwindigkeiten von 10 m/s , 20 m/s , 30 m/s und 40 m/s . Geben Sie die Druckänderung in absoluten Zahlen und in relativen Größen an.
12. Berechnen Sie die Auftriebskraft, die eine Dachfläche von 25 m^2 erfährt, wenn in einem Orkan Wind mit einer Geschwindigkeit von 180 km/h über das Dach strömt (Dichte der Luft 1.28 kg/m^3).
13. Ein Sanddollar (Masse $m = 25 \text{ g}$, Querschnittsfläche $A = 25 \text{ cm}^2$) liegt auf dem Meeresboden. Mit der Tide strömt Wasser mit einer Geschwindigkeit von 1 m/s über den Sanddollar. Wieviel Sand muss dieser aufnehmen, um am Boden haften zu bleiben?
14. Eine Platte mit einer Oberfläche von 2 m^2 und einer Dicke von 1 cm liegt flach auf dem Boden bei einer Windgeschwindigkeit von 30 m/s (Dichte der Luft 1.28 kg/m^3). Welche Dichte muss das Material der Platte mindestens haben, damit diese nicht vom Wind angehoben wird?
15. Hydrodynamischer Auftrieb: Eine Möwe der Masse $m = 500 \text{ g}$ schwebt bei starkem Wind senkrecht über der Spitze eines Leuchtturms. Rumpf und Schwingen der Möwe haben eine Fläche A von 0.1 m^2 . Die Schwingen der Möwe sind so gestellt, dass die Geschwindigkeit v_1 der Luft oberhalb der Schwinge das 1.5 fache der Geschwindigkeit v der anströmenden Luft beträgt; die Geschwindigkeit v_2 unterhalb der Schwinge beträgt nur $2/3$ von v . (Dichte Luft: 1.293 kg/m^3) (a) Fertigen Sie eine Skizze an (keine ganze Möwe, es reicht die Darstellung einer Schwinge bzw. deren Querschnitt), aus der die auf die Möwe wirkenden Kräfte ersichtlich sind, ebenso wie die Strömungsgeschwindigkeiten. (b) Stellen Sie die Bilanz der auf die Möwe wirkenden Kräfte auf (Gleichung). (c) Bestimmen Sie die Windgeschwindigkeit. (Denken Sie daran, die Luft muss relativ zur Möwe bewegt sein, d.h. es ist egal, ob die Möwe sich bei Windstille vorwärts bewegt oder sich die Luft bewegt!)
16. Wie groß ist das Verhältnis der maximalen Leistungen zweier Windenergiekonverter (ein Widerstandsläufer und ein aerodynamischer Windrotor) unter folgenden Bedingungen: (a) identische dem Wind ausgesetzte Fläche A , (b) optimales Geschwindigkeitsverhältnis von $1/3$, (c) Widerstandsbeiwert von 2 für den Widerstandsläufer, und

- (d) eine Windgeschwindigkeit von 2 m/s im Falle des Widerstandsläufers und eine von 5 m/s im Falle des aerodynamischen Windrotors? Wie groß müsste die Fläche des Widerstandsläufers gewählt werden, um die gleiche Leistung wie beim aerodynamischen Rotor zu erhalten
17. Die Nennleistung eines WEK beträgt 820 kW (bei einer Windgeschwindigkeit von 9 m/s). Über das Jahr verteilt sich die Windgeschwindigkeit wie folgt: ≤ 3 m/s an 2190 h, 4 m/s an 2628 h, 5 m/s an 1314 h, 6 m/s an 876 h, 7 m/s an 701 h, 8 m/s an 350 h, und ≥ 9 m/s an 701 h. Bei Windgeschwindigkeiten ≤ 3 m/s ist der Auftrieb zu gering und die Anlage steht. Bei Windgeschwindigkeiten von 9 m/s wird die Nennleistung erreicht, bei höheren Geschwindigkeiten wird der Anstellwinkel so verändert, dass der Auftrieb geringer und damit ebenfalls nur die Nennleistung erreicht wird (Schutz der elektrischen Anlage). Wie groß ist die im Laufe des Jahres gewonnene Energie, wie groß die über das Jahr gemittelte Leistung?
 18. Ein Ball mit einer Masse von 20 g und einem Radius von 3 cm rotiert mit einer Frequenz von 1000 Hz. Welche Geschwindigkeit muss die anströmende Luft haben, um den Ball genau in der Schwebelage zu halten?
 19. Ein Ball mit einer Masse von 5 g und einem Radius von 5 cm rotiert in einer Höhe von 3 m in einem Luftstrom mit einer Geschwindigkeit von 25 m/s mit einer Frequenz von 250 Hz. Bestimmen Sie die auf den Ball wirkenden Kräfte und die sich daraus ergebende Bewegung. Wo befindet sich der Ball 20 s später?
 20. Ein Ahornsamen mit einer Masse von 0.2 g und einer Fläche von 3 cm² rotiert mit einer Frequenz von 5 Hz. Der Ahornsamen fällt von einem 10 m hohen Baum. Bestimmen Sie die Zeit, die er zum Fall benötigt wenn er rotiert. Vergleichen Sie mit der Fallzeit für den Fall, dass der Samen nicht rotiert. Wie weit wird der Ahornsamen in den beiden Fällen von einem 20 m/s schnellen Wind versetzt?
 21. Wie schnell muss sich eine 10 g schwere Kugel von 2 cm Durchmesser drehen, um in einem Luftstrom mit $v = 1$ m/s gegen die Schwerkraft in der Schwebelage gehalten zu werden? (Dichte Luft: 1.293 kg/m³)
 22. Eine Schwalbe fliegt einen horizontalen Kreisbogen von Radius 15 m mit einer Geschwindigkeit von 18 m/s. (a) Wie groß ist die auf die Schwalbe wirkende Beschleunigung? (b) Unter welchem Winkel legt sie sich in die Kurve?
 23. Wie stark erhöht sich die Widerstandskraft eines Autos bei Erhöhung der Geschwindigkeit um 40 km/h bei einer ursprünglichen Geschwindigkeit von (a) 40 km/h und (b) 90 km/h? Wie verändert sich die zur Überwindung der Widerstandskraft aufzuwendende Leistung? Welche der beiden Größen ist für den Spritverbrauch des Autos entscheidend? Beantworten Sie die Frage für (a) eine 1 Stunde dauernde Autofahrt und (b) eine Autofahrt über eine Strecke von 100 km.
 24. Flettner-Rotor: der ursprüngliche Flettner-Rotor besteht aus zwei Zylindern mit Durchmesser von 2.8 m und Höhen von 18.3 m. Diese haben Drehzahlen von 700 min⁻¹. Welchen hydrodynamischen Auftrieb erreichen Sie mit diesen Rotoren bei Windgeschwindigkeiten von 5 m/s bzw. 25 m/s. Welchen Antrieb würden Sie alleine durch den Druck erreichen, den der entsprechende Wind auf Flächen dieser Größe ausüben würde?
 25. Eine Seeanemone wie in der Abb. 10.25 fühlt sich voll entfaltet bis zu Strömungsgeschwindigkeiten von 10 cm/s wohl, ab 50 cm/s wäre sie durch die Strömung gefährdet. Welche Strömungsgeschwindigkeit kann die eingezogene Seeanemone verkraften (Widerstandsbeiwerte in Abb. 10.25 sind 0.9, 0.4, 0.3 und 0.2)?

26. Das Modell eines PKW wird im Maßstab 1:10 im Windkanal erprobt. Berechnet werden soll die Anblasgeschwindigkeit v_2 , wenn die Strömungsverhältnisse des Fahrzeugs bei einer Fahrtgeschwindigkeit $v_1 = 120$ km/h untersucht werden sollen. Es sei $\nu_1 = \nu_2$.
27. Das Modell eines Schiffes im Maßstab 1:15 wird im Schleppkanal untersucht. Berechnet werden soll die Geschwindigkeit im Schleppkanal v_2 für eine Fahrtgeschwindigkeit des Schiffes von 20 km/h bei (a) gleicher Reynoldszahl und (b) gleicher Froudezahl.
28. Neu im Angebot, ein Windrotor für den kleinen Raum- und Energiebedarf. Im Maßstab 1:3 skalierte Version des sehr effizienten xyz-Rotors, des einzigen aerodynamischen Rotors, der schon ab Windgeschwindigkeiten von 3 m/s hervorragende Laufeigenschaften hat (der normale aerodynamische WEK fängt bei 4 m/s, also Windstärke 3, an). Windgeschwindigkeiten oberhalb 3 m/s haben wir bei uns recht häufig, also kaufen oder nicht?
29. Die Aorta eines typischen erwachsenen Menschen hat einen Radius von 1.3 cm. Wie groß sind der Druckabfall und der Widerstand über ein 20 cm langes Stück der Aorta bei einem Volumenstrom von 100 cm³/s? (Die Viskosität von Blut beträgt $2.084 \cdot 10^{-3}$ Pa s.)
30. Eine Kugel mit einem Radius von 1 mm und einer Dichte von 3000 kg/m³ durchfällt eine Strecke von 20 cm in einem Kugelfallviskosimeter, das mit einer Flüssigkeit mit einer Dichte von 1300 kg/m³ gefüllt ist, in einer Zeit von 10 min. Bestimmen Sie die Viskosität der Flüssigkeit.

Kapitel 11

Ladungen, Ströme und elektromagnetische Felder

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit elektrischen und magnetischen Phänomenen. Dazu beginnen wir mit der Beschreibung elektrischer Ladungen in Ruhe und den sich daraus ergebenden Feldern (Elektrostatik), um die Grundbegriffe einzuführen. Anschließend werden wir uns mit einfachen Bauelementen wie Widerstand und Kondensator beschäftigen, wie sie zur Beschreibung der Reizleitung im Nervensystem benötigt werden. Im letzten Abschnitt betrachten wir den Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Feldern und führen die elektromagnetische Welle als Beispiel für eine Welle ein.

Elektrizität und Magnetismus sind eng miteinander verknüpft. Die Griechen kannten bereits beides: den Magneteisenstein Magnetit, der von einer zu der Zeit unverstandenen Kraft stets gleich ausgerichtet wurde, und die Eigenschaft eines an einem Fell geriebenen Stückchen Bernstein, Haare und andere kleine Fasern anzuziehen. Der Zusammenhang zwischen beiden, insbesondere die Tatsache, dass bewegte elektrische Ladungen (Ströme) Magnetfelder erzeugen, wurde jedoch erst zu Beginn des 19. Jahrhunderts entdeckt.

11.1 Grundbegriffe und Definitionen

In diesem Kapitel werden einige Größen neu eingeführt, insbesondere die elektrischen Basisgrößen. Die neuen Größen sind in einfacher Definition und unter Angabe ihrer Einheiten in diesem Abschnitt zusammengefasst, die genaueren Erklärungen folgen in späteren Abschnitten.

Die in diesem Abschnitt zusätzlich zu den mechanischen Einheiten benötigte SI Einheit ist die der elektrischen Stromstärke. Sie ist über die Anziehungskraft zwischen zwei stromdurchflossenen Leitern definiert, vgl. Abschn. 1.3.1. Die physikalischen Grundlagen dieser Definition werden erst in Abschn. 11.4 verständlich.

Definition 28 *Die Ladung Q ist eine Eigenschaft der Materie, die die Stärke der Kraft zwischen der Ladung und anderen geladenen Teilchen charakterisiert.*

Die Einheit der elektrischen Ladung Q ist das Coulomb [C]. Die kleinste mögliche Ladung ist die eines Elektrons (oder Protons). Diese wird als *Elementarladung* e bezeichnet, sie beträgt $e = 1,60 \cdot 10^{-19}$ C. Da die Elementarladung so klein ist, fällt die ‘Körnigkeit’ der Elektrizität normalerweise nicht auf. So fließen durch eine gewöhnliche Glühlampe pro Sekunde ca. 10^{18} Elementarladungen. In dieser Situation ist daher die Beschreibung durch einen Strom angemessener als die durch bewegte Einzelladungen.

Definition 29 *Das elektrische Feld \vec{E} ist eine Eigenschaft des Raumes, die durch Ladungen (oder veränderliche Magnetfelder) erzeugt wird. Das elektrische Feld gibt für jeden Punkt des Raumes ein Maß für die Kraft (Betrag und Richtung), die auf eine Probeladung wirkt.*

Die durch das elektrische Feld \vec{E} beschriebene Kraft muss natürlich mit dem Coulomb-Gesetz, das die Kraft zwischen Ladungen beschreibt, in Einklang stehen. Das elektrische Feld können wir als Kraft pro Ladung definieren, d.h. wir erhalten für das elektrische Feld die Einheit $[\text{N}/\text{C}]$ oder ausgesprochen Newton pro Coulomb. Alternativ lässt sich das elektrische Feld auch durch die Einheit $[\text{V}/\text{m}]$ (Volt pro Meter) beschreiben. Die Umrechnung zwischen diesen Einheiten folgt weiter unten. Das elektrische Feld ist so definiert, dass die Feldlinien von einer positiven Ladung ausgehen und auf eine negative Ladung zulaufen, d.h. es ist die Krafrichtung gegeben, die sich für eine positive Probeladung ergibt.

Definition 30 *Das elektrische Potential V ist ebenfalls eine Eigenschaft des Raumes. Es gibt ein Maß für die potentielle Energie eines geladenen Teilchens in einem elektrischen Feld: das elektrische Potential gibt die potentielle elektrische Energie pro Ladung eines Teilchens an. Oder anders formuliert: das elektrische Potential gibt ein Maß für die Fähigkeit des Feldes, Arbeit an einem geladenen Teilchen zu verrichten.*

Die zu verrichtende Arbeit hängt dabei von der Ladung des Teilchens ab. Die Einheit des elektrischen Potentials ist daher die einer Arbeit pro Ladung, also Joule pro Coulomb oder kurz $[\text{J}/\text{C}]$.

Definition 31 *Die elektrische Spannung U oder das Potentialgefälle U ist die Differenz der Potentiale V_i in verschiedenen Raumpunkten.*

Die Potentialdifferenz oder Spannung ist die entscheidende Größe, um das Feld eine Arbeit verrichten zu lassen. Ist das Potential zwischen zwei Punkten gleich, so wird die Ladung nicht beschleunigt. Ebenso wird eine Kugel nicht beschleunigt, wenn sie in einem Bereich konstanten Gravitations- bzw. Geopotentials¹ liegt, d.h. z.B. auf einer Hochebene. Beschleunigung würde hier erst stattfinden, wenn sich an einem Hang ein Potentialgefälle ergibt. Da die Spannung eine Differenz zweier elektrischer Potentiale ist, ist die Einheit der Spannung bzw. des Potentialgefälles die gleiche wie beim Potential, nämlich V.

Definition 32 *Der elektrische Strom I ist der Fluss elektrischer Ladungen.*

Die Einheit des elektrischen Strom ist das Ampere $[\text{A}]$. Da der Strom als eine Bewegung von Ladungen betrachtet wird, besteht zwischen den Einheiten von Strom und Ladung ein Zusammenhang: der Strom ist bestimmt durch die Zahl der Ladungen, die pro Zeiteinheit durch einen Leiter fließen, oder $[\text{A}] = [\text{C}/\text{s}]$ bzw. umgestellt: die Ladung ist das Produkt aus Strom und Zeit, d.h. $[\text{C}] = [\text{As}]$

Definition 33 *Der (elektrische) Widerstand gibt die Behinderung des Ladungsflusses durch Materie an. Der Widerstand ist gleich dem Spannungsabfall über das Objekt dividiert durch den Strom durch das Objekt.*

Die Einheit des Widerstands ist das Ohm Ω mit $[\Omega] = [\text{V}]/[\text{A}]$. Der Widerstand eines Objekts gibt also an, wie viele Volt erforderlich sind, um einen Strom von 1 Ampere durch das Objekt fließen zu lassen.

¹Wir haben in der Mechanik das Gravitationsgesetz und die potentielle Energie kennen gelernt. Die potentielle Energie ist durch die Arbeit gegeben, die gegen die Schwerkraft verrichtet wird. Da die Gravitationskraft von einem Zentralkörper (in diesem Fall der Erde) ausgeht und den ganzen Raum füllt, können wir auch von einem Gravitationsfeld sprechen. Dieses hätte in der Nähe der Erdoberfläche die 'Feldstärke' g , da sich die Kraft auf eine Probemasse stets als $F = mg$ ausdrücken lässt. Auch hier ist die Einheit die einer Kraft pro Eigenschaft des Objekts, nur dass im Gegensatz zum elektrischen Feld die relevante Eigenschaft des Objekts nicht die Ladung sondern die Masse ist. Die potentielle Energie ist gegeben als $E_{\text{pot}} = mgh$. Darin ist einerseits die Masse m als die Eigenschaft des Objekts enthalten, andererseits aber auch das Produkt gh als eine Eigenschaft des Feldes, die multipliziert mit der Eigenschaft des Objektes eben die potentielle Energie liefert. Diese Eigenschaft des Feldes ist das Geopotential oder Gravitationspotential. Als Einheit erhalten Sie hier auch wieder Arbeit pro Eigenschaft des Körpers – allerdings mit der Masse statt der Ladung. Die hier gemachte Betrachtung über das Geopotential ist vereinfacht, da wir durch die Verwendung der Gravitationsbeschleunigung die Ortsabhängigkeit der Gravitationskraft (vgl. Abschn. 5.5.8) nicht berücksichtigen. Zum Verständnis des Konzepts und für alle Betrachtungen in der Nähe der Erdoberfläche ist diese Vereinfachung jedoch völlig ausreichend.

Definition 34 Die Kapazität C ist die Fähigkeit eines Bauteils, Ladungen und Energie zu speichern. Sie gibt an, wie viel Ladung Q je Spannungseinheit gespeichert werden kann.

Die Einheit der Kapazität ist das Farad [F] oder in Basiseinheiten $[F] = [C]/[V]$.

Definition 35 Das magnetische Feld ist der Raum um ein magnetisches Objekt wobei jedem Punkt im Raum das Drehmoment zugeschrieben wird, das an dieser Stelle auf einen kleinen Testmagneten (Kompassnadel) ausgeübt wird.

Die Richtung des magnetischen Feldes ist definitionsgemäss die Richtung, in die der Nordpol einer Kompassnadel weisen würde. Die Einheit des magnetischen Feldes ist das Tesla T, wobei gilt $1 \text{ T} = 1 \text{ kg}/(\text{C} \cdot \text{s})$.

11.1.1 Analogie zur Mechanik

Verschiedene elektrische Größen und Grundgleichungen haben Sie bereits in verwandter Form in der Mechanik kennen gelernt:

- Die *Grundgröße* zur Charakterisierung der betrachteten Objekte in der Mechanik, die Masse, wird durch die Ladung ersetzt.
- Die *Wechselwirkung* zwischen zwei Objekten wird in der Mechanik durch das allgemeine Gravitationsgesetz beschrieben, in der Elektrostatik durch das Coulomb-Gesetz. In beiden Fällen ist die Kraft proportional dem Produkt der Eigenschaften der beiden Körper (also der Massen bzw. der Ladungen) und umgekehrt proportional dem Quadrat des Abstands zwischen ihnen.
- Ein Körper erzeugt im Raum um ihn herum ein *Feld*, in der Mechanik das Gravitationsfeld, als geladener Körper in der Elektrostatik ein elektrisches Feld. Dieses Feld bestimmt an jedem Ort die Kraft, die der Körper auf einen zweiten Körper an dieser Stelle ausüben würde. Als weiteres Beispiel für ein Feld werden wir das Magnetfeld kennen lernen.
- Die Bewegung von Einzelteilchen wird in beiden Fällen durch Newton's Aktionsgesetz $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ beschrieben, jedoch sind die einzusetzenden Kräfte in Mechanik und Elektrostatik verschieden. So wirkt im Gravitationsfeld der Mechanik eine Gravitationskraft $F = mg$ auf ein Teilchen; in einem elektromagnetischen Feld dagegen wirkt die Lorentzkraft $\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ auf die Ladung.
- die Bewegung einer Vielzahl von Einzelmassen können wir als eine Strömung beschreiben, d.h. wir betrachten das Medium als kontinuierliches Medium. Bewegt sich eine Vielzahl von Ladungen, so handelt es sich um einen Strom. Auf diese Analogie zwischen mechanischen Strömungen und elektrischem Strom werden wir in Abschn. 11.3 noch genauer eingehen.

11.2 Elektrostatik

11.2.1 Reibungselektrizität

Die Griechen erkannten in ihren Versuchen mit Bernstein und anderen Materialien nur, dass Reibung eine anziehende Kraft zwischen einigen Materialien hervorrufen kann. Dieses Phänomen wird als *Reibungselektrizität* bezeichnet, vgl. Abb. 11.1. Erst um 1730 erkannte man durch den Vergleich verschiedener Materialien (Gummi und Katzenfell oder Haar, Luftballon und Wolle, Plastik und Seide), dass es auch zu einer Abstoßung kommen kann, d.h. die Reibung erzeugt nicht immer eine anziehende Kraft sondern je nach Materialkombination mal eine anziehende, mal eine abstoßende. Die Kraft zwischen den beiden Körpern, die man zur Ladungstrennung verwendet hat, ist jedoch stets anziehend. Zusammengefasst kann man

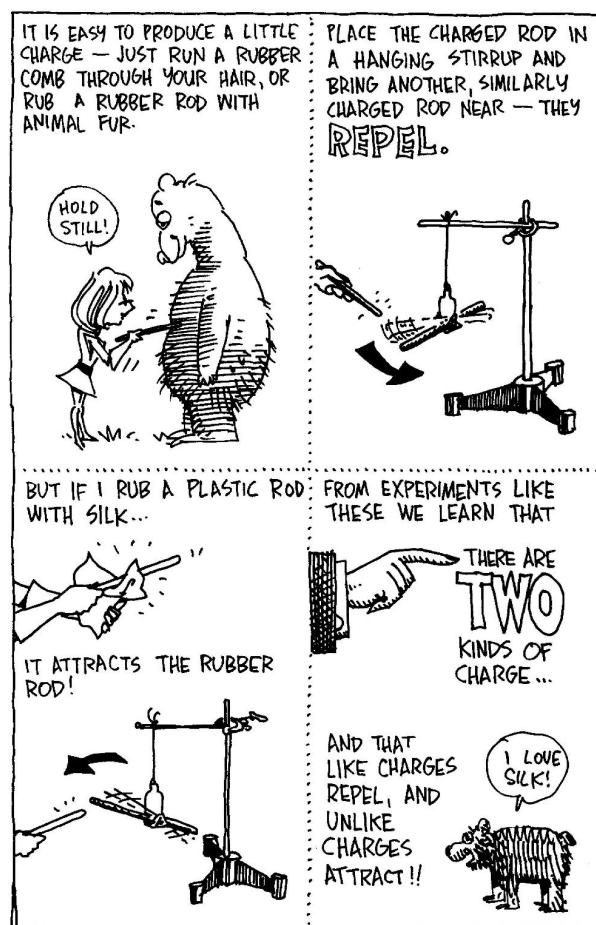


Abbildung 11.1: Reibungselektrizität; anziehende und abstoßende Kräfte je nach verwendeten Materialien [17]

- aus der Anziehung bzw. Abstoßung auf zwei verschiedene Formen der Ladung schließen,
- aus der Tatsache, dass Anziehung bzw. Abstoßung keinen Kontakt der Körper erfordern sondern über einen gewissen Bereich wirken, auf die Existenz eines elektrischen Feldes schließen, und
- aus der Abnahme der Anziehung bzw. Abstoßung mit dem Abstand der Körper auf eine Abhängigkeit der entsprechenden Kraft vom Abstand schließen.

Bevor wir in Abschn. 11.2.3 diese Coulomb-Kraft formal genauer beschreiben, wollen wir zuerst die Ursachen für die Reibungselektrizität kennen lernen. Materie besteht aus Atomen bzw. Molekülen. Diese Bausteine der Materie bestehen aus positiven Kernen, die von negativen Elektronen umkreist werden. Dabei kann ein Teil der Elektronen in Festkörpern auch eine frei bewegliche Wolke bilden, wobei das einzelne Elektron nicht mehr einem Kern fest zu geordnet ist sondern nur die Gesamtzahl der positiven und negativen Ladungen im Körper gleich ist, damit dieser nach außen elektrisch neutral ist. In anderen Körpern, so auch im Wasser, haben die Moleküle eine dipolare Struktur mit einem eher positiv und einem eher negativ geladenen Ende.

Ladungstrennung ist besonders einfach in den Materialien, in denen Elektronen frei beweglich sind: hier können Elektronen von einem der beiden an der Reibung beteiligten Körper auf den anderen über gehen, so dass letzterer durch die zusätzlichen Elektronen negativ geladen wird, während der erstere durch das Fehlen der Elektronen positiv geladen ist. Die

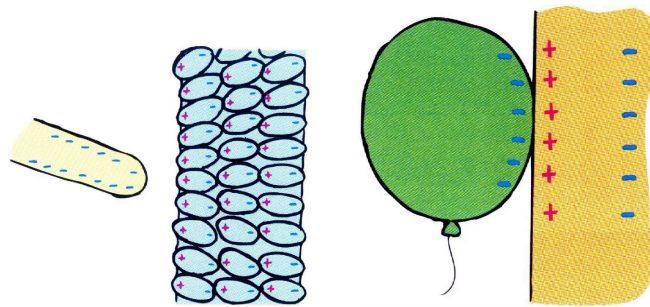


Abbildung 11.2: Polarisierung eines neutralen Körpers durch Annäherung einer Ladung – der geladene Luftballon kann die Wand so weit polarisieren, dass die elektrostatische Anziehungskraft ihn gegen die Gewichtskraft halten kann

Trennung der Ladungen erfordert eine Arbeit gegen die elektrostatische Anziehung zwischen Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens. Die nötige Energie zum Leisten dieser Arbeit wird durch mechanische Energie (Reiben) aufgebracht.

Formal lässt sich dies als das *Konzept der Ladungserhaltung* formulieren: in einem isolierten System bleibt die Gesamtladung erhalten. Ein isoliertes System sind z.B. der Glasstab und die Seide, die Gesamtladung in den beiden ist Null, da sich positive und negative Ladungen genau aufheben. Durch die Zuführung mechanischer Energie werden Teile dieser Ladungen getrennt, so dass einer der Körper positiv, der andere negativ geladen ist. Damit hat zwar jeder einzelne Körper durch ein Ungleichgewicht der auf ihm vereinigten negativen und positiven Ladungen eine von Null verschiedene Gesamtladung. Das System, d.h. die beiden Körper zusammen, haben jedoch weiterhin eine Gesamtladung von Null, da das Defizit an negativer Ladung auf dem einen Körper² genau so groß ist wie der Überschuss negativer Ladung auf dem anderen.

Die Ladungen der beiden beteiligten Körper müssen nach obiger Argumentation entgegengesetzt sein. So ist die Ladung auf dem Glasstab beim Reiben von Glas an Seide positiv, die Ladung auf dem Gummistab beim Reiben mit einem Fell dagegen negativ. Daher ziehen sich der Glasstab und die Seide an sowie der Gummistab und das Fell. Auch Glas- und Gummistab ziehen sich gegenseitig an, ebenso wie Seide und Fell, da sie ebenfalls jeweils die entgegengesetzte Ladung tragen. Abstoßende Kräfte haben wir dagegen zwischen Fell und Glasstab (beide sind positiv geladen) und zwischen Gummistab und Seide (beide sind negativ geladen).

11.2.2 Polarisierung und Influenz

Wie sieht es aber mit den Papierschnitzeln aus? Diese werden sowohl vom Glasstab als auch vom Gummistab angezogen. Daraus können wir schließen, dass sie weder positiv noch negativ geladen sind, also elektrisch neutral sind. Daher wird Anziehung häufiger beobachtet als Abstoßung:

- Anziehung erfolgt entweder zwischen zwei geladenen Körpern entgegengesetzter Ladung oder zwischen einem (beliebig) geladenen Körper und einem neutralen Körper.
- Abstoßung erfolgt nur zwischen zwei geladenen Körpern mit entgegengesetzter Ladung, nicht jedoch zwischen einem geladenen und einem ungeladenen Körper.

²Das Defizit an negativer Ladung auf dem einen Körper kann auch als ein Überschuss an positiver Ladung formuliert werden. Letztere Beschreibung hat den Vorteil, dass die Begriffe positive und negative Ladungen verwendet werden. Die erste Beschreibung mit Defizit oder Überschuss negativer Ladungen dagegen hat den Vorteil, dass nur die mobilen negativen Ladungen betrachtet werden: sie können von einem Körper auf den anderen übergehen während die positiven Ladungen am Ort verbleiben.

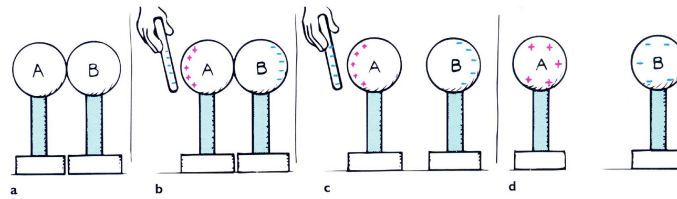


Abbildung 11.3: Influenz: Aufladen neutraler Körper durch Ladungstrennung bei Annäherung eines geladenen Körpers

Die Anziehung ungeladener Körper durch einen geladenen Körper können wir aus der Struktur der Materie verstehen. Das elektrische Feld des geladenen Körpers bewirkt im ungeladenen Körper eine abstoßende Kraft auf gleichnamige Ladungen und eine anziehende Kraft auf Ladungen des entgegen gesetzten Vorzeichens. Besteht der Körper aus Molekülen mit Dipolcharakter, so richten sich diese Dipole aus: die Ladungen anderen Vorzeichens sind dem geladenen Körper zu gewandt, die Ladungen gleichen Vorzeichens ihm abgewandt, vgl. Abb. 11.2. Dadurch ist der Abstand zwischen den ungleichnamigen Ladungen geringer als zwischen den gleichnamigen und die anziehenden Kräfte überwiegen die abstoßenden. Haben die Moleküle keine Dipolstruktur, so verschiebt das Feld des geladenen Körpers die Ladungsschwerpunkte der Moleküle oder Atome in ähnlicher Weise, so dass wieder eine Anziehungskraft entsteht. Dieser Vorgang wird als Polarisierung (im Englischen auch als polarization) bezeichnet.

Sind Elektronen wie in einem Leiter frei beweglich, so separieren sich die Ladungen bei Annäherung eines geladenen Körpers wie oben beschrieben, jedoch mit dem Unterschied, dass die Ladungen über große Strecken verschoben werden können: nicht nur innerhalb eines Atoms/Moleküls oder durch Ausrichtung eines Moleküls mit Dipolstruktur sondern über den gesamten Leiter.

Die Influenz (im Englischen auch induction) kann man auch ausnutzen, um ungeladene Körper aufzuladen. Wir gehen dazu von zwei ungeladenen Leitern aus, die sich berühren, Teilbild (a) in Abb. 11.3. Nähern wir diesen einen negativ (positiv) geladenen Gegenstand, so bewirkt die Induktion einen Überschuss an positiven (negativen) Ladungen auf dem Leiter näher am geladenen Körper und entsprechend einen Überschuss an negativen (positiven) Ladungen auf dem weiter entfernten Leiter, vgl. (b). Trennen wir die Leiter in diesem Zustand, so bleibt das Ladungsungleichgewicht auf ihnen erhalten (c) und wir erhalten einen positiv geladenen und einen negativ geladenen Körper.

11.2.3 Coulombkraft oder elektrostatische Kraft

Die Kraft zwischen zwei Ladungen Q_1 und Q_2 wird durch das Coulomb-Gesetz beschrieben:

$$F_{\text{Coul}} = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \quad \text{mit} \quad k = 1/(4\pi\epsilon_0) = 8.97 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \quad (11.1)$$

oder in vektorieller Form

$$\vec{F}_{\text{Coul}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{mit} \quad \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}. \quad (11.2)$$

Die Coulombkraft nimmt linear mit der Ladung zu und quadratisch mit dem Abstand zwischen den Ladungen ab. Daher kann die Coulomb-Kraft im Elektroskop zur Messung der Ladungen verwendet werden.

Diese Gleichung ist formal analog zum Newton'schen Gravitationsgesetz (dort stehen statt der Ladungen die Massen und statt der Konstanten k ein γ), hat aber zwei wesentliche Unterschiede:

- Massen ziehen sich immer an, Ladungen können sich anziehen (ungleichnamige) oder abstoßen (gleichnamige).

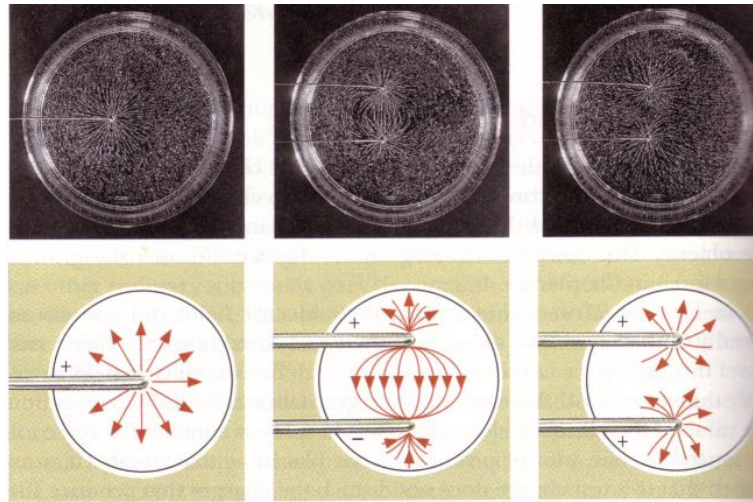


Abbildung 11.4: Beispiele für elektrische Felder: Punktladung (links), zwei Punktladungen entgegengesetzter Ladung (Mitte) und zwei gleichnamige Punktladungen [26]

- die Massenanziehung ist wesentlich schwächer als die elektrostatische Anziehung (bzw. Abstoßung). Betrachten wir als Beispiel ein Elektron ($m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg, $q_e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C) und ein Proton ($m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, $q_p = q_e$). Diese befinden sich in einem Wasserstoffatom im Abstand von 10^{-10} m. Für die Coulomb-Kraft erhalten wir durch Einsetzen in (11.1) $F_{\text{Coul}} = 2.3 \cdot 10^{-8}$ N und für die Gravitationskraft durch Einsetzen in (5.51) in Abschn. 5.5.8 $F_G = 1 \cdot 10^{-49}$ N. Die elektrostatische Anziehung zwischen den beiden ist mehr als vierzig Größenordnungen größer als die gravitative.

11.2.4 Elektrisches Feld

Das elektrische Feld ist eine Eigenschaft des Raumes. Es gibt an, welche Kraft auf eine Probeladung Q ausgeübt würde:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right] = \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right]. \quad (11.3)$$

Das elektrische Feld kann in jedem Punkt durch einen Pfeil (entsprechend dem Kraftvektor), dargestellt werden, wobei die Richtung des Pfeiles die Richtung der wirkenden Kraft angibt, die Länge des Pfeiles ein Maß für den Betrag der Kraft pro Ladung. Die Festlegung der Richtung ist willkürlich, sie wurde für eine positive Testladung definiert. Daher zeigen die Pfeile der elektrischen Feldstärke bei einer positiven Ladung nach außen (also von der Ladung weg), bei einer negativen Ladung dagegen nach innen.

Für eine elektrische Punktladung Q können wir das Feld aus der Coulomb-Kraft (11.1) bestimmen zu

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{k \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \vec{r}}{q} = \frac{kQ}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}. \quad (11.4)$$

Darin haben wir q als die Testladung betrachtet. Das Verfahren ist Ihnen bekannt, wir haben bei der Gravitationskraft eine ähnliche Argumentation verwendet um die das Feld bestimmende Größe g , die Gravitationsbeschleunigung, zu bestimmen, vgl. Abschn. 5.5.8.

Diese Feldstärke eines elektrischen Feldes kann entweder mit Hilfe der vom Feld auf eine kleine Probeladung ausgeübten Kraft gemessen werden oder sie kann aus der bekannten Ladungsverteilung berechnet werden. Dazu wird das elektrische Feld jeder Punktladung der Ladungsverteilung berechnet, anschließend werden die Felder vektoriell addiert.

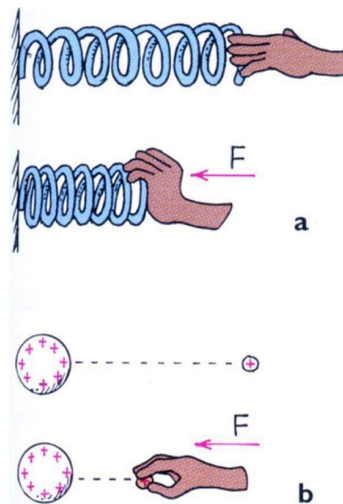


Abbildung 11.5: Die gegen die Federkraft geleistete Arbeit führt zu einer potentiellen Energie der Masse (oben); entsprechend wird zur Verschiebung einer Ladung in einem elektrischen Feld eine Arbeit verrichtet, die als potentielle Energie der Ladung in Erscheinung tritt

Elektrische Felder lassen sich auf durch die Ausrichtung von Materialien in diesem Feld visualisieren. In Abb. 11.4 sind dazu das bereits erwähnte radiale Feld einer Punktladung (links) gezeigt sowie das elektrische Feld zwischen zwei gleich großen Ladungen entgegengesetzten Vorzeichens (Mitte) und gleichen Vorzeichens (rechts). Der Raum zwischen den ungleichnamigen Ladungen ist durch durchgehende Feldlinien gekennzeichnet: setzen wir eine Probeladung in diesen Raum, so kann sie, je nach Polarität, zu einer oder anderen Ladung angezogen werden. In jedem Fall wirkt eine Kraft, die sie entlang der Feldlinie auf eine der Ladungen treiben würde. Entsprechend würde auch eine der felderzeugenden Ladungen sich entlang der Feldlinie auf die andere zu bewegen. Bei zwei gleichnamigen Ladungen werden die Feldlinien in der Mitte abgelenkt, es gibt keine die beiden Ladungen verbindenden Feldlinien. Setzen wir eine Probeladung gleicher Polarität in das Feld zwischen den Ladungen, so wird sie von beiden Ladungen abgestoßen, d.h. sie wird entlang der Feldlinien aus dem Raum zwischen den beiden Ladungen entweichen. Daher müssen auch die Feldlinien als Kraftlinien aus diesem Raum entweichen. Würden die Feldlinien die Ladungen verbinden, so würde sowohl eine gleichnamige Probeladung als auch die gleichnamige felderzeugende Ladung angezogen werden – im Widerspruch zu den Beobachtungen. Setzen wir eine Ladung mit anderem Vorzeichen als die felderzeugenden Ladungen in das Feld, so wird diese Ladung entlang der Feldlinien auf die felderzeugende Ladung gezogen, der die Probeladung näher ist. Das ist auch verständlich, da zwar beide Ladungen eine anziehende Kraft ausüben, die Kraft der Ladung im kleineren Abstand aufgrund ihrer $1/r^2$ -Abhängigkeit jedoch größer ist.

Das elektrische Feld ist, ebenso wie das Gravitationsfeld, ein konservatives Feld: die Arbeit, eine Ladung von einem Punkt zu einem anderen zu verschieben, hängt nicht vom Weg ab. Außerdem kann die bei einer Verschiebung der Ladung gewonnene potentielle Energie der Ladung wieder vollständig in kinetische Energie umgewandelt werden. Das ist das Äquivalent zu der Erhaltung der mechanischen Energie im Gravitationsfeld.

11.2.5 Elektrisches Potential

Die Bewegung einer Testladung im elektrischen Feld erfordert eine Kraft F , d.h. bei der Bewegung der Ladung wird eine Arbeit verrichtet, die als potentielle Energie der Ladung

$$W_{\text{pot}} = Q \cdot U \quad [\text{J}] \quad (11.5)$$

auftritt. Darin ist die Größe

$$U = \frac{W_{\text{pot}}}{Q} \quad [\text{V}] = \left[\frac{\text{J}}{\text{C}} \right] \quad (11.6)$$

das *elektrische Potential*. Seine Dimension ist die einer Arbeit pro Ladung.

Beachten Sie, dass das elektrische Potential eine Eigenschaft des Feldes ist, die potentielle Energie dagegen eine Eigenschaft der Ladung. Das wird auch in den Einheiten deutlich: die potentielle Energie geben wir in J an, das Potential dagegen in J/C. Auch in der klassischen Mechanik können wir für das Gravitationsfeld eine potentielle Energie mgh mit der Einheit J einführen und entsprechend ein Potential gh mit der Einheit J/kg.

Aus der klassischen Mechanik wissen wir, dass potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt werden kann. Dies ist im elektrischen Feld ebenfalls möglich. Da die Massen der beschleunigten Körper, in der Regel Elektronen oder Protonen, jedoch sehr klein sind, ist das J eine ungünstige Einheit. Stattdessen verwendet man das *Elektronenvolt* [eV] als die Energie, die eine Ladung bei Durchlaufen eines Potentialgefälles von 1 V erhält:

$$1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J} . \quad (11.7)$$

Beispiel 16 *Ein anfänglich ruhendes Proton wird durch eine Potentialdifferenz von 10^6 V beschleunigt. Die kinetische Energie ist dann*

$$E_{\text{kin}} = 10^6 \text{ eV} = 1 \text{ MeV} = \frac{1}{2}mv^2 . \quad (11.8)$$

Mit einer Protonenmasse $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg erhalten wir daraus die Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{\frac{2E_{\text{kin}}}{m_p}} = 1.38 \cdot 10^7 \text{ m/s} . \quad (11.9)$$

□

Typische Energie liegen bei atomaren und molekularen Prozessen im Bereich einiger eV, bei Röntgenstrahlung im Bereich einiger keV und bei Kernreaktionen im Bereich einiger MeV.

11.2.6 Elektrisches Potential und Spannung

Eine Potentialdifferenz im elektrischen Feld wird als eine Spannung U bezeichnet. Eine Potentialdifferenz beinhaltet die Möglichkeit der Beschleunigung: durch die unterschiedliche potentielle Energie, die eine Testladung bei den beiden verschiedenen Potentialen hat, kann diese beschleunigt werden. Die Potentialdifferenz/Spannung gibt an, wie viel Energie auf eine Ladung beim Durchlaufen der Potentialdifferenz übertragen wird: eine Batterie, die eine Spannung von 1.5 V hat, gibt an jedes C Ladung, dass von einem ihrer Enden zum anderen bewegt wurde, eine Energie von 1.5 J.

11.3 Einfache elektrische Stromkreise

Ein elektrischer Stromkreis besteht (mindestens) aus den folgenden Zutaten:

- einer Spannungsquelle, die eine Gleich- oder Wechselspannung liefern kann. Wir werden uns bei den folgenden Betrachtungen auf eine Gleichspannungsquelle, z.B. eine Batterie, beschränken.
- elektrischen Widerständen, in denen elektrische Energie in Wärme umgewandelt wird. Dazu gehören alle Drähte, Lämpchen – und natürlich auch Widerstände als Bauelemente.
- Kondensatoren, die als Energiespeicher verwendet werden können.

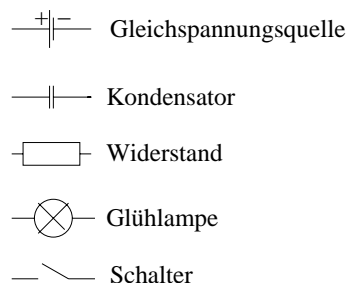


Abbildung 11.6: Schaltzeichen

- Dioden, Transistoren und kompliziertere Halbleiter, die zwar als elektronische Bauelemente sehr wichtig sind (und uns auch im Alltag umgeben), die wir im Rahmen der Vorlesung aber nicht weiter betrachten wollen.

Schaltungen werden graphisch dargestellt, die dabei verwendeten Schaltzeichen für die verschiedenen Bauelemente sind in Abb. 11.6 gegeben. Leitungen zwischen den Bauteilen sind als durchgezogenen Linien dargestellt, kreuzen sich zwei dieser Linien mit einer leitfähigen Verbindung, so wird dies oft durch einen Punkt am Kreuzungspunkt markiert. Letzteres ist nicht immer der Fall, für die Schaltungen, die wir betrachten werden, gilt jede Berührung von Leitungen im Schaltplan als elektrische Verbindung.

11.3.1 Analogie

Eine Möglichkeit, sich die elementaren Vorgänge in einem elektrischen Stromkreis zu veranschaulichen ist die Analogie mit einem Wasserkreislauf. In einem Wasserkreislauf bewegt sich Wasser durch ein System von Leitungen. Im Stromkreis betrachten wir die Bewegung von Ladungen. Die Masse bzw. das Volumenelement der Hydrodynamik ist daher durch die Ladung zu ersetzen. Der Massen- oder Volumenstrom, mit dem wir die Bewegung der Materie beschreiben, findet seine Entsprechung im elektrischen Strom. Wie in der Hydrodynamik benötigen wir eine Pumpe, um die Bewegung anzutreiben, in diesem Fall eine Batterie oder eine andere Spannungsquelle (Netzteil, Steckdose, Akku). Die Pumpe charakterisieren wir durch den Druck, den sie ausüben kann, da die Druckdifferenz die Bewegung des Wassers treibt. Entsprechend können wir die Batterie durch die Spannung oder Potentialdifferenz charakterisieren, da diese die Bewegung der Ladungen treibt. Die Leitungen im Wasserkreislauf entsprechen den elektrischen Leitungen oder Drähten in der Schaltung. Und wie in einem realen Wasserkreislauf muss die Pumpe immer arbeiten, und sei es nur um den Reibungswiderstand in den Leitungen zu überwinden. Analog haben auch unsere elektrischen Leitungen stets einen, wenn auch relativ geringen Widerstand.

Interessant wird dieses Modell erst, wenn wir weitere Elemente in den Kreislauf einfügen. Wir könnten das Wasser z.B. ein kleines Mühlrad treiben lassen und auf diese Weise aus der kinetischen Energie des strömenden Wassers Rotationsenergie des Mühlrades zu erzeugen. Im elektrischen Stromkreis würden wir statt des Mühlrades einen Elektromotor verwenden.

Ein Segment unseres Leitungssystems sei mit Kies angefüllt. Dann ist die Reibung bei der Bewegung des Wassers sehr groß. Dies hat zwei Konsequenzen: der Volumenstrom ist deutlich reduziert und ein Teil der kinetischen Energie, die das Wasser an dieser Stelle hätte, würde es eine freie Leitung passieren, wird in Reibungswärme umgewandelt. Dieses mechanische Bild hat sein elektrisches Äquivalent in einem Widerstand: er reduziert den Strom und wandelt einen Teil der elektrischen Energie in Wärmeenergie um. Die dabei erzeugte Wärmemenge kann so groß sein, dass der Körper eine Temperatur von einigen Tausend Grad annimmt und zu leuchten beginnt – das ist dann das Filament einer Glühlampe. Alle anderen Bauteile in einem Schaltkreis haben ebenfalls einen Widerstand. Daher erfüllen sie nicht nur die gewünschte Funktion im Schaltkreis sondern setzen stets auch elektrische Energie in Wärme

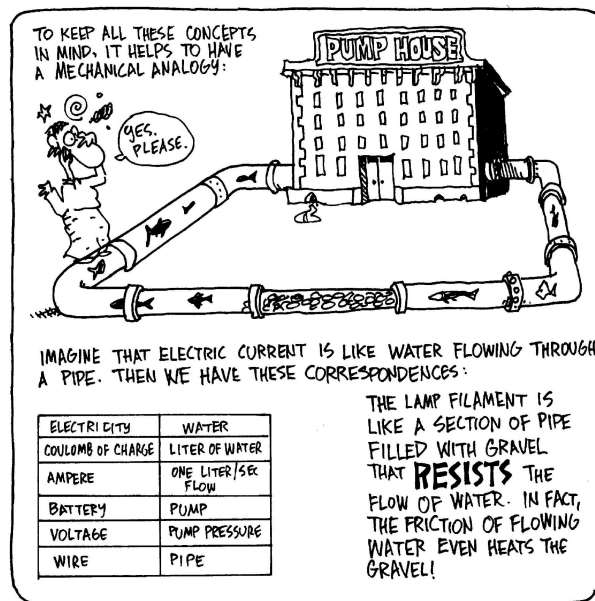


Abbildung 11.7: Analogie Stromkreis – Wasserkreislauf (Gonick & Huffmann, 1991)

um. Der elektrische Widerstand ist damit in der realen Welt genauso omnipräsent wie es die Reibung ist, die in der Mechanik dafür sorgt, dass kinetische Energie in Wärmeenergie umgewandelt wird.

11.3.2 Gleichspannungsquellen

Die einfachste Gleichspannungsquelle ist eine Batterie. Sie beruht auf einem elektrochemischen Vorgang: zwischen zwei verschiedenen Metallen bildet sich eine Spannungsdifferenz, die je nach verwendeten Materialien größer oder kleiner sein kann. Eine einfache Batterie können Sie aus einem Zink- und einem Kupferdraht erzeugen, die Sie in eine Zitrone stecken. Alternativ können Sie ein Stückchen Zinkfolie und ein damit verbundenens Stückchen Silberfolie verwenden: halten Sie beide gegen ihre Zunge, so werden sie ein kribbelndes Gefühl verspüren, das einen Strom anzeigt. Die Erzeugung der Potentialdifferenz beruht in allen Fällen auf chemischen Prozessen, die Ladungen von einem auf das andere Metall transferieren und damit eine Potentialdifferenz bewirken.

Die erste Batterie wurde von Volta entwickelt (Volta'sche Säule) und bestand aus abwechselnden Lagen von Silber- und Zinkfolie mit feuchtem Papier dazwischen. Eine solche Kombination Silberfolie–Papier–Zink wird als Volta-Zelle bezeichnet. Eine Volta-Zelle liefert eine gewisse Spannung. Die Spannung einer einzelnen Zelle hängt nur von den Materialien, nicht von der Größe der Zelle ab – letztere bestimmt nur, wie viele Chemikalien vorhanden sind und wie viele Ladungen damit bewegt werden können, nicht jedoch welche Potentialdifferenz sich ergibt.

Andere Spannungen lassen sich durch die Kombination mehrerer Elemente erreichen, vgl. Abb. 11.8. Schalten Sie die Zellen in Serie, d.h. die Zink-Platte der einen berührt die Silberplatte der anderen bzw. bei Batterien der Pluspol der einen berührt den Minuspol der anderen, so erhöht sich die Spannung entsprechend der Zahl der verwendeten Zellen.³ Schalten Sie die Batterien dagegen parallel (also Plus an Plus und Minus an Minus), so verändert sich die Spannung nicht; Sie erhalten weiterhin die Spannung, die eine einzelne Zelle oder Batterie liefern würde. Sie haben mit diesem Aufbau jedoch die effektive Größe der

³Das machen Sie jedesmal, wenn Sie die Batterien oder Akkus in ihrem Walkman austauschen: mehrere 1.5 V Zellen werden kombiniert, um die gewünschte Spannung von mehreren Volt zu liefern.

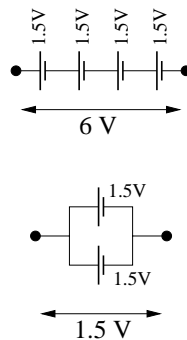


Abbildung 11.8: Bei in Serie geschalteten Batterien (oben) addieren sich die einzelnen Spannungen zur Gesamtspannung; bei parallel geschalteten Batterien ist die Gesamtspannung gleich der Spannung der einzelnen Batterien

Batterie vergrößert, d.h. es können mehr Ladungen bewegt werden und die so kombinierten Batterien halten länger als es eine einzelne tun würde.

Batterien unterscheiden sich von der im Haushalt normalerweise verwendeten Spannungsquelle Steckdose in den folgenden Eigenschaften:

- die Batterie liefert eine Gleichspannung, aus dem Netz dagegen erhalten Sie eine mit 60 Hz oszillierende Wechselspannung. Bei letzterer ist die Unterscheidung zwischen Plus- und Minuspol sinnlos, da diese fortwährend wechseln. Der Vorteil der Wechselspannung liegt in den geringeren Transportverlusten sowie der besseren Wandelbarkeit (Transformator, s.u.).
- die Batterie liefert eine Spannung im Bereich weniger Volt, das Netz dagegen eine Spannung von 240 V.

Mit der Spannungsquelle haben wir den Motor eines elektrischen Stromkreises. Zum Verständnis einfacher Schaltungen benötigen wir jetzt nur noch Kabel und elektrische Bauteile, aus denen wir, um im Modell unseres Wasserkreises zu bleiben, einen geschlossenen Stromkreis aufbauen.

11.3.3 Widerstand

Das einfachste und anschaulichste Element in einem Stromkreis ist eine Glühlampe. Diese hat, wie jedes Bauteil, einen Widerstand. Gleichzeitig ist die Glühlampe auch eine einfache Methode, den Strom optisch abzuschätzen: wird das Lämpchen heller, fließt ein größerer Strom, wird es dunkler fließt dagegen ein geringerer Strom. An Hand von Glühlämpchen lassen sich daher auch die Gesetze der Reihen- und Serienschaltung von Widerständen veranschaulichen.

Doch beginnen wir mit dem physikalischen Konzept des elektrischen Widerstandes. Materie behindert die freie Bewegung von Elektronen in einem elektrischen Feld bzw. bei einer angelegten Spannung. Die Elektronenbewegung kann durch den Strom I [$A = C/s$] beschrieben werden, der die Ladungsmenge pro Zeit angibt. Bei vorgegebener Spannung ist der Strom von einer Eigenschaft des stromdurchflossenen Bauteils, seinem Widerstand, abgängig. Dieser Zusammenhang wird durch das Ohm'sche Gesetz beschrieben:

$$U = R \cdot I \quad \text{oder} \quad R = \frac{U}{I} \quad [\Omega] = \left[\frac{V}{A} \right]. \quad (11.10)$$

Die Größe R ist auf ein Bauteil bezogen. Physikalisch sinnvoller ist es oftmals, den spezifischen Widerstand ρ zu verwenden, der eine Konstante für ein vorgegebenes Material ist. Ein Draht



Abbildung 11.9: Magnetschwebbahn als mögliches Anwendungsbeispiel für Supraleitung [17]

der der Länge l und der Querschnittsfläche A aus einem Material mit spezifischem Widerstand ϱ hat dann den Widerstand

$$R = \varrho \cdot \frac{l}{A} \quad \text{mit} \quad \varrho \quad \text{in} \quad [\Omega m]. \quad (11.11)$$

Sie können sich diesen Zusammenhang wieder mit der Analogie des Wasserkreislaufs veranschaulichen:

- die Strömung wird in einem weiten Rohr weniger behindert als in einem engen Rohr, d.h. mit zunehmender Querschnittsfläche A wird der Widerstand R kleiner; oder formal $R \sim \frac{1}{A}$.
- die Strömung wird von glattem, groben Kies weniger stark behindert als von rauhem, feinen Kies, d.h. der Widerstand R nimmt mit einer Materialeigenschaft zu, die wir als spezifischen Widerstand ϱ bezeichnen, gleichsam ein Bremsvermögen für die Strömung bzw. den Strom; oder formal $R \sim \varrho$.
- die Strömung wird in einem langen Rohr stärker abgebremst als in einem kurzen bzw. es ist eine größere Druckdifferenz erforderlich, um eine Strömung durch ein langes Rohr zu treiben als durch ein kurzes. Entsprechendes gilt beim elektrischen Widerstand, d.h. wir können schreiben $R \sim l$.

Zusammengefasst erhalten wir damit (11.11).

Im Widerstand wird kinetische Energie der bewegten Elektronen durch Stöße auf die Atome übertragen – die Energie im Stromkreis nimmt ab, sie erscheint als thermische Energie der durch die Stöße verstärkte Bewegung der Atome.

11.3.4 Exkurs: Supraleitung

Die spezifische Leitfähigkeit (und damit der Widerstand eines Körpers oder Bauteils) hängt von der Temperatur ab: mit zunehmender Temperatur nimmt die zufällige thermische Bewegung der Moleküle oder Atome im Material zu, so dass die freie Bewegung der Elektronen (und damit der Strom) beeinträchtigt wird. Diese Temperaturabhängigkeit des Widerstands kann z.B. zur Temperaturmessung verwendet werden – die modernen Fieberthermometer arbeiten nach diesem Prinzip.

Einige Materialien zeichnen sich durch eine sprunghafte Verringerung des Widerstandes bei niedrigen Temperaturen aus. Dadurch können in diesen Materialien mit geringen Spannungen hohe Ströme erzeugt werden. Aufgrund der geringen Spannung ist die zur Erzeugung des Stromes benötigte elektrische Leistung gering. Materialien, bei denen der Widerstand bei geringen Temperaturen (nur wenige Kelvin oberhalb des absoluten Nullpunkts) verschwindet, werden als Supraleiter bezeichnet. In einem Supraleiter bilden die Elektronen Paare, die

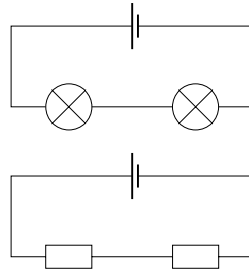


Abbildung 11.10: Serienschaltung von Lämpchen (oben) und Widerständen (unten)

es ihnen erlauben, sich ohne Widerstand durch das Material zu bewegen. Würde in einem Supraleiter einmal ein Strom erzeugt, so bleibt dieser bestehen ohne dass elektrische Energie in Wärmeenergie umgewandelt wird.

Ein technologisch interessanter Bereich für die Supraleitung ist die Magnetschwebbahn. Hier muss ein starkes Magnetfeld erzeugt werden, um den Zug zu heben, zu führen und zu beschleunigen. Die Magnetfelder werden mit Hilfe von Elektromagneten erzeugt, d.h. es wird die Fähigkeit eines Stromes, ein Magnetfeld zu erzeugen, ausgenutzt (s.u.). Aufgrund der Masse des Zuges sind große Felder und damit auch große Ströme erforderlich. Letztere benötigen aufgrund des Widerstandes der Spulen entsprechend hohe Spannungen, d.h. zum Betrieb einer Magnetschwebbahn ist elektrische Leistung erforderlich. Diese ist, vgl. (11.28), gegeben als $P = UI$, d.h. das Produkt aus Spannung und Strom. Wir können eine der beiden Größen durch die andere und den Widerstand ausdrücken, also z.B. $U = RI$. Dann lässt sich die Leistung auch schreiben als $P = RI^2$. Der Strom ist vorgegeben, da zum Betrieb der Magnetschwebbahn ein bestimmtes Magnetfeld erforderlich ist, zu dessen Erzeugung wiederum ein entsprechender Strom fließen muss. Die Leistung kann also nur minimiert werden, wenn der Widerstand entsprechend klein ist oder sogar verschwindet.⁴

11.3.5 Serien- und Parallelschaltung

Bei einer Serienschaltung oder Reihenschaltung werden die Bauelemente (Widerstände oder Kondensatoren) hintereinander geschaltet, so dass der gesamte Strom durch alle Bauelemente fließt, vgl. Abb. 11.10. Eine einfache Serienschaltung besteht aus zwei Glühlämpchen hinter einander. Im Vergleich zu einer Schaltung, bei der nur ein Glühlämpchen an der Spannungsquelle hängt, leuchten bei der Serienschaltung die Glühlämpchen schwächer. Jedes der Lämpchen hat (gleiche Lämpchen vorausgesetzt) einen Widerstand R . Die Spannungsquelle liefert stets eine Spannung U . Haben wir nur ein Glühlämpchen, so erzeugt die Spannung in diesem Widerstand Glühlämpchen nach dem Ohm'schen Gesetz einen Strom $I = U/R$. Bei zwei Glühlämpchen fließt der gleiche Strom durch beide Lämpchen. Da wir jedoch die Spannung nicht verändern, ist der Strom geringer, da zwei Glühlämpchen den doppelten Widerstand von einem Lämpchen haben: $I_{2L} = U/(2R)$.

Wir haben hier den Gesamtwiderstand der beiden Lämpchen anschaulich als das doppelte des Widerstands eines Lämpchens bestimmt, d.h. wir haben die Einzelwiderstände einfach addiert. Allgemein erhalten wir für den Gesamtwiderstand aus n in Serie geschalteten Widerständen

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + \dots + R_n = \sum_{i=1}^n R_i . \quad (11.12)$$

⁴Nein, das gibt keine Kollision mit dem Prinzip der Energieerhaltung: zwar könnte ein idealer Supraleiter ohne Verluste einen Strom aufrecht erhalten, jedoch muss dieser Strom einmal induziert werden. Dazu ist Arbeit erforderlich. Außerdem ist die ganze Anlage so zu kühlen, dass der Supraleiter auch wirklich supraleitend bleibt – und dafür ist sehr viel Energie notwendig. Eine Magnetschwebbahn auf der Basis supraleitender Materialien wäre also kein Perpetuum Mobile.

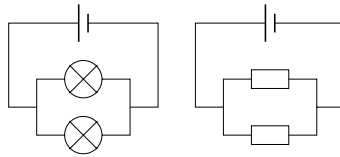


Abbildung 11.11: Parallelschaltung von zwei Lämpchen (links) und zwei Widerständen (rechts)

Brennt in der Serienschaltung eines der Lämpchen durch, so fließt kein Strom mehr, der Widerstand des Lämpchens wird unendlich. Dann ist auch der Gesamtwiderstand der Serienschaltung unendlich, es fließt also auch durch die anderen Lämpchen kein Strom, sie leuchten nicht.

Bei einer Parallelschaltung werden beide Lämpchen parallel an die Spannungsquelle angeschlossen, vgl. Abb. 11.11. Dann leuchten beide Lämpchen jeweils so hell, als seien sie alleine an die Spannungsquelle angeschlossen. Das heißt, dass der Strom, der durch jedes Lämpchen fließt, genauso groß ist wie in dem Fall, dass das Lämpchen alleine an der Batterie hängt. Der Gesamtstrom im Draht zur Spannungsquelle ist dann gleich der Summe der Ströme in den beiden Lämpchen, d.h. er ist doppelt so groß wie im Falle einer einzelnen Lampe. Dann muss der Gesamtwiderstand der beiden Lämpchen kleiner sein als der eines einzelnen Lämpchens und zwar derart, dass die Ströme sich wie beschrieben zum Gesamtstrom ergänzen.

Formal erhalten wir für den Gesamtstrom $I_{\text{ges}} = I_1 + I_2$, wobei I_1 und I_2 die Ströme in den beiden Lämpchen sind. Diese ergeben sich aus den Widerständen R_1 und R_2 der Lämpchen sowie der angelegten Spannung U zu $I_1 = U/R_1$ und $I_2 = U/R_2$, d.h. der Gesamtstrom ist $I_{\text{ges}} = U/R_1 + U/R_2$. Für den Gesamtwiderstand der Schaltung, also der beiden parallel geschalteten Lämpchen, muss ferner gelten $R_{\text{ges}} = U/I_{\text{ges}}$, also

$$R_{\text{ges}} = \frac{U}{\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \quad (11.13)$$

oder durch Bildung des Kehrwertes

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}. \quad (11.14)$$

Auch diese Beziehung lässt sich auf eine Parallelschaltung von n Widerständen erweitern

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (11.15)$$

Brennt in der Parallelschaltung eines der Lämpchen durch, so fließt weiterhin durch das andere Lämpchen ein Strom. Die Situation entspricht der, dass das Lämpchen alleine an der Spannungsquelle hängt. Formal können wir das wider erreichen, in dem wir den Widerstand des durchgebrannten Glühlämpchens unendlich setzen. Da wir bei der Parallelschaltung die Kehrwerte der Widerstände addieren, müssen wir für das durchgebrannte Lämpchen den Kehrwert von Unendlich, also Null⁵, addieren. Damit wird der Widerstand des anderen Glühlämpchens nicht verändert, wie wir es auch anschaulich erwarten.

Glühlämpchen und Widerstände können auch in Kombinationen von Serien- und Parallelschaltung auftreten. Abb. 11.12 sehen wir als Beispiel eine Serienschaltung aus einer einzelnen Glühlampe und einer Parallelschaltung von zwei Glühlämpchen. Formal können wir den Gesamtwiderstand berechnen, in dem wir zuerst für die Parallelschaltung gemäß (11.15) einen Ersatzwiderstand berechnen. Dann verbleibt eine Serienschaltung aus dem einzelnen Glühlämpchen und diesem Ersatzwiderstand. Der Gesamtwiderstand lässt sich dann gemäß (11.12) bestimmen. An Hand der Lämpchen könne wir uns auch überlegen, was wir

⁵Das ist nicht streng mathematisch, aber zum Arbeiten gut zu gebrauchen.

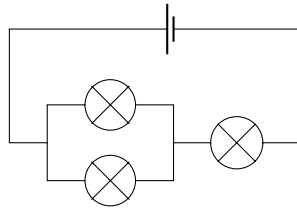


Abbildung 11.12: Kombination von Parallel- und Reihenschaltung

als Ersatzwiderstand für die Gesamtschaltung erhalten: sind alle Lämpchen identisch, so ist der Widerstand der Parallelschaltung halb so groß wie der eines einzelnen Lämpchens, d.h. wir erhalten für den Teil der Schaltung $R/2$. Der Gesamtwiderstand der Serienschaltung ist dann $1.5R$, d.h. der Gesamtwiderstand ist größer als der eines einzelnen aber kleiner als der von zwei in Serie geschalteten Lämpchen. Entsprechend ist der Strom geringer als bei einem Einzellämpchen aber größer als bei der Serienschaltung. Die rechte Lampe, durch die der Gesamtstrom fließt wird also heller leuchten als bei der Serienschaltung aber weniger hell als wenn sie alleine an der Spannungsquelle wäre. Durch die beiden Lämpchen in der Parallelschaltung fließt insgesamt der gleiche Strom wie durch die rechte Lampe, d.h. der Strom pro Lämpchen beträgt nur die Hälfte dessen in der rechten Lampe, die beiden Lämpchen leuchten also schwächer. Brennt die rechte Lampe durch, so sind alle Lämpchen dunkel, brennt eine der linken Lampen durch, so haben wir die Serienschaltung aus den beiden intakten Glühlampen, d.h. das linke Lämpchen wird etwas heller, das rechte etwas weniger hell leuchten.

11.3.6 Kondensator

Ein Kondensator besteht aus zwei Leitern, die durch einen Isolator getrennt sind. Das einfachste, auch in der Vorlesung verwendete Beispiel, sind zwei Metallplatten mit Luft dazwischen.

Durch eine angelegte Spannung lädt sich der Kondensator auf: die eine Platte hat einen Überschuss an positiver Ladung, die andere einen Überschuss an negativer Ladung. Trennt man den Kondensator anschließend von der Spannungsquelle, so bleibt er aufgeladen.

Die Ladungstrennung erzeugt also zwei geladenen Platten. Zwischen diesen bildet sich ein elektrisches Feld aus, das durch die bei der Ladungstrennung angelegte Spannung U und den Abstand d der Platten bestimmt ist:

$$E = \frac{U}{d} . \quad (11.16)$$

Das elektrische Feld innerhalb eines Kondensators ist um so größer, je höher die angelegte Spannung ist und je kleiner der Abstand zwischen den Platten.

Da beide Platten auch nach Trennen von der Spannungsquelle geladen bleiben, kann man einen Kondensator als einen Speicher für elektrische Ladungen betrachten. Das Speichervermögen des Kondensators hängt ab von seiner Kapazität C . Diese gibt an, wie viele Ladungen pro angelegtes Volt an Spannung im Kondensator gespeichert werden können. Die Kapazität lässt sich daher über folgenden Zusammenhang definieren

$$Q = C \cdot U \quad \text{mit } C \left[\frac{\text{C}}{\text{V}} \right] = [\text{F}] . \quad (11.17)$$

Diese Gleichung sagt aus, dass die in einem Kondensator gespeicherte Ladung proportional seiner Kapazität und der angelegten Spannung ist. Für die im Kondensator gespeicherte Energie W gilt

$$W = \frac{1}{2}QU^2 = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}Q^2/C . \quad (11.18)$$

Für die Kapazität eines Plattenkondensators mit der Fläche A der Kondensatorplatten gilt

$$C = \epsilon_o A/d \quad \text{mit} \quad \epsilon_o = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{Nm}^2}. \quad (11.19)$$

Die Kapazität eines Kondensators kann durch Einbringen von Materie zwischen die Platten verändert werden. Wird ein Dielektrikum in ein elektrisches Feld eingebracht, so nimmt die elektrische Feldstärke gegenüber der des Vakuums um das ϵ_r -fache ab, während die Kapazität auf das ϵ_r -fache steigt: $C = \epsilon_r \cdot C_o$. ϵ_r wird relative Dielektrizitätszahl oder Permittivitätszahl genannt.

Auch Kondensatoren können in Serie oder parallel geschaltet werden. Die Gesamtkapazität einer Serienschaltung von n Kondensatoren ergibt sich zu

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (11.20)$$

Bei der Parallelschaltung ergibt sich für die Gesamtkapazität

$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (11.21)$$

Die Gleichung für die Parallelschaltung können wir uns dadurch veranschaulichen, dass das Parallelschalten letztendlich eine Vergrößerung der Fläche des Kondensators bedeutet. Da nach (11.19) die Kapazität der Fläche des Kondensators proportional ist, wächst die Kapazität mit zunehmender Fläche. Daher werden bei der Parallelschaltung die Kapazitäten einfach addiert – wir addieren gleichsam die Flächen der einzelnen Kondensatoren zu einer Gesamtfläche und bestimmen daraus die Gesamtkapazität.

Für die Ladungstrennung wurde Arbeit verrichtet, in diesem Fall von der Spannungsquelle. Daher ist im Kondensator auch elektrische Energie gespeichert. Diese kann z.B. über einen Widerstand langsam entladen werden, wie im Beispiel des Herzschrittmachers in einer Übungsaufgabe diskutiert. Sie kann auch schnell entladen werden, z.B. um ein Blitzlicht zu zünden oder zur Erzeugung der elektrischen Impulse beim Druck auf eine Taste einer Computer-Tastatur.

Lade- und Entladevorgänge an einem Kondensator werden formal durch eine Differentialgleichung beschrieben. Für uns ist der Teil der Entladung von Interesse, da diese häufig als Zeitgeber verwendet werden kann, wie am Beispiel des Herzschrittmachers erläutert. Entladen wir einen Kondensator C über einen Widerstand R , so wirkt der Kondensator als Spannungsquelle: die im Kondensator gespeicherte Energie setzt Ladungen in Bewegung und durch den Widerstand fließt ein Strom, der sich aus dem Widerstand R und der durch den Kondensator angelegten Spannung U ergibt zu $I = U/R$. Der wesentliche Unterschied dieser Schaltung zum Stromkreis aus Spannungsquelle und Widerstand besteht in den Eigenschaften des Kondensators: eine Spannungsquelle liefert die ganze Zeit eine konstante Spannung und daher, da in unserem Beispiel auch der Widerstand konstant ist, einen konstanten Strom. Der Kondensator liefert anfangs eine Spannung U_o , entsprechend der auf dem Kondensator befindlichen Ladung $Q_o = CU_o$. Beginnt jedoch ein Strom zu fließen, so wird Ladung von einer zur anderen Kondensatorplatte transportiert und die Ladung Q des Kondensators nimmt ab. Dann nimmt auch die Spannung und der den Kondensator entladende Strom ab. Formal können wir diesen Zusammenhang durch eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{U}{R} = -\frac{Q}{CR} \quad \text{oder} \quad Q(t) = -RC \frac{dQ}{dt} \quad (11.22)$$

beschreiben. Darin gibt die linke Seite die Änderung der Ladung mit der Zeit, also den Strom, und die rechte Seite den Strom formuliert als den Quotienten aus Spannung und Widerstand. Diese Differentialgleichung ist eine Gleichung für eine Funktion $Q(t)$, d.h. für die Änderung der Ladung auf dem Kondensator. Formal entspricht sie der Differentialgleichung (5.40) in

Abschn. 5.5.6, die wir für die Bewegung mit Reibung aufgestellt haben. Wir suchen also für $Q(t)$ eine Funktion, deren Ableitung wieder die Funktion ergibt, multipliziert mit einer Konstanten. Als Ansatz verwenden wir eine Exponentialfunktion

$$Q(t) = Q_o \cdot e^{\lambda t} \quad (11.23)$$

und erhalten für die Ableitung

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \lambda Q_o \cdot e^{\lambda t} . \quad (11.24)$$

Vergleich mit (11.22) liefert $\lambda = -1/RC$ und damit als Lösung für den zeitlichen Verlauf der Ladung auf dem Kondensator

$$Q(t) = Q_o \cdot e^{-t/RC} . \quad (11.25)$$

Der Kondensator entlädt sich also gemäß einer abfallenden e-Funktion. Nach einer Zeit RC befindet sich noch $1/e \approx 0.37$ der ursprünglichen Ladung auf dem Kondensator. Mit der Ladung nimmt nach (11.17) auch die Spannung ab. Die Wahl des Widerstands R , über den die Ladung des Kondensators abfließt, beeinflusst die Zeitkonstante RC . Durch geeignete Wahl des Widerstandes R kann ein sich entladender Kondensator daher als Signalgeber für ein bestimmtes Zeitsignal verwendet werden – genau das ist seine Aufgabe im Herzschrittmacher.

11.3.7 Elektrische Leistung

In der Mechanik haben wir die Leistung P eingeführt als die während einer Zeit t verrichtete Arbeit W :

$$P = \frac{W}{t} \quad [W] = \left[\frac{J}{s} \right] . \quad (11.26)$$

Im elektrischen Stromkreis können wir ebenfalls eine Leistung einführen. Um diese zu veranschaulichen, können wir eine Situation analog zur Erhaltung der mechanischen Energie betrachten. (1) Das Potential gibt die potentielle Energie von Ladungen. (2) Eine Potentialdifferenz (Spannung) beschleunigt diese Ladungen. Dabei wird die potentielle Energie der Ladungen in kinetische Energie der Ladungen umgewandelt. (3) Der elektrische Strom gibt die Menge der Ladungen pro Zeit. Oder Zusammengefasst: das Produkt aus Spannung und Strom ist ein Produkt aus Energie pro Ladung und Ladung pro Zeit

$$\text{Spannung} \cdot \text{Strom} = \frac{\text{Energie}}{\text{Ladung}} \cdot \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Energie}}{\text{Zeit}} = \text{Leistung} . \quad (11.27)$$

Die elektrische Leistung (z.B. die Watt, die ihr Fön, Kühlschranks oder sonstiges hat) in einem Stromkreis ist also gegeben durch

$$P = U \cdot I \quad [W] = [VA] . \quad (11.28)$$

Aus dieser Beziehung lässt sich der im Gerät fließende Strom berechnen (Spannung sind 230 V, Leistung ist bekannt).

11.3.8 Strom im Körper

Um einen Strom durch einen Körper zu treiben, bedarf es, ebenso wie beim Stromkreis, eines Potentialgefälles bzw. einer angelegten Spannung. Ein Vogel, der sich auf eine Leitung einer Hochspannungsleitung setzt, sitzt mit beiden Beinen auf den etlichen Kilovolt – daher gibt es keine Potentialdifferenz und es fließt kein Strom durch den Vogel, vgl. Abb. 11.13. Erst wenn er sich entscheidet, mit einem Bein auf der Hochspannungsleitung und mit dem anderen auf dem geerdeten Gittermast zu stehen, würde die Spannungsdifferenz zwischen Leitung und Gittermast/Erde zu einem Strom führen.

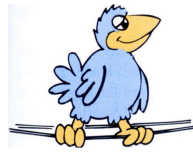


Abbildung 11.13: Ohne Potentialdifferenz fließt kein Strom durch den Körper des Vogels [22]

Strom I [A]	Effekt
0.001	gerade fühlbar
0.005	schmerzhaft
0.010	unwillkürliche Muskelkontraktion
0.015	Verlust der Kontrolle über Muskeln
0.070	Herzrythmusstörungen, bei Dauer > 1 s tödlich

Tabelle 11.1: Wirkungen eines elektrischen Stroms im Körper

Eher erdgebundene Wesen haben es etwas schwieriger als Vögel, da sie in der Regel immer mit mindestens einem Bein Kontakt zum Erdboden haben. Dadurch besteht bei jedem berührten Potential eine Potentialdifferenz zwischen dem Berührungspunkt und dem Erdboden. Diese Spannung kann einen Strom treiben wobei die biologischen Konsequenzen abhängen von

- der Stärke des Stroms, vgl. Tabelle 11.1,
- dem Weg des Stroms im Körper.

Ströme, die einen Pfad durch das Herz nehmen (z.B. Berührung unterschiedlicher Potentiale mit den beiden Händen oder unterschiedliche Potentiale an einer Hand und den Füßen) sind dabei gefährlicher als Ströme, die sich auf die Extremitäten beschränken (z.B. Potentialdifferenz zwischen Fingerspitze und Ellenbogen). Ab einer bestimmten Stromstärke ist der Weg des Stroms durch den Körper jedoch egal, da dann die durch den Strom bewirkten elektrochemischen Vorgänge zu einer Vergiftung führen.

Der elektrische Shock entsteht durch einen Strom im Körper, der von einer Spannung (Potentialdifferenz) getrieben wird. Die eigentliche Ursache für den elektrischen Shock ist daher die Spannung, obwohl der Strom für den Schaden verantwortlich ist.

Um die Ströme in Tabelle 11.1 im Zusammenhang mit einer an den Körper angelegten Spannung besser bewerten zu können, benötigen wir den elektrischen Widerstand der Haut des menschlichen Körpers. Für trockene Haut beträgt der Widerstand $R \approx 100\,000\ \Omega$, d.h. um einen Strom von 10 mA (unwillkürliche Muskelkontraktion) in einem Körper mit trockener Haut zu erzeugen, ist eine Spannung von ungefähr 1000 V erforderlich. Feuchte Haut dagegen hat nur einen Widerstand von $R \approx 1000\ \Omega$, d.h. mit einer Spannung von 1000 V würde bereits ein Strom von 1 A durch den Körper fließen, selbst bei einer Spannung von 240 V würde der Strom bereits 0.24 A betragen, also tödlich sein – das ist der Grund, weshalb es keine so gute Idee ist, den Fön in die Badewanne mit zu nehmen. Eine 4.5 V Blockbatterie (das ist die flache mit den beiden Metallstreifen oben drauf) kann man leicht auf Funktionalität prüfen, in dem man die Zunge zwischen die beiden Metallstreifen legt. Aufgrund des geringen Widerstands in der feuchten Mundhöhle fließt dabei ein Strom von 0.004 A – gut wahrnehmbar, aber noch nicht zu unangenehm.

11.4 Magnetfelder

Die Anziehungskraft von Magneteisenstein für bestimmte Materialien ebenso wie seine Ausrichtung nach Norden war bereits den Griechen bekannt. Auch zwischen zwei Magnetei-

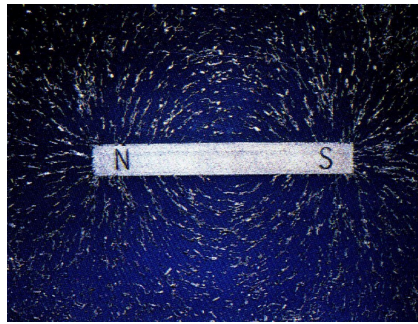


Abbildung 11.14: Feldlinien um einen Stabmagneten

sensteinen bzw. zwei Magneten gibt es eine Wechselwirkung, anziehend oder abstoßend.⁶ Insgesamt finden wir bei Magneten also Phänomene, die uns von den elektrischen Ladungen bekannt sind:

- Magnete üben Kräfte auf einander aus. Die Analogie ist die Kraft zwischen elektrischen Ladungen, beschrieben durch das Coulomb-Gesetz.
- die ausgeübte Kraft nimmt mit zunehmendem Abstand ab. Das kennen wir von der $1/r^2$ -Abhängigkeit des Coulomb-Gesetzes.
- die Kräfte können anziehend oder abstoßend sein. Bei elektrischen Ladungen galt: gleichnamige Ladungen stoßen sich ab, ungleichnamige ziehen sich an.
- Magnete können auch auf ursprünglich nicht magnetische Materialien Kräfte ausüben. Bei elektrischen Ladungen erfolgt dies durch die Polarisierung der Materie, vgl. die ungeladenen Papierschnitzel, die an den Kamm fliegen, oder der Luftballon, der an der Decke haftet.
- ein Magnet kann verwendet werden, um ein geeignetes anderes Material in einem Magneten zu wandeln. Elektrische Ladungen können verwendet werden, um durch Induktion auf einem Leiter Ladungstrennung zu bewirken.

Allerdings gibt es einen fundamentalen Unterschied zwischen den elektrischen Ladungen und den von ihnen erzeugten Feldern einerseits und den magnetischen Feldern andererseits:

!!! Es gibt keine magnetischen Monopole !!!

Während elektrische Ladungen als positiv oder negativ geladener Körper als Ladungen einer einzigen Polarität auftreten können, gibt es keine einzelnen Magnetpole. Egal wie ein Magnet geformt ist, er hat stets einen Nordpol und einen Südpol, sie können aber niemals einen einzelnen Nordpol oder einen einzelnen Südpol erzeugen. Dies Phänomen ist aus der Entstehung von Magnetismus durch Ströme (vgl. Abschn. 11.4.1) relativ leicht einsichtig, hat jedoch historisch dazu geführt, dass der Zusammenhang zwischen elektrischen und magnetischen Erscheinungen erst sehr spät entdeckt wurde – obwohl beide untrennbar verbunden sind, wie durch die Maxwell'schen Gleichungen beschrieben, vgl. Abschn. 11.4.3.

Der Mangel an magnetischen Monopolen bedeutet, dass es keine so einfachen magnetischen Felder gibt wie das elektrische Feld einer Punktladung. Ein einfaches magnetisches Feld ist das eines Stabmagneten, d.h. einer linearen Konstruktion aus einem magnetischen Nord- und einem magnetischen Südpol, vgl. Abb. 11.14. Wir könnten ein entsprechendes elektrisches Feld auch dadurch erzeugen, dass wir zwei entgegengesetzte elektrische Ladungen, also einen Dipol, verwenden. Die Feldlinien gehen in beiden Fällen von den Polen bzw. Ladungen

⁶Um 1600 wurde erstmals vorgeschlagen, dass sich die Ausrichtung der Kompassnadel dadurch verstehen lässt, dass die Erde selbst ein Magnet ist und sich die beiden Magnetfelder von Erde und Kompassnadel so überlagern, dass die anziehenden bzw. abstoßenden Kräfte zwischen den Polen die Ausrichtung bewirken.

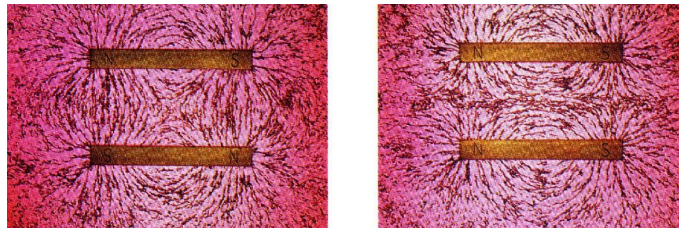


Abbildung 11.15: Magnetfeldlinien zwischen zwei Stabmagneten. Links stehen sich ungleichnamige, rechts gleichnamige Pole gegenüber

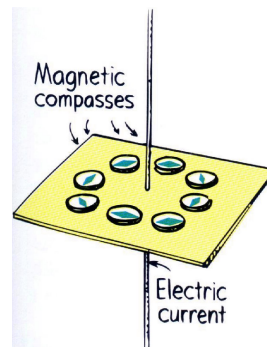


Abbildung 11.16: Rechte-Hand-Regel zur Richtung des Magnetfeldes um einen stromdurchflossenen Draht [22]

aus. In dem der jeweils anderen Ladung bzw. dem anderen Pol abgewandten Halbraum verlaufen die Feldlinien ähnlich dem, was wir von einer Ladung einer Polarität erwarten würden. Im Bereich zwischen den Ladungen/Polen bilden sich geschlossene, die Ladungen/Pole verbindenden Feldlinien aus, da sich die entgegengesetzten Ladungen/Polen anziehen.

Wenn wir die Kräfte zwischen Magneten betrachten, müssen wir zwei Stabmagneten verwenden, so dass wir jeweils gleichnamige oder ungleichnamige Pole einander näher bringen können. Im linken Teilbild von Abb. 11.15 sind die beiden Magnete so angeordnet, dass sich jeweils ungleichnamige Pole gegenüber stehen. Dann erkennen wir zwischen den beiden ungleichnamigen Polen ein Muster, wie wir es auch von einem einzelnen Stabmagneten bzw. im elektrischen Feld von zwei Ladungen entgegengesetzter Polarität erwarten: zwischen den beiden ungleichnamigen Polen bilden sich geschlossene Feldlinien, die beiden ungleichnamigen Pole ziehen sich an. Im linken Teil ist der untere Magnet umgedreht, so dass sich gleichnamige Pole gegenüber stehen. In diesem Fall bildet sich kein durchgehendes Feldlinienmuster sondern die von den Polen ausgehenden Feldlinien werden in der Mitte zwischen den Polen nach außen verbogen. Damit haben wir keine durchgehenden Kraftlinien, d.h. ein Pol könnte sich nicht auf den anderen zu bewegen, die beiden gleichnamigen Magnetfeldpole stoßen sich also ab. Ein entsprechendes Bild des elektrischen Feldes erhalten wir, wenn wir zwei gleichnamige Ladungen betrachten.

11.4.1 Ströme und Magnetfelder

Ströme (oder allgemein bewegte Ladungen) erzeugen Magnetfelder. Dies kann einerseits verwendet werden, um den Magnetismus im Magneteisenstein bzw. im Haushaltsmagneten zu erklären. Es ist andererseits auch die Grundlage für viele technische Anwendungen vom Elektromagneten über den Transformator bis hin zur elektromagnetischen Welle (Radio, Fernsehen, Mikrowelle).

Die Ablenkung einer Kompassnadel unter einem stromdurchflossenen Draht wurde 1820 von Oersted entdeckt. Diese Entdeckung bildet die Grundlage für das Verständnis des Ma-

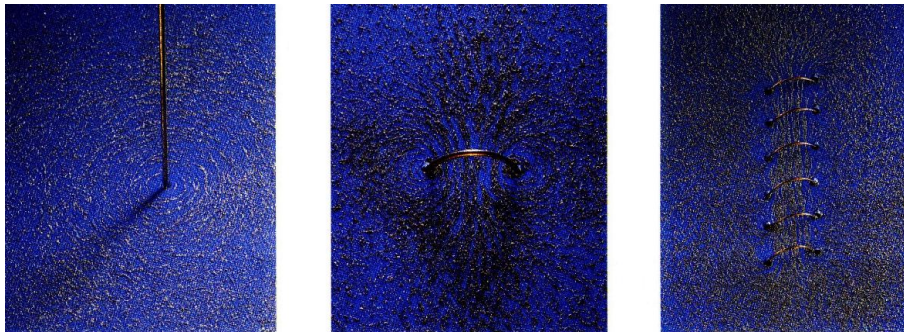


Abbildung 11.17: Magnetfeld um einen stromdurchflossenen Draht (links), eine Leiterschleufe (Mitte) und eine Spule (rechts)

gnetismus und die Verknüpfung von elektrischen und magnetischen Phänomenen im Elektromagnetismus, wie er 1864 von Maxwell in den gleichnamigen Gesetzen formuliert wurde. Oersted's Entdeckung war überraschend und verwirrend zugleich, da zu seiner Zeit bereits bekannt war, dass elektrische Ladungen kein Magnetfeld produzieren. Seine Beobachtung zeigte, dass diese Aussage nur für ruhende elektrische Ladungen gilt, nicht jedoch für bewegte Ladungen, also Ströme. Mit Hilfe der Kompassnadel konnte Oersted zeigen, dass der stromdurchflossene Draht von einem kreisförmigen Magnetfeld umgeben ist, wobei die Richtung des Feldes durch die Rechte-Hand-Regel gegeben ist: wenn der Daumen der rechten Hand in die Richtung des Stromes zeigt, umfassen die Finger den Draht in der Richtung des magnetischen Feldes, vgl. Abb. 11.16.

Ein Draht wird von einem kreisförmigen Magnetfeld umgeben. Wickelt man den Draht zu einer Schlaufe, so überlagern sich die an jedem Punkt des Drahtes entstehenden kreisförmigen Magnetfelder so, dass in der Mitte der Schlaufe ein annähernd paralleles Magnetfeld entsteht, vgl. Abb. 11.17. Außerhalb der Schlaufe erkennen wir wieder das annähernd kreisförmige Feld, wie vom stromdurchflossenen Draht erwartet. Wickeln wir einen Draht zu einer Spule, d.h. einer größeren Zahl paralleler Drahtschlaufen, so erhalten wir ein Magnetfeld, das dem eines Stabmagneten entspricht. Das ist auch das Bauprinzip eines Elektromagneten. Haben wir zwei parallele Drähte, die in gleicher Richtung von einem Strom durchflossen werden, so sind die magnetischen Felder zwischen den beiden entgegen gesetzt und die Drähte stoßen sich ab. Werden die beiden Drähte von Strömen in entgegen gesetzter Richtung durchflossen, so sind die Felder zwischen ihnen gleich gerichtet und die Drähte ziehen sich an. Diese Kraft wird zur Definition der SI-Einheit der Stromstärke verwendet.

Auch der Permanentmagnet ist ein Elektromagnet obwohl Sie keine Spannungs- oder Stromquelle zu seinem Betrieb benötigen. Zum Verständnis dieses Phänomens müssen wir einen Blick in die Struktur der Materie werfen. Materie besteht aus Atomen. In diesen Atomen kreisen Elektronen um den Atomkern. Jedes Elektron ist eine bewegte Ladung, die sich kreisförmig um den Kern bewegt. Damit entspricht das Elektron einem Strom, wie er in der Drahtschleufe fließt. Jedes Elektron erzeugt also ein winziges Magnetfeld, es hat ein magnetisches Moment. Diese magnetischen Momente überlagern sich. Dabei heben sich die Felder der meisten Elektronen auf. Lediglich in magnetischen Materialien wie Eisen, Nickel oder Cobalt, finden sich einzelne freie Elektronen, deren Felder nicht aufgehoben werden. Diese Elektronen richten sich in kleinen Bereichen (Domänen) parallel aus, so dass sich die Felder zu einem größeren magnetischen Feld überlagern. Materialien, in denen derartige Domänen gebildet werden können, werden als ferromagnetisch bezeichnet.

In einem Stück ferromagnetischen Materials befindet sich eine Vielzahl von Domänen, die in der Regel alle unterschiedlich ausgerichtet sind. Dann heben sich die Magnetfelder der Domänen auf und das Material ist nicht magnetisiert. Werden die Domänen durch ein äußeres Magnetfeld ausgerichtet, so ist das Material magnetisiert, wir haben einen Permanentmagneten.

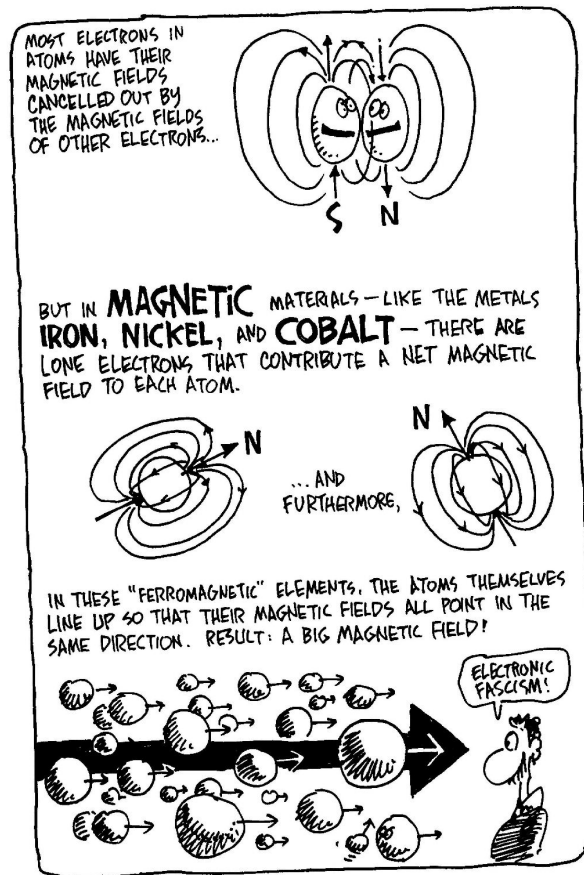


Abbildung 11.18: Ferromagnetismus (Gonick & Huffman, 1991)

Die Ausrichtung der Domänen ist am einfachsten, wenn diese recht frei beweglich sind, d.h. wenn das ferromagnetische Material stark erhitzt wurde. Dann reicht bereits ein relativ schwaches äußeres Magnetfeld, um die Domänen auszurichten. Wird das Material dann abgekühlt, so wird die Ausrichtung der Domänen gleichsam 'eingefroren'. Umgekehrt bewirkt ein starkes Erhitzen eines Magneten eine freiere Beweglichkeit der Domänen. Dies führt zu einer zufälligeren Anordnung und damit zu einer Verringerung des resultierenden Magnetfeldes – bis zum Verlust desselben.

Dieses Modell erklärt einige Eigenschaften des Magnetismus:

- es lassen sich keine magnetischen Monopole erzeugen, da die 'Stromschleife' Elektron stets ein kleines Dipolfeld erzeugt.
- bei der Teilung von Permanentmagneten erhält man immer wieder Dipole und keine Monopole, da sich das Prinzip der Felderzeugung durch die kreisenden Elektronen in den geteilten Stücken nicht verändert, lediglich die Zahl der kreisenden Elektronen wird geringer.
- Materialien lassen sich magnetisieren, wenn sie einem starken Magnetfeld ausgesetzt sind (entsprechend der Polarisation im elektrischen Feld). Auch hier gilt, dass magnetisierbare Materialien von beiden Magnetfeldpolen angezogen werden, ebenso wie wir es auch bei den polarisierbaren Materialien und dem elektrischen Feld kennen gelernt haben.
- Permanentmagnete sind nicht ganz so permanent: wenn man die Anordnung der Domänen

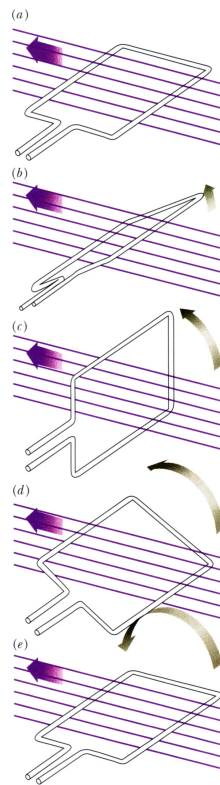


Abbildung 11.19: Funktionsprinzip des Generators

durch Wärme oder starke mechanische Belastung (Stöße) stört, so verringert sich das Magnetfeld.

11.4.2 Elektromagnetische Induktion

Bewegte Ladungen sind von einem Magnetfeld umgeben. Faraday stellte sich in der ersten Hälfte des 19. Jahrhunderts die Frage, ob auch die Umkehrung zu trifft: kann ein Magnetfeld bewegte Ladungen, d.h. einen Strom erzeugen? Wickelt man einen Draht um einen Magneten, so fließt kein Strom. Das entspricht der Situation, die Oersted kannte: so, wie eine ruhende Ladung kein Magnetfeld erzeugt, erzeugt ein ruhendes Magnetfeld keinen Strom. Erst ein veränderliches magnetisches Feld, also die Bewegung des Magneten in einer Drahtschleife (oder die Bewegung der Drahtschleife über den Magneten) erzeugt einen Strom. Dieses Phänomen wird als elektromagnetische Induktion bezeichnet. Dieses nach Faraday benannte Gesetz bildet die Grundlage für technische Anwendungen wie Transformatoren, Generatoren und Elektromotoren.

Beim Generator wird eine Spannung (oder elektromotorische Kraft) aus der Bewegung eines Leiters in einem stationären magnetischen Feld erzeugt. Abbildung 11.19 illustriert das Prinzip: eine Leiterschleife wird in einem Magnetfeld gedreht. (a) Am Anfang der Bewegung liegt die Leiterschleife parallel zum magnetischen Feld, d.h. es gehen keine Feldlinien durch die Leiterschleife. Mit Beginn der Rotation nimmt die Zahl der durch die Schleife gehenden Feldlinien schnell zu, so dass eine hohe Spannung induziert wird. (b) Mit Fortsetzung der Rotation steigt die Zahl der durch die Spule gehenden Feldlinien weiter, jedoch ist die Steigerung langsamer und damit die induzierte Spannung geringer. (c) Die induzierte Spannung wird Null, wenn die Leiterschleife senkrecht zum Feld steht, da sich dann die Zahl der Feldlinien durch die Spule kaum verändert. (d) Mit der weiteren Rotation nimmt die Zahl der Feldlinien durch die Leiterschleife ab und die Spannung nimmt aufgrund der Veränderung

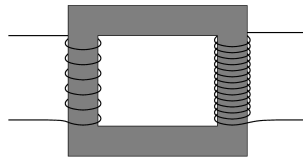


Abbildung 11.20: Transformator

des magnetischen Flusses zu, allerdings in die entgegen gesetzte Richtung. (e) Die Spannung nimmt auf ein Maximum zu, wenn die Leiterschleife parallel zum Feld liegt, nimmt bei der weiteren Rotation wieder ab, bis die Leiterschleife senkrecht zum Feld steht und wieder zu, bis die Leiterschleife eine volle Umdrehung vollführt hat und die Situation wie in (a) wieder hergestellt ist.

Die Spannung, die auf diese Weise mit einem Generator erzeugt wird, ist eine Wechselspannung, d.h. eine Spannung, die mit der Zeit zu- und abnimmt und das Vorzeichen wechselt. Formal lässt sich die Wechselspannung beschreiben als

$$U(t) = U_o \cos \omega t \quad (11.29)$$

mit $\omega = 2\pi f$ als der Kreisfrequenz und f als der Frequenz. Sie können sich diesen Zusammenhang formal aus der Zahl der Feldlinien, die die Spule durchsetzen, also dem magnetischen Fluss, veranschaulichen. Dazu benötigen Sie jeweils die Projektion der Spule auf die Fläche senkrecht zu den Feldlinien. Diese ist aber genau durch die Winkelfunktion gegeben. Technisch wird diese Anordnung teilweise so modifiziert, dass nach der halben Umdrehung die Anschlüsse der Leiterschleife durch einen Kommutator vertauscht werden. Dann nimmt die induzierte Spannung weiter ab und zu mit einem Maximum wenn der Leiter parallel zum Feld ist und einem Minimum wenn er senkrecht zum Feld steht. Da jedoch jedesmal, wenn die Spannung das Vorzeichen wechselt, auch die Anschlüsse der Leiterschleife vertauscht werden, hat die Spannung stets das gleiche Vorzeichen – die negativen Halbwellen im Kosinus werden nach oben geklappt und wir können für die Spannung schreiben

$$U = U_o |\cos \omega t| . \quad (11.30)$$

Diese Form der Spannung wird als pulsierende Gleichspannung bezeichnet, da die Spannung zwar stets in eine Richtung weist jedoch vom Betrag nicht konstant ist. Die im Generator erzeugte elektrische Energie kommt aus der kinetischen Energie der Bewegung des Leiters. Alltägliche Beispiele sind der Fahrraddynamo oder die Lichtmaschine im Auto, auch die Generatoren in Kraftwerken basieren auf diesem Prinzip.

Ein Transformator besteht aus zwei Spulen, die durch einen Eisenkern verbunden sind. Eine Spule, als primäre Windung bezeichnet, wird mit einer Wechselspannungsquelle verbunden. Der Strom durch die Spule bewirkt ein Magnetfeld ähnlich dem eines Stabmagneten im Eisenkern. Da die Spule von einem Wechselstrom durchflossen wird, ändert sich die Polarität des Magnetfelds ebenfalls, d.h. im Eisenkern entsteht ein veränderliches Magnetfeld. Dieses veränderliche Magnetfeld erzeugt eine Spannung in der zweiten Spule. Magnetfeld und erzeugte Spannung hängen von der Zahl der Windungen der Spulen ab:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{oder} \quad \frac{U_1}{n_1} = \frac{U_2}{n_2} = \text{const} . \quad (11.31)$$

Darin sind U_1 und U_2 die Spannungen auf der Primär- und der Sekundärseite des Transformators und n_1 und n_2 die Windungszahlen der Spulen auf den entsprechenden Seiten. Das Verhältnis $n_2 : n_1$ ist das Übersetzungsverhältnis des Transformators. Da die elektrische Leistung auf beiden Seiten des Transformators die gleiche ist, muss gelten $P_1 = U_1 I_1 = P_2 = U_2 I_2$, d.h. für die Ströme ergibt sich $I_2/I_1 = U_1/U_2$: die Ströme transformieren sich also gerade im umgekehrten Verhältnis wie die Spannungen.

11.4.3 Ergänzung: Maxwell'sche Gesetze

Maxwell hat die Gleichungen, die die Zusammenhänge zwischen elektrischen und magnetischen Feldern sowie Ladungen und Strömen beschreiben, in vier Gleichungen zusammengefasst. Für die Gleichungen selbst konnte Maxwell auf bereits bekannte Gesetze zurückgreifen, sein Verdienst ist die Zusammenfassung der Gleichungen, die Vereinheitlichung der Formulierungen zum Aufzeigen der Gemeinsamkeiten elektrischer und magnetischer Phänomene sowie die elektromagnetische Welle als Folgerungen aus diesen Gesetzen.

Die ersten beiden Gleichungen beschäftigen sich mit den Ursachen der Felder. Für das elektrische Feld war der Zusammenhang zwischen den felderzeugenden Ladungen und dem Feld selbst bereits durch Gauß untersucht und formuliert worden. In integraler Form ergibt sich das Gauß'sche Gesetz als die 1. Maxwell'sche Gleichung zu:

$$\oint_{O(V)} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV. \quad (11.32)$$

Auf der rechten Seite der Gleichung steht das Integral einer Ladungsdichte ρ in einem Volumenelement V , d.h. wir erhalten bei Ausführung der Integration die im Volumen V enthaltene Ladung. Diese bestimmt den Fluss des elektrischen Feldes \vec{E} durch die Oberfläche $O(V)$ dieses Volumens, wie links beschrieben. Das Gesetz sagt also aus: der elektrische Fluss (oder anschaulicher die Zahl der Feldlinien) durch die Oberfläche eines Volumens ist gleich der im Volumen enthaltenen Ladung. Diese Form des Gesetzes ist die allgemeine Formulierung für den Zusammenhang zwischen elektrischer Ladung und elektrischem Feld. Wir haben in (11.4) eine wesentlich einfachere Gleichung für den Spezialfall einer Punktladung betrachtet. Beachten Sie, dass der Fluss des elektrischen Feldes durch die Oberfläche verschwindet, wenn wir eine positive und eine gleich große negative Ladung im Volumen haben – dann heben sich die beiden Ladungen auf und die Ladungsdichte und damit die Gesamtladung werden Null. Das bedeutet jedoch nicht, dass dann auch das elektrische Feld verschwindet (das tut es nicht, vgl. Abb. 11.4), sondern nur, dass genauso viele Feldlinien in das Volumen hinein gehen wie aus ihm heraus.

Das 2. Maxwell'sche Gesetz beschäftigt sich entsprechend mit den Quellen eines magnetischen Feldes. Dieses lässt sich analog zum Gauß'schen Gesetz des elektrischen Feldes als Gauß'sches Gesetz des magnetischen Feldes formulieren:

$$\oint_{O(V)} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (11.33)$$

Es besagt, dass der magnetische Fluss durch die Oberfläche eines Volumens stets Null ist. Das ist eine Konsequenz der Tatsache, dass es keine magnetischen Monopole gibt: Sie können in ein Volumen immer nur einen Nord- und einen Südpol gemeinsam packen. Dann gehen jedoch gleich viele Feldlinien in das Volumen hinein wie aus ihm heraus und der magnetische Fluss verschwindet.

Die beiden anderen Maxwell'schen Gleichungen beschäftigen sich mit der Erzeugung von elektrischen und magnetischen Feldern durch Ströme oder veränderliche magnetische und elektrische Felder. Das erste dieser Gesetze geht auf Faraday zurück und wird als Faraday'sches Induktionsgesetz bezeichnet:

$$\oint_{C(S)} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (11.34)$$

Auf der rechten Seite der Gleichung gibt das Integral den magnetischen Fluss (also die Zahl der Magnetfeldlinien) durch eine Fläche S ; die rechte Seite insgesamt gibt damit die Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche S . Die linke Seite gibt das Integral über das elektrische Feld entlang der Begrenzungskurve $C(S)$ dieser Fläche.⁷ Einfach formuliert besagt

⁷Veranschaulichen Sie sich die Fläche als durch eine Drahtschleife bestimmt. Dann gibt die linke Seite der Gleichung ein Maß für die elektromotorische Kraft, die durch die Änderung des Magnetfeldes in der Leiterschleife induziert wird.

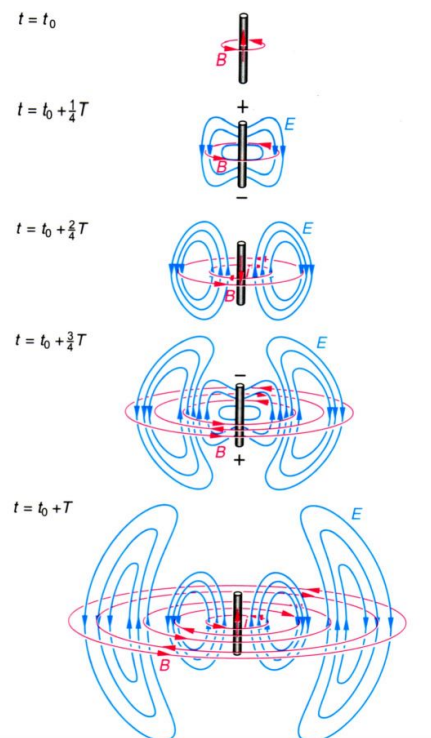


Abbildung 11.21: Ausbildung einer elektromagnetischen Welle durch eine hin und her schwingende Ladung

diese Gleichung, dass eine Veränderung des magnetischen Flusses durch eine Fläche eine elektromotorische Kraft in der Umrandung dieser Fläche erzeugt. Das negative Vorzeichen gibt die Richtung: der in Folge der Induktion fließende Strom muss so gerichtet sein, dass das von ihm erzeugte Magnetfeld dem ursprünglichen Feld entgegen gesetzt ist (Lenz'sche Regel). Wäre das nicht der Fall, so würden sich Magnetfeld und induzierte elektromotorische Kraft unendlich verstärken können.

Die 4. Maxwell'sche Gleichung ist das Ampere'sche Gesetz, formal geschrieben als

$$\oint_{C(S)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (11.35)$$

Auch hier betrachten wir wieder eine Fläche S mit einer Umrandung $C(S)$. Auf der linken Seite steht das in der Umrandung $C(S)$ dieser Fläche hervorgerufene Magnetfeld. Auf der rechten Seite stehen die Quellen des Magnetfeldes: im ersten Term der Strom und im zweiten Term ein veränderliches elektrisches Feld. Der Strom im ersten Term ist als Stromdichte \vec{j} integriert über die Fläche formuliert, d.h. es werden alle 'Stromfäden' aufsummiert. Die Änderung des elektrischen Fluss durch die Fläche im zweiten Term ist entsprechend der Änderung des magnetischen Fluss im Faraday'schen Induktionsgesetz formuliert.

11.4.4 Elektromagnetische Wellen

Die wichtigste Folgerung aus den Maxwell'schen Gleichungen ist die Existenz der elektromagnetischen Welle. Diese können wir uns anschaulich aus der Kombination von Faraday'schem Induktionsgesetz und Ampere'schem Gesetz herleiten. Beginnen wir mit einem einfachen Draht (Antenne). In diesem fließt ein Strom. Dieser Strom erzeugt ein Magnetfeld, das den Draht kreisförmig umgibt. Mit jeder Veränderung des Stromes verändert sich auch das Magnetfeld. Verringert sich der Strom jetzt (z.B. Wechselstrom), so verändert sich auch das ma-

netische Feld. Ein veränderliches magnetisches Feld kann jedoch in einem Leiter eine Spannung induzieren bzw. ein elektrisches Feld erzeugen. Dieses elektrische Feld ist veränderlich, da das felderzeugende magnetische Feld veränderlich ist. Dann umgibt sich das elektrische Feld seinerseits wieder mit einem magnetischen Feld und so weiter. Wir erhalten also ein nach auswärts fortschreitendes Muster aus zeitlich veränderlichen elektrischen und magnetischen Feldern. Da in unserem Draht ein Wechselstrom fließt, wird aber auch im Innern fortwährend ein neues Muster aus elektrischen und magnetischen Feldern erzeugt, so dass sich nicht eine einzelne Störung sondern eine elektromagnetische Welle ausbreitet.

Beispiele für elektromagnetische Wellen sind Licht, Radiowellen, Mikrowellen sowie Röntgen- und Gammastrahlung. Diese verschiedenen Formen der elektromagnetischen Welle unterscheiden sich nur durch ihre Frequenz f (vgl. Teil 2 der Vorlesung). Alle elektromagnetischen Wellen breiten sich im Vakuum mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 300\,000\text{ km/s}$ aus. Außer durch die Frequenz lässt sich elektromagnetische Strahlung auch durch die Wellenlänge λ charakterisieren mit

$$c = \lambda f . \quad (11.36)$$

In einem Medium ist die Lichtgeschwindigkeit geringer, dort gilt

$$v = \lambda f \quad (11.37)$$

mit v als der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichts.

11.5 Elektrische Ladungen in elektrischen und magnetischen Feldern

Eine elektrische Ladung wird in einem elektrischen Feld entlang der Feldlinien beschleunigt. Das ist die Definition der Feldlinien als Kraftlinien, die die Kraft auf eine Testladung beschreiben. Oersted's Versuch mit der Kompassnadel hat überrascht, da zu seiner Zeit davon ausgegangen wurde, dass Ladungen und magnetische Felder nichts mit einander zu tun haben. Das überraschende Moment entstand durch den Unterschied zwischen ruhender und bewegter Ladung: eine ruhende Ladung erzeugt kein Magnetfeld, eine bewegte Ladung (ein Strom oder das kreisende Elektron in einem Atom) dagegen erzeugt eins. Diese Unterscheidung zwischen ruhender und bewegter Ladung gilt auch, wenn wir die Kraft eines Magnetfeldes auf eine Ladung betrachten: ist die Ladung in Ruhe, so übt das Magnetfeld keine Kraft auf die Ladung aus, beschleunigt sie also nicht.

Erst wenn sich die Ladung bewegt, kann das Magnetfeld eine Kraft ausüben – und zwar über das durch die Bewegung der Ladung erzeugte Magnetfeld, vgl. Abb. 11.22. Bewegt sich die Ladung parallel zu den Magnetfeldlinien, so umgibt die Ladung ein kleines kreisförmiges Magnetfeld, die Achse dieses magnetischen Moments ist parallel zur Magnetfeldlinie. Dadurch wirken keine Kräfte auf das magnetische Moment und die Ladung wird nicht beschleunigt. Bewegt sich das Elektron jedoch senkrecht zum magnetischen Feld, so ist auch sein magnetisches Moment senkrecht zum Feld ausgerichtet – der Nordpol des magnetischen Moments sieht eine andere Feldlinie als der Südpol. Das ist eine Konfiguration mit hoher potentieller Energie. Da jedes System bestrebt ist, die enthaltenen potentielle Energie zu minimieren, greift eine Kraft an, die bestrebt ist, das magnetische Moment des bewegten Elektrons parallel zu den Feldlinien aus zu richten. Da die Bewegungsrichtung des Elektrons mit der des magnetischen Moments übereinstimmt, bewirkt diese versuchte Ausrichtung des magnetischen Moments auch eine Änderung der Bewegungsrichtung, eine Beschleunigung also. Da die Kraft senkrecht auf der Bewegungsrichtung steht, ergibt sich aus dieser Beschleunigung keine Zunahme der Schnelligkeit sondern eine Änderung der Bewegungsrichtung: ein senkrecht zu einem Magnetfeld einfliegendes Elektron wird vom Feld auf eine Kreisbahn gezwungen. Diese Kraft wird nach ihrem Entdecker als Lorentz-Kraft bezeichnet. Sie steht senkrecht sowohl auf dem Magnetfeld als auch auf der Geschwindigkeit des Elektrons:

$$\vec{F}_L = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) . \quad (11.38)$$

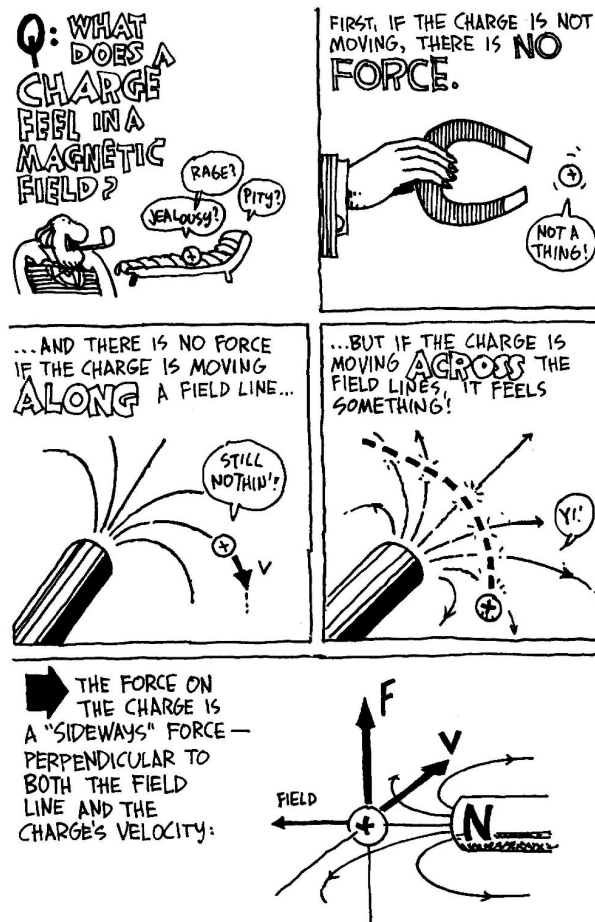


Abbildung 11.22: Bewegung einer Ladung in einem magnetischen Feld [17]

In der formalen Darstellung wurde das Kreuzprodukt verwendet. Damit ist zum einen klar, dass nur die Komponente der Geschwindigkeit senkrecht zum Feld für die Ablenkung relevant ist. Die vektorielle Darstellung hat den Vorteil, dass sie für alle Konfigurationen anwendbar ist und wir nicht erst extra die Parallelkomponente der Geschwindigkeit bestimmen müssen. Für den Betrag der Kraft erhalten wir

$$F_L = Qv_{\perp}B, \quad (11.39)$$

wobei v_{\perp} die Komponente der Teilchengeschwindigkeit senkrecht zum Magnetfeld ist.

Häufig bewegt sich ein Teilchen nicht alleine in einem magnetischen Feld sondern in einer Kombination aus einem elektrischen und einem magnetischen Feld. Dann bewirken beide Felder eine Kraft auf das Teilchen: das elektrische Feld eine Beschleunigung entlang seiner Feldlinien und das magnetische Feld eine Ablenkung senkrecht zu seinen Feldlinien. Diese beiden Kräfte können zusammen gefasst werden

$$F_L = Q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (11.40)$$

die sich ergebende Kraft wird häufig ebenfalls als Lorentz-Kraft bezeichnet.

11.6 Aufgaben

1. Ziehen sich zwei geladene Wollstückchen an oder stoßen sie sich ab?

2. Hat ein negativ geladener Gegenstand einen Überschuss an negativen Ladungen oder einen Mangel an positiven?
3. Ein negativ geladener Stab wird langsam in die Nähe eines geladenen Elektroskops gebracht, dessen Blättchen sich annähern. Welche Ladung war ursprünglich auf dem Teleskop?
4. Skizzieren Sie das Feld um eine negative Ladung.
5. Skizzieren Sie das elektrische Feld um eine positive Ladung.
6. Skizzieren Sie das Feld um eine positive und eine negative Ladung, die sich in einem gewissen Abstand von einander befinden.
7. Skizzieren Sie das Feld in einem Plattenkondensator. Wie sieht das Feld an den Rändern des Kondensators aus, wie auf der Außenseite der Platten?
8. Skizzieren Sie das elektrische Feld zwischen zwei negativen Ladungen, die sich in einem gewissen Abstand von einander befinden.
9. Skizzieren Sie das elektrische Feld zwischen zwei positiven Ladungen, die sich in einem gewissen Abstand von einander befinden.
10. Einen in der Hand gehaltenen Glasstab können Sie mit Hilfe von Seide oder Plastik aufladen. Können Sie aus dieser Tatsache schließen, ob Glas ein Leiter oder ein Isolator ist?
11. Woraus können Sie schließen, dass das bei der Herstellung von Luftballons verwendete Material ein Isolator ist?
12. Warum ist es nicht möglich, nur ein Ende eines Metallstabes zu laden?
13. Warum ist es einfacher, einen Luftballon an einem trockenen Tag aufzuladen als an einem feuchten?
14. Warum kriegen Sie manchmal einen leichten elektrischen Schlag, wenn sie nach überqueren eines Teppichs einen metallenen Türgriff berühren?
15. Bevor ein Flugzeug von einem Tankwagen betankt wird, werden Flugzeug und Tankwagen durch einen Draht verbunden. Warum?
16. Wenn Sie einen Gummistab mit Fell und einen anderen mit Plastik aufladen, ziehen sich die beiden an. Warum?
17. Was meinen wir mit der Aussage, ein Atom oder Molekül sei elektrisch neutral?
18. Wenn Sie einen geladenen Kamm in die Nähe von Papierschnipseln bringen, werden diese anfänglich vom Kamm angezogen, später jedoch von diesem abgestoßen. Warum? Wie ändern sich die Ladungen von Kamm und Papier während dieses Vorgangs?
19. Wenn Sie einen positiv geladenen Stab in die Nähe eines an einem Faden aufgehängten roten Stabes bringen, wird dieser angezogen. Gibt uns diese Beobachtung Auskunft, ob der rote Stab negativ oder positive geladen oder neutral ist?
20. Ein grüner Stab hängt so an einem Faden, dass er sich frei bewegen kann. Ein neutraler Stab zieht den grünen an. Können wir daraus bestimmen, ob die Ladung auf dem grünen Stab positiv oder negativ ist?
21. Beschreiben Sie, warum ein geladener Luftballon an der Decke haften bleibt?
22. Warum zieht eine frisch gereinigt Schallplatte den Staub so gut an?

23. Beschreiben Sie, auf welche Weise ein negativ geladener Stab (a) ein ungeladenes leitfähiges Objekt und (b) einen ungeladenen Isolator anzieht.
24. Warum werden elektrisch neutrale Körper sowohl von positiven als auch von negativen Ladungen angezogen?
25. Wie können Sie einen negativ geladenen Stab verwenden, um festzustellen, ob ein ursprünglich geladenes Elektroskop negative oder positive Ladungen trägt?
26. Beschreiben Sie, wie Sie einen negativ geladenen Stab verwenden können, um ein Elektroskop negativ zu laden.
27. Beschreiben Sie, wie sie einen negativ geladenen Stab verwenden können, um ein Elektroskop positiv zu laden.
28. Zwei identische Elektroskope, eines anfänglich neutral, das andere geladen, werden durch einen Draht mit einander verbunden und sind dann beide geladen. Welche Aussage können Sie im Bezug auf die Ladungen auf jedem der Elektroskope machen?
29. Was geschieht mit der elektrostatischen Kraft zwischen zwei geladenen Objekten, wenn die Ladung auf einem der Objekte plötzlich ihr Vorzeichen wechselt?
30. Was geschieht mit der elektrostatischen Kraft zwischen zwei geladenen Objekten, wenn beide plötzlich ihr Vorzeichen umdrehen?
31. Was geschieht mit der elektrostatischen Kraft zwischen zwei Ladungen, wenn der Abstand zwischen ihnen halbiert wird?
32. Wie ändert sich die Kraft zwischen zwei geladenen Körpern, wenn der Abstand zwischen ihnen verdreifacht wird?
33. Wie ändert sich die elektrostatische Kraft zwischen zwei geladenen Körpern, wenn Sie die Ladung des einen Körpers verdoppeln?
34. Wie ändert sich die elektrostatische Kraft zwischen zwei geladenen Körpern, wenn Sie die Ladung auf dem einen Körper verdoppeln und gleichzeitig den Abstand zwischen den beiden halbieren?
35. Wie ändert sich die elektrostatische Kraft zwischen zwei geladenen Körpern, wenn Sie die Ladung des einen vervierfachen und den Abstand zwischen den beiden verdoppeln?
36. Wie verändert sich die elektrostatische Kraft zwischen zwei geladenen Körpern, wenn beide Ladungen verdoppelt werden?
37. Wie ändert sich die elektrostatische Kraft zwischen zwei Körpern, wenn die Ladungen der beiden jeweils verdoppelt werden, der Abstand jedoch halbiert wird.?
38. Wie ändert sich die elektrostatische Kraft zwischen zwei geladenen Körpern, wenn die beiden Ladungen und der Abstand zwischen den Körpern jeweils verdoppelt werden?
39. In welche Richtung weist die elektrostatische Kraft auf eine positive Ladung, wenn sich diese in der Nähe einer negative Ladung befindet?
40. Zwei parallele Platten tragen gleich große aber entgegen gesetzte Ladung. Welche Richtung hat die Kraft auf eine positive Ladung, die sich ungefähr in der Mitte zwischen den Platten befindet?
41. Auch wenn die Gleichungen für die Gravitationskraft und die elektrostatische Kraft formal sehr ähnlich sind, gibt es doch Unterschieden. Nennen Sie einige.
42. Was sind die Ähnlichkeiten zwischen Gravitationskraft und elektrostatischer Kraft?

43. Obwohl die elektrostatischen Kräfte viel größer sind als die gravitiven, wird die Bewegung der Planeten im Sonnensystem durch die gravitiven Kräfte bestimmt. Warum?
44. Wenn Sie sich einer anderen Person nähern, werden Sie sich weder der gravitativen noch der elektrostatischen Kräfte bewusst, die Sie auf einander ausüben. Was sind die jeweiligen Gründe?
45. Warum sind die Beschleunigungen, die verschiedene Testladungen in der Nähe einer geladenen Kugel erfahren, nicht die gleichen?
46. Wie ist das elektrische Feld in jedem Punkt des Raums definiert?
47. Zwei elektrische Feldlinien können sich nicht kreuzen. Begründen Sie dies.
48. Beschreiben Sie das elektrische Feld in der Umgebung eines Luftballons mit negativer Ladung.
49. Skizzieren (oder beschreiben) Sie das elektrische Feld zwischen zwei parallelen Platten mit gleicher positiver Ladung.
50. Ein Elektron und ein Proton werden in ein vertikal aufwärts gerichtetes Feld gesetzt. Vergleichen Sie die auf die beiden Ladungen wirkenden Kräfte. Vergleichen Sie ferner die Beschleunigungen von Elektron und Proton.
51. Geben Sie die Definition und den Wert der elektrischen potentiellen Energie in jedem Punkt des Raumes.
52. Vergleichen Sie die elektrischen potentiellen Energien eines Elektrons und eines Protons am gleichen Punkt im Raum.
53. Wie ist das elektrostatische Potential an jedem Punkt im Raum definiert?
54. Ein Proton wird in Ruhe in ein gleichförmiges elektrisches Feld gesetzt. Nimmt seine potentielle elektrische Energie zu oder ab? Bewegt sich das Proton in einen Bereich mit höherem oder niedrigerem Potential?
55. Warum kann es gelegentlich sinnvoll sein, Batterien parallel zu schalten?
56. Zwei gleiche Batterien sind in Reihe geschaltet. Welche Spannung erhalten Sie insgesamt?
57. Zwei gleiche Batterien sind parallel geschaltet. Welche Spannung erhalten Sie?
58. Autobatterien werden durch Amperestunden charakterisiert. Was bedeutet diese Größe?
59. Welche der folgenden Größen beeinflusst den Widerstand eines Drahtes: Material, Durchmesser, Länge oder Temperatur?
60. Wie verändert sich der Strom in einem Stromkreis wenn die Spannung verdoppelt wird?
61. Wie verändert sich der Strom, wenn der an eine Batterie angeschlossene Widerstand verdoppelt wird?
62. Warum kann sich ein Vogel auf einer Hochspannungsleitung nieder lassen ohne einen elektrischen Schlag zu kriegen?
63. Wie würden Sie zwei Batterien und zwei Lämpchen schalten, um das hellste Licht zu erhalten?
64. Wie würden Sie zwei Batterien und zwei Lämpchen schalten, um die Leuchtdauer zu maximieren?

65. Drei identische Glühlämpchen sind in Serie mit einer Batterie verbunden. Welches leuchtet am hellsten?
66. Die folgenden Anordnungen identischer Glühlämpchen werden mit einer Batterie verbunden: (a) ein Lämpchen, (b) 2 Lämpchen in Serie, (c) 2 Lämpchen parallel, (d) 3 Lämpchen in Serie, (e) 3 Lämpchen parallel und (f) insgesamt 3 Lämpchen, von denen 2 in Serie und das dritte parallel zu den beiden ersten ist. In welcher Variante leuchten die Lämpchen am hellsten? In welcher Variante leuchten sie am längsten?
67. Drei identische Glühlämpchen werden in Serie geschaltet. Wie verändert sich die Helligkeit der verbleibenden beiden Lämpchen, wenn das andere Lämpchen durchbrennt?
68. Drei identische Glühlämpchen werden parallel geschaltet. Wie verändert sich die Helligkeit der verbleibenden beiden Lämpchen, wenn das andere Lämpchen durchbrennt?
69. Sie erhalten eine Box, auf der drei identische Glühlämpchen montiert sind. Die Verkabelung zwischen diesen ist im Innern der Box verborgen. Ursprünglich leuchtet A am hellsten und Lämpchen B und C sind gleich hell. Wenn Sie A heraus schrauben, gehen B und C aus. Wenn Sie B heraus schrauben, wird A dunkler und C heller, so dass A und C gleich hell sind. Wenn Sie C heraus schrauben, wird A dunkler und B heller, so dass A und B gleich hell sind. Wenn Sie B und C heraus schrauben, geht A aus. Wie sind die Lampen geschaltet?
70. Sie erhalten eine Box, auf der drei identische Glühlämpchen montiert sind. Die Verkabelung zwischen diesen ist im Innern der Box verborgen. Ursprünglich leuchtet A am hellsten und Lämpchen B und C sind gleich hell. Wenn Sie A heraus schrauben, verändern sich B und C nicht. Wenn Sie B heraus schrauben, verändert sich A nicht aber C geht aus. Wenn Sie C heraus schrauben, verändert sich A nicht und B geht aus. Wenn Sie B und C heraus schrauben, bleibt A unverändert. Wie sind die Lämpchen geschaltet?
71. Sind die Scheinwerfer bei Kraftfahrzeugen parallel oder in Serie geschaltet?
72. Wie verändert sich die Leistung, wenn der an einer Batterie hängende Widerstand halbiert wird?
73. Wie verändert sich die Leistung, wenn ein Widerstand statt an eine an zwei in Serie geschaltete Batterien angeschlossen wird?
74. Wie verändert sich die Leistung, wenn ein Widerstand statt an eine an zwei parallel geschaltete Batterien angeschlossen wird?
75. Zwei Glühlampen haben eine Leistung von 60 W bzw. 100 W. In welcher fließt der größere Strom?
76. Zwei Glühlampen haben eine Leistung von 60 W bzw. 100 W. Welche hat den größeren Widerstand?
77. In einigen Lichterketten für Weihnachtsbäume sind die Lämpchen parallel geschaltet, in anderen in Serie. Welche der Ketten ist durch das Durchbrennen eines einzelnen Lämpchens stärker beeinflusst?
78. Warum kann man einen Transformator nicht mit Gleichstrom betreiben?
79. Sie erhalten drei Eisenstäbe. Wie können Sie heraus finden, welcher der drei nicht magnetisiert ist?
80. Ihnen ist ein Stabmagnet herunter gefallen und in zwei Teile zerbrochen. Wieviele Magnetpole haben Sie jetzt?

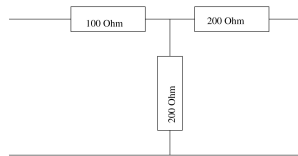
81. Wie erzeugen Sie einen einzelnen magnetischen Südpol?
82. Wie ist die Richtung des magnetischen Feldes in jedem Raumpunkt definiert?
83. Warum können sich zwei Magnetfeldlinien nicht schneiden?
84. Ein horizontaler Draht führt einen Strom in westlicher Richtung. In welche Richtung zeigt das Magnetfeld direkt oberhalb des Drahtes?
85. Ein horizontaler Draht ist so ausgerichtet, dass er genau in Richtung des magnetischen Nordpols weist. In ihm fließt ein Strom in nördlicher Richtung. In welche Richtung weist eine Kompassnadel, die direkt über den Draht gehalten wird?
86. Beschreiben Sie, warum ein Magnet einen unmagnetischen Körper anziehen kann (und unter welchen Bedingungen er dies tut). Vergleichen Sie mit der Anziehung eines ungeladenen Körpers durch einen geladenen Stab.
87. Wie verändert sich die Magnetfeldstärke eines Stabmagneten, wenn dieser erwärmt wird?
88. Wie würden Sie aus einem Eisenstab einen Permanentmagneten erzeugen?
89. Erwarten Sie, dass der Kopf eines Hammers aus Stahl magnetisiert ist?
90. Was erwarten Sie im Bezug auf die Magnetfeldstärke eines Stabmagneten, wenn dieser wiederholt auf einen Betonfußboden gefallen ist?
91. Welchen Einfluss üben zwei parallele Drähte, die in entgegengesetzte Richtung fließende Ströme tragen, auf einander?
92. Warum ziehen sich die parallelen Drähte von Hochspannungsleitungen nicht gegenseitig an?
93. In welche Richtung muss der Strom im Erdinnern fließen, um das geomagnetische Feld zu erzeugen?
94. Können Sie in Ruhe befindliche geladene Teilchen in einem Magnetfeld beschleunigen?
95. Können Sie in Ruhe befindliche geladene Teilchen in einem elektrischen Feld beschleunigen?
96. Ein geladenes Teilchen bewegt sich entlang einer geraden Linie. Können Sie daraus schließen, dass kein Magnetfeld vorhanden ist?
97. Ein Proton und ein Elektron mit gleicher Geschwindigkeit treten in ein Magnetfeld senkrecht zu ihrer Flugbahn ein. Wie ändern sich die Geschwindigkeiten der beiden Teilchen?
98. Wenn Sie das Nordende eines Magneten schnell in eine Drahtspule schieben, schlägt das Messgerät nach rechts aus. Nennen sie zwei Möglichkeiten, wie sie das Messgerät nach links ausschlagen lassen können.
99. Erwarten Sie einen Strom, wenn Sie zwei Stabmagneten nebeneinander (aber die Magneten in entgegengesetzte Richtungenweisend) in eine Spule einführen?
100. Die Ebene einer rechteckigen Drahtschleife liegt senkrecht zu einem in seiner Stärke oszillierenden Magnetfeld. Erwarten Sie einen Strom in der Drahtschleife?
101. Eine horizontale Drahtschleife wird über dem magnetischen Nordpol senkrecht nach oben bewegt. Erwarten Sie einen Strom?

102. Ein Netzteil (Transformator) erzeugt eine Wechselspannung von 14 V für ihr Notebook. Ist die Spule mit der größeren oder der kleineren Windungszahl mit der Steckdose verbunden?
103. Kann ein Transformator mit pulsierendem Gleichstrom betrieben werden?
104. Eine Drahtschleife rotiert in einem statischen Magnetfeld. Wann ist die induzierte Spannung maximal?
105. Wodurch ist bestimmt, ob ein veränderliches elektrisches Feld ein statisches oder ein veränderliches Magnetfeld produziert?
106. Jedes der folgenden Statements ist in der dargestellten Form wahr. Welches wird falsch, wenn Sie die kursiv gesetzten Worte innerhalb des Satzes vertauschen?
- A veränderliches *magnetisches* Feld kann ein veränderliches *elektrisches* Feld erzeugen.
 - Ein gleichförmiger *Strom* erzeugt ein gleichförmiges *Magnetfeld*.
 - Ein veränderlicher *Strom* erzeugt ein statisches *Magnetfeld*.
 - Ein veränderliches *elektrisches* Feld kann ein stationäres *magnetisches* Feld erzeugen.
107. Beschreiben Sie, wie sich eine elektromagnetische Welle im Vakuum ausbreitet.
108. Welche der folgenden sind keine elektromagnetischen Wellen: Radio, Mikrowellen, blaues Licht, infrarotes Licht, oder Schall?
109. Welche der folgenden elektromagnetischen Wellen hat die höchste Frequenz: Radio, Mikrowellen, sichtbares Licht, ultraviolettes Licht, Röntgenstrahlung?
110. Wie schnell breiten sich Röntgenstrahlen im Vakuum aus?
111. Was ist der Unterschied zwischen Röntgen- und γ -Strahlung?
112. Elektrisches Feld: In einem handelsüblichen Tintenstrahldrucker trägt ein Tintentropfen eine Ladung von $3 \cdot 10^{-13}$ C und wird mit einer Kraft von $2.4 \cdot 10^{-7}$ N auf das Papier gelenkt. Bestimmen Sie die Stärke des elektrischen Feldes, das erforderlich ist, um diese Kraft auszuüben.
113. Milikan-Versuch: Robert Milikan hat im Jahr 1909 als erster die Ladung eines Elektrons bestimmt, in dem er geladene Öltröpfchen in einem elektrischen Feld (Feldrichtung parallel zum Gravitationsfeld) fallen ließ. Die Tröpfchen wurden mit einer Lupe beobachtet. Das elektrische Feld wurde so verändert, dass ein negativ geladenes Öltröpfchen in diesem Feld durch die vom Feld ausgeübte Kraft gegen die Gravitationskraft in der Schwebe gehalten werden konnte. Milikan bestimmte die Ladungen verschiedener Öltröpfchen sehr genau und fand, dass sie jeweils Vielfache von $1.6 \cdot 10^{-19}$ C – der Ladung des Elektrons – waren. Frage: Ein Tropfen der Masse $1.1 \cdot 10^{-14}$ kg soll in einem elektrischen Feld von $1.68 \cdot 10^5$ N/C schweben. (a) Wie groß muss die Ladung des Tropfens sein? (b) Wie viele Elektronen sind erforderlich, um diese Ladung zu produzieren?
114. Elektrisches Feld und Potential, Beschleunigung einer Ladung: Ein Elektron ($m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg, $q_e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C) wird im elektrischen Feld entlang einer Potentialdifferenz von 1 MV (1 000 000 V) beschleunigt.
- (a) Wie groß ist die kinetische Energie des Elektrons und in welcher Einheit geben Sie diese sinnvollerweise an?
 - (b) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit des Elektrons.

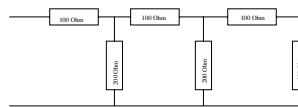
- (c) Statt des Elektrons beschleunigen Sie ein Proton ($m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, $q_p = q_e$). Wie groß ist dessen Energie, wie groß seine Geschwindigkeit?
115. Ein Elektron ($m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg, $q_e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C) kreist im Abstand von 10^{-10} m um ein Proton ($m_p = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg, $q_p = q_e$).
- (a) Berechnen Sie die Coulomb-Kraft zwischen den beiden.
- (b) Berechnen Sie die Massenanziehung zwischen den beiden. Welche der beiden Kräfte ist größer.
- (c) Welche Kräfte müssen insgesamt auf das Elektron wirken, damit dieses sich auf der Kreisbahn bewegen kann? Stellen Sie die dazugehörige Gleichung auf.
116. Wieviel Arbeit ist erforderlich, um 3 C positive Ladung vom negativen Ende einer 12 V-Batterie zu dessen positiven Ende zu verschieben?
117. Wie viele Elektronen benötigen Sie, um eine Ladung von 1 C zu erzeugen?
118. Wie groß ist die elektrostatische Kraft zwischen zwei Ladungen von 3 C und -6 C in einem Abstand von 3 m. Handelt es sich um eine anziehende oder eine abstoßende Kraft?
119. Wie groß ist das elektrische Feld in einem Abstand von 4 m von einer positiven Ladung von 8 C?
120. Wie groß ist das elektrische Feld in einem Abstand von $5.3 \cdot 10^{-11}$ m von einem Proton?
121. Wie groß ist das elektrische Feld im Abstand von 0.2 nm von einem aus 6 Protonen und 6 Neutronen bestehenden Kohlenstoffkern?
122. Wie groß ist das elektrische Feld in der Mitte zwischen einem Elektron und einem Proton im Abstand von 0.2 nm?
123. Wie groß ist die Kraft auf ein Proton in einem elektrischen Feld von 5000 N/C. Welche Beschleunigung ergibt sich daraus für das Proton?
124. Welche Arbeit verrichtet eine 9 V Batterie, wenn Sie eine Ladung von 3 mC durch einen aus einer Glühlampe bestehenden Stromkreis befördert?
125. Wie weit kann ein Funke sich bei einem Potentialgefälle von $6 \cdot 10^5$ V in trockener Luft ausbreiten?
126. Wie groß ist das elektrische Potential gegenüber einem Metallroh, wenn sich zwischen ihren Fingerspitzen und dem Metallrohr ein 1.5 cm langer Funke gebildet hat?
127. Körper können durch Reibungselektrizität negativ geladen werden. Wie viele Elektronen müssen transferiert werden, um einem Körper eine Ladung von 10^{-6} C zu geben? Müssen die Elektronen zugefügt oder entfernt werden?
128. Protonen der kosmischen Strahlung treffen mit einer Rate von 1500 pro Sekunde und Quadratmeter auf die Atmosphäre der Erde. Wieviel Ladung erhält die Erde während eines Tages? (Erdradius $6.4 \cdot 10^6$ m)
129. Im Atomkern ist der Mindestabstand zwischen zwei Protonen 10^{-15} m. (a) Bestimmen sie die elektrostatische Kraft zwischen den beiden Protonen. (b) Vergleichen Sie diese mit der Kraft zwischen einem Elektron und einem Proton im Abstand von 10^{-10} m (Wasserstoffatom).
130. Eine dünne Membran trennt eine Schicht positiver Ionen im Innern einer Zelle von einer Schicht negativer Ionen auf deren Außenseite. Bestimmen Sie die Ladung pro Fläche Q/A , damit das elektrische Feld innerhalb der Membran 10^7 N/C wird.

131. Zwei entgegen gesetzt geladene Platten von je 1 m^2 Fläche befinden sich in einem Abstand von 0.01 m . Das Potentialgefälle zwischen den Platten beträgt 100 V . (a) Bestimmen Sie das elektrische Feld zwischen den Platten. (b) Bestimmen Sie die Größe der Ladung auf den Platten.
132. Die Ionen innerhalb und außerhalb einer Zelle sind durch eine flache, 10^{-8} m dicke Membran mit der dielektrischen Konstante $\varepsilon = 8$ getrennt. Bestimmen Sie die Kapazität von 1 cm^2 Zellmembran.
133. Ein Quadratzentimeter einer Zellmembran hat eine Kapazität von $7.08 \cdot 10^{-7} \text{ F}$. Die Potentialdifferenz über die Zellmembran beträgt 0.1 V . Bestimmen Sie die in dem Quadratzentimeter gespeicherte elektrische Energie.
134. Wie groß ist die Kraft auf ein Elektron in einem Feld von 10^5 N/C ?
135. Ein Elektron erfährt durch ein elektrisches Feld eine Beschleunigung von 10^8 m/s^2 . Bestimmen Sie die elektrische Feldstärke und die Richtung des Feldes.
136. Der Kern eines Kohlenstoffatoms hat eine Ladung von $6e$. Bestimmen sie das elektrische Potential und die potentielle Energie eines Elektrons in einem Abstand von 10^{-10} m vom Kohlenstoffkern.
137. Eine bestimmte Art von Nervenfasern (Axon) ist ein Zylinder mit einem Durchmesser von 10^{-4} m und einer Länge von 0.1 m . Zwischen dem Inneren und der das Axon umgebenden Flüssigkeit besteht eine Potentialdifferenz von 0.09 V . Das Axon wird durch eine dünne Membran von der Flüssigkeit getrennt. Aus der Nervenfasern werden durch eine chemische Reaktion Na^+ -Ionen mit einer Rate von $3 \cdot 10^{-11} \text{ Mol/(s cm}^2)$ transportiert. (a) Wie groß ist die pro Stunde aus der Faser transportierte Ladung? (b) Wie groß ist die pro Stunde gegen das elektrische Feld verrichtete Arbeit bei diesem Transport, welcher Leistung entspricht das?
138. Energie im Kondensator: Ein Kondensator der Kapazität $C = 10 \mu\text{F}$ wird an eine Spannungsquelle von 230 V gelegt und aufgeladen. (a) Wie groß ist die auf den Kondensator gebrachte Ladung Q ? (b) Welche Arbeit wurde dabei verrichtet? (c) Welche Leistung wurde erbracht, wenn das Aufladen in 1 ms erfolgte?
139. Wie viele 1.5 V Batterien benötigen Sie, um 9 V Spannung zu erzeugen?
140. Wie groß ist der Widerstand einer Glühlampe, durch die bei einer Spannung von 120 V ein Strom von 0.8 A fließt?
141. Wenn ein Bügeleisen auf höchster Stufe einen Strom von 4 A zieht, wie groß ist sein elektrischer Widerstand auf dieser Stufe?
142. Mit welcher Spannung wird eine Glühlampe betrieben, wenn sie einen Widerstand von 6Ω hat und von einem Strom von 0.6 A durchflossen wird?
143. Ein Heizelement hat eine elektrische Leistung von 2 kW . Wie groß ist der Strom, wenn dieses Element an 240 V angeschlossen wird?
144. Wie groß ist die Leistung eines Toasters, der einen Strom von 4 A zieht?
145. Eine Kaffeemaschine hat einen Widerstand von 12Ω und zieht einen Strom von 10 A . Welche Leistung hat die Kaffeemaschine?
146. Wie groß ist der Widerstand der Heizspirale in einem 1200 W Boiler?
147. Ein Föhn hat eine Leistung von 1200 W . Wie viel Energie benötigen Sie, um ihn 6 min zu betreiben?

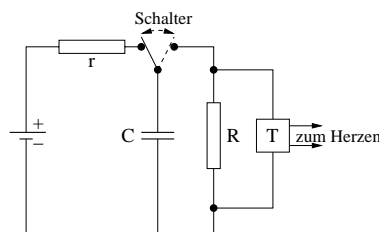
148. Wie groß ist der Gesamtwiderstand der folgenden Widerstandskombination? Hinweis: versuchen Sie, die Widerstände so in einer Zeichnung anzuordnen, dass sie Parallel- und/oder Reihenschaltung besser erkennen können.



149. Wie groß ist der Gesamtwiderstand der folgenden Widerstandskombination? Hinweis: versuchen Sie, die Widerstände so in einer Zeichnung anzuordnen, dass sie Parallel- und/oder Reihenschaltung besser erkennen können.



150. Wie groß ist der elektrische Widerstand der Glühwendel, wenn eine Glühlampe bei einer Spannung von 220 V einen Strom von 0.3 A zieht?
151. Die 3 V Glühlampe einer Taschenlampe hat einen Widerstand von 9Ω . Welcher Strom fließt durch sie?
152. Welche Leistung wird benötigt, um ein Uhrenradio zu betreiben, das 0.05 A aus dem Haushaltsnetz zieht?
153. Jeder Zyklus im menschlichen Herzen beginnt mit einem kurzen elektrischen Puls von einer Gruppe von Nervenzellen, den Schrittmacherzellen. Einigen Herzpatienten hilft man durch das Einsetzen eines elektronischen Herzschrittmachers, wenn ihre eigenen Zellen nicht mehr in der Lage sind, einen sinnvollen Herzrhythmus aufrecht zu erhalten. Ein Modell erzeugt 75 Pulse pro Minute mit Hilfe eines $0.4 \mu\text{F}$ Kondensators, der durch einen kleinen Widerstand r sehr schnell aufgeladen wird und sich dann über einen großen Widerstand R langsam entlädt, vgl. Abbildung. Wenn die Ladung auf $e^{-1} = 0.37$ der Ausgangsladung abgefallen ist, gibt ein Transistor T einen kurzen Impuls an das Herz und sorgt gleichzeitig dafür, dass der Kondensator wieder über den Widerstand r aufgeladen wird. (a) Bestimmen Sie die Zeitkonstante zum Entladen des RC-Kreises, wobei die kurze Zeit, die zum Aufladen des Kondensators über den Widerstand r benötigt wird, vernachlässigt werden kann. (b) Bestimmen Sie den Widerstand R .



154. Eine Kette von 25 Weihnachtsbaumlichtern hat eine Leistung von 50 W bei Betrieb an einer 240 V Leitung. Die Lämpchen sind in Serie geschaltet. Bestimmen Sie den Strom in den Lämpchen. Wie groß ist der Widerstand eines einzelnen Lämpchens?
155. Eine Person ergreift mit feuchten Händen zwei Leiter. Die Person hat einen Widerstand von 1000Ω . (a) Wie groß muss die Spannungsdifferenz zwischen den Leitern sein, um

einen Strom von 10 mA zu produzieren? Dieser Strom wäre ausreichend, um die Hände um die Leiter zu verkrampfen. (b) Wie groß müsste die Spannungsdifferenz sein, um einen Strom von 100 mA zu erzeugen. Letzterer würde innerhalb einer Sekunde zum Kammerflimmern führen.

156. Eine Metallkugel der Masse 2 g und der Ladung $1 \mu\text{C}$ tritt mit einer Geschwindigkeit von 20 m/s in ein Magnetfeld von 20 T. Wie groß sind die maximale Kraft und die maximale Beschleunigung auf die Kugel?
157. Wie groß müsste die Ladung des Balls aus der vorangegangenen Aufgabe sein, damit die vom Feld auf ihn ausgeübte Kraft gleich der Gewichtskraft wäre?
158. Ein Elektron hat eine Geschwindigkeit von $3 \cdot 10^6$ m/s senkrecht zu einem magnetischen Feld von 2.5 nT. Welche Kraft und welche Beschleunigung erfährt das Elektron?
159. Welche Kraft und Beschleunigung erfährt ein Proton, das mit einer Geschwindigkeit von $3 \cdot 10^6$ m/s in ein Magnetfeld von 2.5 T senkrecht zu seiner Flugbahn ein fliegt?
160. Ein Transformator wandelt die 240 V Haushaltsspannung in 9 V für einen CD-Player um. Die primäre Spule (d.h. die mit der Steckdose verbundene) hat 800 Windungen. Wieviele Windungen muss die sekundäre Spule haben?
161. Eine in der Strahlentherapie verwendete Röntgenanlage erzeugt Strahlung mit einer maximalen Frequenz von $2.4 \cdot 10^{20}$ Hz. Wie groß ist die Wellenlänge dieser Röntgenstrahlung?
162. Mikrowellenherde verwenden Mikrowellen mit einer Frequenz von $2.45 \cdot 10^9$ Hz. Wie groß ist die Wellenlänge dieser Strahlung, wie verhält sich diese zu den typischen Ausmaßen eines Mikrowellenherdes?
163. ^{60}Co ist ein in der Strahlentherapie häufig verwendetes Isotop. Es gibt γ -Strahlung mit den Wellenlängen $1.06 \cdot 10^{-12}$ m und $9.33 \cdot 10^{-13}$ m ab. Berechnen Sie die dazu gehörigen Frequenzen.
164. Ultraviolette Strahlung hat Wellenlängen im Bereich von 300 nm. Wie groß ist die Frequenz dieser Strahlung?

Kapitel 12

Schwingungen, Wellen und Akustik

Dieser Abschnitt bildet eine kurze Einführung in die Grundbegriffe und -ideen von Schwingungen und Wellen. Wellen werden uns in den folgenden Kapiteln immer wieder begegnen: in der Akustik als Schallwellen, in der Optik als elektromagnetische Wellen und in der Quantenmechanik als Materiewellen.

Schwingungen sind die hin- und her Bewegung eines Körpers um eine Ruhelage, wie Sie sie beim Pendel einer alten Standuhr beobachten können oder bei einer Schaukel. Betrachten wir jetzt ein Medium, in dem sich viele solcher Pendel befinden, die mit einander verbunden sind (z.B. eine lange Reihe von Schaukeln auf dem Spielplatz, von denen jede mit den beiden benachbarten durch ein Seil verbunden ist). Stoßen Sie eine dieser Schaukeln an, so beginnt sie zu schwingen – allerdings nicht so, wie sie alleine schwingt, sondern ihre Schwingung wird recht schnell gedämpft, da ein Teil der Energie auf die benachbarte Schaukel übertragen wird, an der sich dieser Vorgang wiederholt. Die Störung (das Anstoßen einer Schaukel oder eines Pendels) breitet sich in unserem System gekoppelter Schaukeln/Pendel als Welle aus.

Eine anschauliche Welle ist die Wasserwelle, die entsteht, wenn Sie einen Stein in einen See werfen: ein Muster von konzentrischen Ringen breitet sich um die Einschlagstelle des Steins aus. Allerdings breitet sich nur das Muster aus, nicht das Wasser selbst: wenn Sie einen Korken auf die Wasseroberfläche setzen, so bewegt er sich mit den Wellen auf- und ab, er wird jedoch nicht von den Wellen von seinem Ausgangsort weg transportiert. Daher soll bereits an dieser Stelle auf eine wesentliche Eigenschaft von Wellen hin gewiesen werden:

Wellen transportieren keine Materie, sie transportieren Energie bzw. Information.

Dies können Sie sich an Licht- oder Radiowellen veranschaulichen: beide können sich durch das Vakuum und durch Materie ausbreiten, d.h. sie benötigen weder einen materiellen Träger (dann wäre eine Ausbreitung im Vakuum nicht möglich) noch transportieren sie Materie (sonst hätte Licht es recht schwer, durch ein Fenster zu gelangen), aber sie transportieren Energie (sonst würde die Sonne nicht die Photosynthese antreiben können).

12.1 Schwingungen

Definition 36 *Eine Schwingung ist ein Vorgang, der durch die zeitliche Änderung einer physikalischen Größe beschrieben wird. Bei einer Schwingung wandeln sich zwei Energiearten periodisch ineinander um.*

Voraussetzungen für ein schwingfähiges System sind

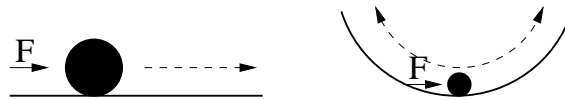


Abbildung 12.1: Eine Energiezufuhr alleine (links) führt nicht zu einer Schwingung; für diese wird zusätzlich eine rücktreibende Kraft benötigt (rechts)

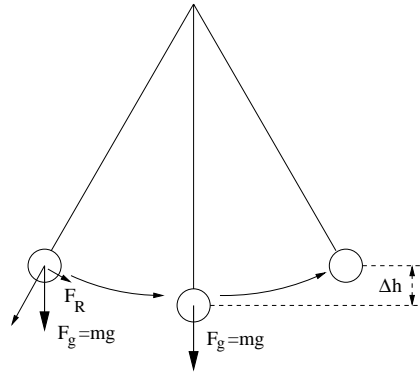


Abbildung 12.2: Fadenpendel: die rücktreibende Kraft ist die Gravitationskraft bzw. genauer die Komponente der Gravitationskraft senkrecht zum Faden

- eine Störung/Auslenkung (das entspricht einer Energiezufuhr) und
- eine rücktreibende Kraft, die eine fortwährende Umwandlung zwischen gekoppelten Energiespeichern bewirkt.

Der Auslöser einer Schwingung ist eine Störung: auf den Körper muss eine Kraft wirken. Betrachten wir einen Ball auf einer ebenen Fläche, wie im linken Teil von Abb. 12.1, so bewirkt die auf den Ball wirkende Kraft (durchgezogener Pfeil) eine Beschleunigung des Balls und dieser bewegt sich entlang der gestrichelten Linie gradlinig fort. Mit der Störung alleine haben wir also zwar eine Bewegung initiiert, nicht jedoch eine Schwingung in Gang gesetzt. Eine andere Situation ergibt sich, wenn sich der Ball in einer Schüssel befindet wie im rechten Teil der Abbildung. Dann rollt der einmal angestoßene Ball so lange die Wand der Schüssel hin auf, bis er zur Ruhe kommt (seine kinetische Energie ist in potentielle Energie umgewandelt) und die Gravitationskraft ihn wieder auf den Boden der Schüssel zurück treibt. Dabei wird seine potentielle Energie in kinetische Energie umgewandelt, so dass er nicht am Boden liegen bleibt sondern sich seine Bewegung die gegenüber liegende Wand der Schüssel hinauf fort setzt. Die anfängliche Bewegung wiederholt sich, der Ball schwingt hin und her. In beiden Fällen ist die Störung die gleiche, nämlich eine auf den Ball wirkende Kraft, jedoch ergibt sich nur im rechten Beispiel auf Grund der rücktreibenden Kraft eine Schwingung.

Eine ähnliche Situation wie die Kugel in der Schüssel können wir mit dem Fadenpendel realisieren, einer Masse, die an einem Faden hängend hin- und her schwingt, vgl. Abb. 12.2. An diesem Beispiel können wir nochmals die wirkenden Kräfte und die Energiebilanz diskutieren. Die Ruhelage der Kugel ergibt sich, wenn diese senkrecht am Faden herunter hängt. Dann wirkt zwar die Gravitationskraft auf die Kugel, diese wirkt jedoch entlang des Aufhängefadens. Die Seilspannung im Faden stellt damit die nötige Gegenkraft zur Verfügung, so dass die Kugel nicht beschleunigt wird. In dieser Position ist die potentielle Energie der Kugel Null, da es der niedrigste Punkt ihrer Bahn ist. Die Kugel werde jetzt in die links gezeigte Position aus gelenkt. Die Kräftebilanz hat sich jetzt verändert. Zwar wirkt weiterhin die Gravitationskraft auf die Kugel, jedoch wirkt diese jetzt nicht mehr parallel zum Faden, sondern lässt sich in eine Komponente parallel und eine senkrecht zum Faden zerlegen. Die Komponente parallel zum Faden wird wieder, genau so wie in der Ruhelage, durch die Spannung im Faden kompensiert und führt damit nicht zu einer Beschleunigung.

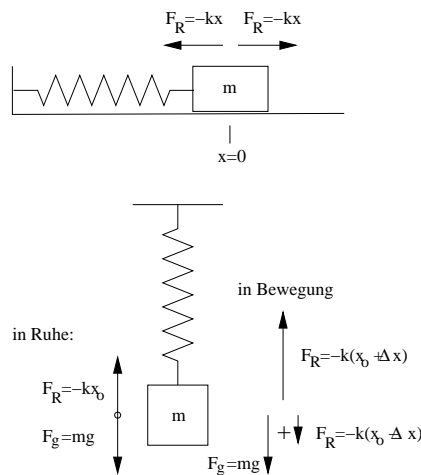


Abbildung 12.3: Federpendel: eine Masse schwingt entweder in der Horizontalen (oben) oder in der vertikalen (unten) an einer Feder – in beiden Fällen ist die formale Beschreibung identisch, vgl. Fußnote

Die Komponente senkrecht zum Faden dagegen führt zu einer Beschleunigung, die die Kugel in die Ruhelage zurück treibt. In der linken Position hat die Kugel eine potentielle Energie $E_{\text{pot}} = mgh$ mit h als der Höhe über der Ruhelage. Wird sie aus dieser Position los gelassen, so bewegt sie sich durch die rücktreibende Kraft in Richtung der Ruhelage. Dabei wird potentielle Energie in kinetische Energie $E_{\text{kin}} = mv^2/2$ umgewandelt bis die potentielle Energie am untersten Punkt der Schwingung vollständig in kinetische Energie umgewandelt ist. Auf Grund ihrer Trägheit schwingt die Kugel weiter und gelangt unter Umwandlung ihrer kinetischen in potentielle Energie bis in die rechte Position. Damit ist eine halbe Schwingung beendet, die andere Hälfte der Schwingung setzt sich genau so fort.

Für die Energiebilanz können wir also fest halten:

1. in jedem Punkt der Schwingung ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie konstant:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const} = \frac{mv^2}{2} + mgh. \quad (12.1)$$

2. die potentielle Energie ist bei maximaler Auslenkung, d.h. im Umkehrpunkt der Bewegung, am größten. Dort verschwindet die kinetische Energie.
3. die potentielle Energie verschwindet in der Ruhelage; beim Durchgang durch die Ruhelage ist daher die kinetische Energie maximal.

12.1.1 Federpendel

Bei einem Federpendel schwingt eine Masse m an einer Feder mit der Federkonstanten k hin und her. Wir haben das Federpendel bereits im Zusammenhang mit der Bewegungsgleichung in Kap. 5 genauer betrachtet und dort auch die Bewegungsgleichung für die Schwingung aufgestellt und gelöst.

Wir können ein Federpendel auf zwei Weisen bauen: zum einen können wir, wie in der Vorlesung gezeigt, eine Masse an die Feder hängen und diese einfach auf und ab schwingen lassen. Das ist eine einfache Realisierung des Federpendels, sie ist allerdings nicht ganz einfach zu rechnen. Stattdessen verwenden wir die Geometrie, die wir auch bei der Herleitung der Bewegungsgleichung in Kap. 5 verwendet haben: die Masse sei an einer horizontal liegenden Feder befestigt und gleite auf der Horizontalen reibungsfrei hin und her. Diese Situation ist formal

einfacher, da wir bei der Kräftebilanz nur die rücktreibende Kraft der Feder berücksichtigen müssen und nicht noch zusätzlich die auf die Masse wirkende Gravitationskraft.¹

Aus der Herleitung in Kap. 5 können wir die wichtigsten Ergebnisse ableiten. Die Bewegungsgleichung hatten wir dort bereits kennen gelernt als

$$m \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -kx(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\omega^2 x(t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (12.2)$$

Wir hatten dort als Lösung für die Bewegung erhalten

$$x(t) = x_{\max} \cos \omega t \quad (12.3)$$

mit x als der Auslenkung aus der Ruhelage und x_{\max} als der maximalen Auslenkung, entsprechend der Amplitude der Schwingung. Für die Kreisfrequenz ω der Schwingung ergibt sich aus der Bewegungsgleichung

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (12.4)$$

Daraus ergeben sich die Frequenz

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\pi} \quad (12.5)$$

und die Periodendauer

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (12.6)$$

Die beiden Energiereservoirs sind die in der Feder gespeicherte potentielle Energie $E_{\text{pot}} = kx^2$ und die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = mv^2/2$ der Masse.

Die wichtigsten Ergebnisse für das Federpendel lassen sich zusammen fassen als:

- die Frequenz der Schwingung nimmt mit zunehmender Masse ab,
- die Frequenz der Schwingung nimmt mit zunehmender Federkonstante zu, und
- die Frequenz der Schwingung ist unabhängig von der Amplitude.

Damit haben wir die eine Schwingung charakterisierenden Größen bestimmt. Diese sind zusammen gefasst:

¹Diese Einschränkung gilt für die formalen Aspekte der Herleitung. Man kann einfach zeigen, dass trotz der zusätzlich wirkenden Gravitationskraft bei gegebener Masse und Feder die Schwingungsfrequenzen und -dauern identisch sind – egal, ob das Federpendel in der Horizontalen oder in der Vertikalen schwingt. Der wesentliche Unterschied zwischen dem vertikalen und dem horizontalen Pendel ist die Kräftebilanz in der Ruhelage. Beim horizontalen Pendel wirken keine Kräfte auf die Masse, d.h. die einzigen in der Bewegung auftretenden Kräfte sind die rücktreibenden Kräfte $F = -k\Delta x$, die bei Auslenkung der Feder um ein Stückchen Δx entstehen. Beim vertikalen Pendel dagegen müssen wir auch in der Ruhelage bereits eine Kraftbilanz berücksichtigen: die Masse führt zu einer Auslenkung der Feder um ein Stückchen x_o . Die durch diese Auslenkung bewirkte rücktreibende Kraft $F_{R,o} = -kx_o$ ist genau so groß, wie die auf die Masse wirkende Gravitationskraft $F_g = mg$. Damit ist die Nettokraft Null und die Masse bewegt sich in der Ruhelage nicht und es gilt $mg = -kx_o$. Bei einer Auslenkung Δx aus der Ruhelage ist die gesamte rücktreibende Kraft der Feder dann gegeben zu $F_R = -kx_o + \Delta x$. Neben dieser rücktreibenden Kraft wirkt auf die Masse noch die Gravitationskraft, d.h. wir müssten in der Bewegungsgleichung zwei Kräfte berücksichtigen:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k(x_o + \Delta x) + mg = -kx_o - k\Delta x + mg$$

und nach Einsetzen von $mg = -kx_o$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k\Delta x.$$

Das ist aber genau die Bewegungsgleichung, die wir auch beim horizontalen Federpendel erhalten, d.h. die beiden Bewegungen sind formal gleichwertig.

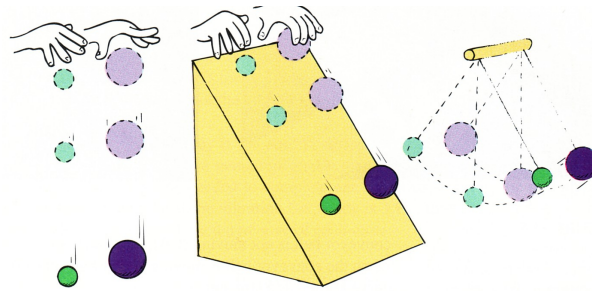


Abbildung 12.4: Die Schwingungsdauer beim Fadenpendel ist unabhängig von der Masse, da die Masse in der Bewegungsgleichung sowohl im Term ma als auch in der Kraft mg auftritt und sich daher heraus kürzt. Diese Situation begegnet uns auch beim freien Fall und beim Herabrollen einer Masse von einer schiefen Ebene [22]

- die Frequenz f [Hz], das ist die Zahl der Schwingungen pro Sekunde,
- die Periodendauer $T = 1/f$ [s], auch bezeichnet als die Schwingungsdauer,
- die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$, und
- die Amplitude A als die maximale Auslenkung.

12.1.2 Fadenpendel

Ein Fadenpendel können wir auf die gleiche Weise betrachten wie ein Federpendel. Auch hier lässt sich mit Hilfe der rücktreibenden Kraft eine Bewegungsgleichung auf stellen, die gelöst werden kann – allerdings in der hier gegebenen Form nur für Auslenkungen um kleine Winkel, d.h. um einige Grad, nicht jedoch um einige 10° . Dann ergibt sich für die Kreisfrequenz ω eines Fadenpendels der Länge l in einem Gravitationsfeld mit Gravitationsbeschleunigung g :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (12.7)$$

Für die Frequenz erhalten wir daraus

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{\sqrt{\frac{g}{l}}}{2\pi} \quad (12.8)$$

und für die Periodendauer

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (12.9)$$

Die wichtigsten Ergebnisse für das Fadenpendel sind:

- die Frequenz der Schwingung ist unabhängig von der Masse,
- die Frequenz der Schwingung nimmt mit zunehmender Länge l des Pendel ab, und
- die Frequenz der Schwingung ist unabhängig von der Amplitude der Schwingung.

Die beiden Energiereservoirs sind wie beim Federpendel wieder kinetische und potentielle Energie; hier ist die potentielle Energie jedoch die Lageenergie im Gravitationsfeld, d.h. $E_{\text{pot}} = mgh$, und nicht die in der Feder gespeicherte Energie.

Während die Frequenz des Federpendels von der Masse abhängt, ist die eines Fadenpendels unabhängig von der Masse. Die Bewegungsgleichung ist für beide Pendel durch das 2. Newton'sche Axiom gegeben zu

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F. \quad (12.10)$$

Beim Federpendel ist die rücktreibende Kraft $F = -kx$ von der Masse unabhängig, d.h. in der Bewegungsgleichung steht nur auf der linken Seite die Masse, sie kann also nicht herausgekürzt werden und steht daher auch in allen aus der Bewegungsgleichung abgeleiteten Größen, wie z.B. der Frequenz. Beim Fadenpendel dagegen ist die rücktreibende Kraft die senkrecht zum Faden wirkende Komponente der Gravitationskraft, d.h. $F = -mg \sin \alpha$. Setzt man diese Kraft in die Bewegungsgleichung ein, so kann die Masse herausgekürzt werden und alle aus der Bewegungsgleichung abgeleiteten Größen hängen nicht mehr von der Masse ab. Die Situation ist Ihnen z.B. vom freien Fall bekannt: Körper unterschiedlicher Masse fallen gleich schnell, vgl. Abb. 12.4.

12.1.3 Gedämpfte und ungedämpfte Schwingung

Wir haben in Kapitel 5 eine weitere Einflussgröße auf Bewegungen diskutiert, die Reibung. Reibung wirkt der Bewegung entgegen und verzögert diese, bis sie letztendlich zum Stillstand kommt. Auch bei Schwingungen wirkt Reibung. Die Konsequenz der Reibung ist, dass kontinuierlich kinetische Energie in Wärmeenergie umgewandelt wird und damit die Amplitude der Schwingung abnimmt. Außerdem ist bei Anwesenheit von Reibung die Schwingungsperiode etwas größer (die Veränderung hängt von der Größe der Reibungskraft relativ zur rücktreibenden Kraft ab).

Wir können daher drei Formen der Schwingung unterscheiden:

- die ungedämpfte Schwingung erfolgt reibungsfrei, die Energie wird kontinuierlich zwischen den beiden Energiespeichern umgewandelt ohne Verluste in Wärme. Die Schwingung dauert unendlich an.
- bei der gedämpften Schwingung bewirkt die Reibung, dass ein Teil der kinetischen Energie in Wärme umgewandelt und damit der Bewegung entzogen wird. Die Amplitude nimmt kontinuierlich ab.
- angetriebene Schwingung: es wird Energie zugeführt, z.B. um die Dämpfung zu überwinden. Ein Spezialfall ist die Resonanz: die Energiezufuhr verstärkt die Schwingung derart, dass die Amplitude gegen unendlich geht (z.B. akustisches Feedback bei Mikrofon/Lautsprecher)

Die ungedämpfte Schwingung ist der physikalische Idealfall, die gedämpfte Schwingung ist der Realfall: ein einmal angestoßenes Pendel kommt nach einer gewissen Zeit zur Ruhe. Die angetriebene Schwingung ist der Versuch, den Realfall dem Idealfall anzunähern: die Dämpfung des Pendels bei einer Standuhr wird dadurch kompensiert, dass das herab sinkende Gewicht dem Pendel wieder Energie zu führt. Allerdings muss diese Energiezufuhr wohl dosiert sein, da nur genau die durch Reibung verloren gegangene Energie aus dem Antrieb zugeführt werden soll: wird nicht genug Energie zu geführt, so reduziert sich die Energie in der Schwingung und das Pendel kommt zum Stillstand, wenn auch langsamer als ohne Antrieb. Wird mehr Energie zugeführt als verloren geht, so nimmt die Energie in der Schwingung zu, die Amplitude erhöht sich immer weiter und es kann zum Versagen des Systems kommen (schwingende Hängebrücke).

12.2 Wellen

Eine Welle ist eine sich ausbreitende Störung. Das anschaulichste Beispiel, die Wasserwelle um die Einschlagstelle eines Steins in einem Teich haben wir bereits am Anfang erwähnt.

Wir können uns die Entstehung einer Welle vorstellen, in dem wir uns das schwingende Medium, z.B. die Wasseroberfläche oder ein Seil, als ein System aus vielen mit einander verbundenen kleinen Pendel beschreiben, vgl. Abb. 12.5. Diese kleinen Seilelemente können wie ein Pendel um ihre Ruhelage hin und her schwingen. Da die Seilelemente mit einander verbunden sind, bewirkt die Auslenkung eines Seilelements aus seiner Ruhelage nicht nur,

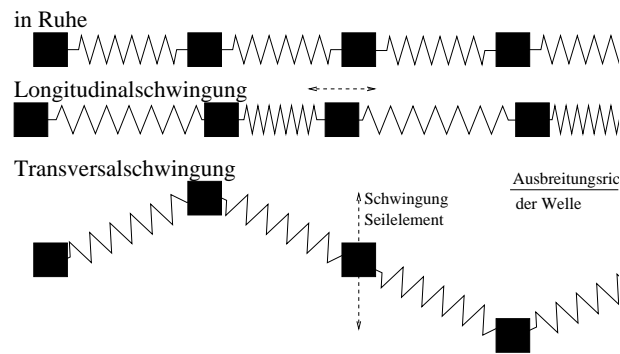


Abbildung 12.5: Entstehung einer Welle aus einem System von gekoppelten schwingfähigen Massen

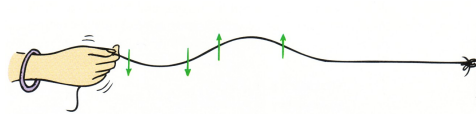


Abbildung 12.6: Eine Welle als eine sich ausbreitende Störung, hier eine Auslenkung des Seils, die sich entlang des Seils fortpflanzt [22]

dass dieses Seilelement zu schwingen beginnt, sondern auch, dass es kinetische Energie an ein benachbartes Seilelement transferiert und dieses zu schwingen beginnt. Dieses zweite Seilelement wiederum gibt kinetische Energie an das nächste Seilelement, das seinerseits zu schwingen beginnt und Energie an das folgende Element gibt. Auf diese Weise kann sich die Auslenkung eines Seilelements entlang des Seils fortpflanzen, eine Welle hat sich gebildet.

Bei einer Seilwelle erfolgt die Auslenkung und damit die Schwingung (dargestellt durch die gestrichelten Doppelpfeile) senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle (dargestellt durch den durchgezogenen Pfeil). Diese Form der Welle wird als *Transversalwelle* bezeichnet. Die meisten anschaulichen Wellen (Seilwelle, schwingende Saite, ein schwingendes Trommelfell, in erster Näherung auch die Wasseroberfläche) und alle elektromagnetischen Wellen (Licht, Radio- und Mikrowellen) sind Transversalwellen. Es gibt auch Wellen, bei denen die Auslenkung in Ausbreitungsrichtung der Welle erfolgt, wie im unteren Teil der Abbildung dargestellt. Diese Wellen werden als Longitudinalwellen bezeichnet. Schallwellen sind ein Beispiel für Longitudinalwellen: die Auslenkung der Luftmoleküle erfolgt in Richtung der Schwingung, es bilden sich Bereiche größerer und geringerer Dichte aus und die damit verbundenen Druckunterschiede bewirken eine rücktreibende Kraft auf die Luftmoleküle.

Erdbebenwellen bestehen sowohl aus longitudinalen (P-Wellen) als auch aus transversalen (S-Wellen) Anteilen. S-Wellen können sich nur im festen Medium ausbreiten, P-Wellen in festen und flüssigen. Daher können P-Wellen durch den flüssigen Kern der Erde gelangen, S-Wellen nicht. Aus den Unterschieden zwischen den beiden Wellentypen an verschiedenen Orten auf der Erde kann man Rückschlüsse auf den inneren Aufbau des Erdkörpers ziehen (s.u.).

Eine *Welle* ist eine sich ausbreitende Störung, z.B. eine Auslenkung, die ein Seil entlang läuft, vgl. Abb. 12.6. Da es sich um eine sich ausbreitende Störung handelt, ist die Geschwindigkeit neben den bereits von der Schwingung bekannten Größen eine weitere charakteristische Größe. Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Signalgeschwindigkeit) gilt

$$c = \lambda \cdot f = \frac{\lambda}{T} \quad (12.11)$$

mit λ als der Wellenlänge (Abstand zweier benachbarter Wellentäler oder -berge). Diese Wellenlänge wird bei der Wasserwelle besonders anschaulich, wir können Sie genau so auch bei der Seilwelle oder der schwingenden Saite definieren.

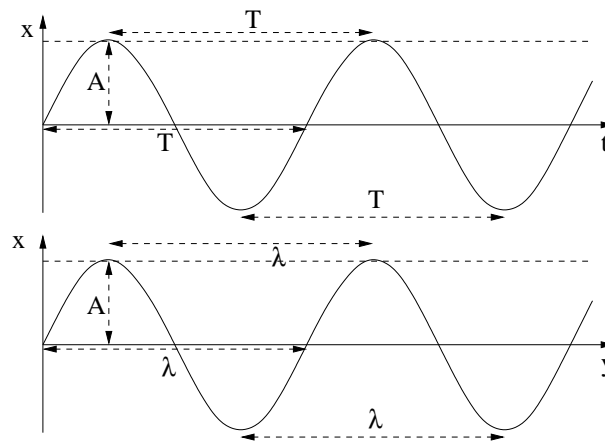


Abbildung 12.7: Harmonische Schwingung: Amplitude aufgetragen gegen die Zeit (oben) und gegen den Ort (unten)

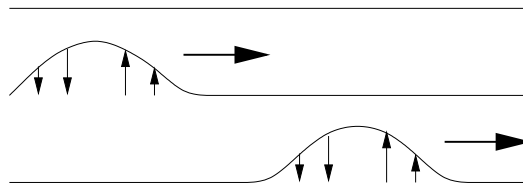


Abbildung 12.8: Ausbreitung einer Störung entlang eines Seils. Die kleinen Pfeile geben an, in welche Richtung sich die ausgelenkten Seilelemente bewegen

Die Welle können wir in ihrer einfachsten Form als Sinus-Schwingung darstellen. Alle Wellen, die durch Überlagerungen der Winkelfunktionen Sinus und Kosinus dargestellt werden können, werden als *harmonische Wellen* bezeichnet. Wir werden uns im Rest der Vorlesung auf diese Wellen beschränken. Abbildung 12.7 zeigt ein Beispiel für eine harmonische Welle, im oberen Teil dargestellt als die Auslenkung x eines Elements des schwingenden Mediums (Seil, Saite, Wasseroberfläche) aufgetragen gegen die Zeit t . In diesem Teil der Abbildung entspricht der Abstand zwischen zwei benachbarten Maxima oder Minima der Schwingungsdauer T , die maximale Auslenkung entspricht der Amplitude, mit der dieses Element hin- und her schwingt. Wenn wir als Beispiel eine schwingende Saite (oder eine Seilwelle) betrachten, so erfolgt die Bewegung der einzelnen Seilelemente senkrecht zum Seil und senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle und wir erhalten die Auslenkung x aufgetragen gegen den Ort y entlang des Seils in der unteren Abbildung. Hier gibt der Abstand zwischen zwei benachbarten Wellenbergen oder Wellentälern die Wellenlänge λ . Der obere Teil der Abbildung zeigt also die zeitliche Entwicklung der Lage eines Seilelements an einem festen Ort, die untere dagegen zeigt einen Schnappschuss der Lage aller Seilelemente zu einer festen Zeit.

12.2.1 Randbedingungen

Wenn wir keine Dämpfung haben, kann sich eine Störung unendlich weit ausbreiten. In diesem Fall wandert, wie in Abb. 12.8 angedeutet, das Medium entlang, ohne dass sich die Form der Störung verändert. Damit haben wir einen wesentlichen Zusatz zur Definition der Welle in einem Nebensatz erwähnt. Daraus können wir als Definition der Welle festhalten:

Definition 37 *Eine Welle ist eine Störung, die sich unter Beibehaltung ihrer Form ausbreitet.*

Doch kehren wir zu unserer Störung zurück. Im Realfall haben wir kein unendlich ausgedehntes Medium sondern ein begrenztes. Dann wird die Störung irgendwann auf den Rand

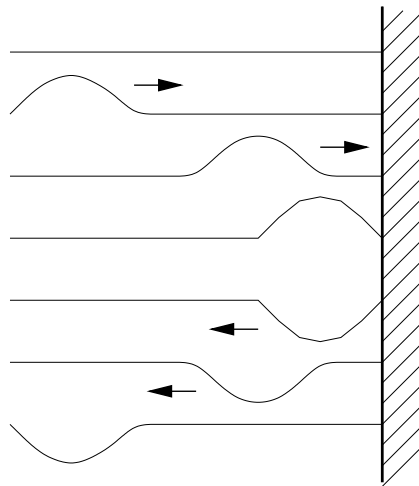


Abbildung 12.9: Bei der Reflexion einer Seilwelle an einem festen Ende erfolgt ein Phasensprung

dieses Mediums treffen. Was passiert dann?

Um diese Vorgänge besser zu verstehen (und in der Vorlesung experimentell nachvollziehen zu können), wollen wir uns an einer Seilwelle orientieren. Die Abbildung der Transversalwelle in Abb. 12.8 ist daher eine gute Beschreibung der Situation. Die kleinen Pfeile in der Störung geben an, in welche Richtung sich die Seilelemente jeweils bewegen: die Seilelemente im voran laufenden Teil der Störung bewegen sich alle von der Ruhelage weg. Diese Information wird an die in Ausbreitungsrichtung der Welle liegenden Elemente weiter gegeben, so dass auch diese sich in gleicher Richtung aus der Ruhelage entfernen. Im nach laufenden Teil der Störung dagegen bewegen sich die Seilelemente bereits wieder in Richtung auf ihre Ruhelage und kommen dort zur Ruhe.²

Reflexion am festen Ende

Betrachten wir jetzt das Verhalten dieser Störung am Seilende. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten: das Seilende kann fest sein oder es kann sich frei bewegen. Beginnen wir mit dem Fall eines festen Seilendes. Das bedeutet, dass das letzte Seilelement nicht aus seiner Lage ausgelenkt werden kann, vgl. Abb. 12.9. Die Störung breitet sich so lange wie beim unendlich langen Seil aus, bis sie genau dieses feste Seilelement erreicht hat (vierte Zeile). Das gerade noch ausgelenkte Seilelement kann nun aber seine kinetische Energie nicht mehr an das feste Seilelement weiter geben, d.h. es hat beim zurück schwingen noch genug kinetische Energie, um durch die Ruhelage hindurch zu schwingen und damit eine Störung in die Gegenrichtung zu bewirken. Auch die davor liegenden Seilelemente der Störung können ihre Energie nicht in Ausbreitungsrichtung der Welle weiter geben, da das letzte Seilelement nur ein sehr kleines Stückchen ausgelenkt werden konnte. Daher schwingen auch diese Seilelemente durch die Ruhelage hindurch. Dabei entsteht eine Störung gleicher Form aber in entgegengesetzter Auslenkungsrichtung. Diese Störung breitet sich dann entgegen ihrer ursprünglichen Ausbreitungsrichtung aus, die Welle wurde reflektiert. Insgesamt gilt: beim Auftreffen auf ein festes Ende wird eine Welle unter Umkehrung ihrer Auslenkungsrichtung reflektiert (Phasensprung).

²Im Gegensatz zu einem einzelnen Pendel schwingen die Seilelemente nicht durch die Ruhelage hindurch, da sie ihre kinetische Energie an in Ausbreitungsrichtung liegende Seilelemente abgegeben haben und so bei Erreichen der Ruhelage nicht mehr die zum Durchschwingen notwendige Energie haben.

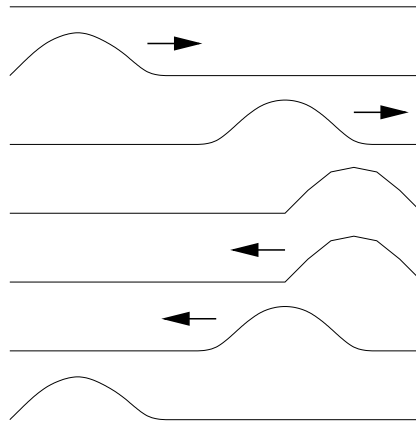


Abbildung 12.10: Reflexion einer Welle an einem Seil mit losen Ende: hier erfolgt kein Phasensprung, die Welle wird unter Beibehaltung der Phase reflektiert

Reflexion am losen Ende

Betrachten wir jetzt den Fall eines losen Seilendes, d.h. das letzte Seilelement kann sich frei bewegen, vgl. Abb. 12.10. Dadurch wird auch das letzte Seilelement bis zu seiner maximalen Auslenkung ausgelenkt. Das bedeutet, dass die im hinteren Teil der Störung liegenden Seilelemente ihre kinetische Energie noch an die vorderen Seilelemente abgeben können und daher beim zurück schwingen nicht durch die Ruhelage hindurch schwingen – das Seil ist nur in seine ursprüngliche Richtung ausgelenkt. Allerdings kann das vollständig ausgelenkte vorderste Seilelement seine Energie nicht in Ausbreitungsrichtung der Welle weiter geben sondern nur entgegen zur ursprünglichen Ausbreitungsrichtung: die Störung wird reflektiert, aber die Auslenkungsrichtung der Störung bleibt erhalten. Insgesamt gilt: beim Auftreffen auf ein loses Ende wird eine Welle unter Beibehaltung ihrer Auslenkungsrichtung reflektiert (kein Phasensprung).

Dieses Verhalten einer Störung/Welle an losen oder festen Ende ist für das Verständnis der Tonerzeugung in Musikinstrumenten wichtig: feste Enden finden wir bei allen Saiteninstrumenten, da jeweils beide Enden der Saite fest eingespannt sind. Orgelpfeifen können aus einem offenen Luftvolumen bestehen. Allerdings sind viele Pfeifen nur an einem Ende offen, entsprechend einem losen Ende. Dadurch lässt sich mit kleinerer Baulänge eine größere Wellenlänge erreichen, wie wir weiter unten noch sehen werden.

12.2.2 Stehende Wellen

Bisher haben wir eine Störung betrachtet, die sich in einem Medium (oder anschaulich entlang eines Seils) ausbreitet. Ist das Medium nicht unendlich ausgedehnt, so wird diese Störung an den Enden reflektiert und breitet sich entlang des Seils hin- und her aus: wir erhalten also einen Wellenzug, der in eine Richtung läuft und einen, der in die Gegenrichtung läuft. Beide können sich zu einer stehenden Welle überlagern, wenn ihre Wellenlänge in einer bestimmten Beziehung zur Länge des Seils (bzw. allgemein des schwingenden Systems) steht.

Stehenden Wellen bestehen aus Schwingungsknoten und Schwingungsbäuchen. In den Schwingungsknoten ist die Amplitude zu allen Zeiten gleich Null, d.h. hier bewegt sich das Seil, die Saite oder die Wasseroberfläche nicht. In den Schwingungsbäuchen dagegen schwingt das Medium.

Zwei feste Enden

Das Seil bzw. die Saite ist zwischen zwei Punkten im Abstand l aufgehängt. Sind beide Enden der Seilaufhängung fest, so kann sich das Seil dort nicht bewegen, seine Auslenkung an diesen Stellen ist Null. Die längste Welle (Grundschwingung), die sich zwischen

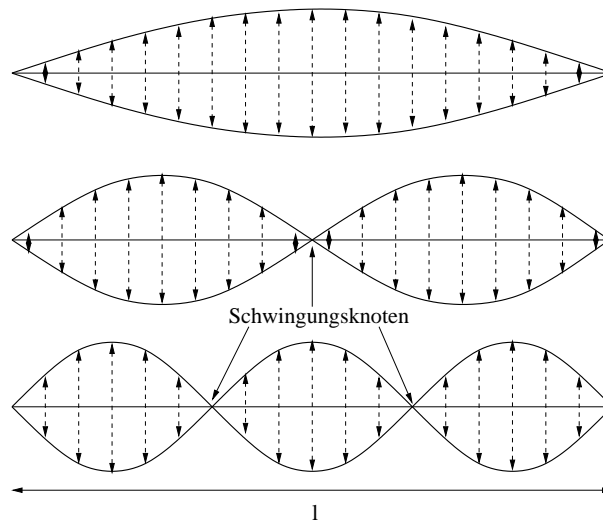


Abbildung 12.11: Stehende Welle auf einer Saite

den Aufhängepunkten ausbilden kann, ist ein einzelner Schwingungsbauch (oberes Teilbild in Abb. ??), d.h. für den Zusammenhang zwischen Wellenlänge und Seillänge erhalten wir $\lambda_1/2 = l$. Längere Wellen lassen sich nicht zwischen den beiden Aufhängungen realisieren, da diese eine Auslenkung des Seils an mindestens einem Aufhängungspunkt erforderlich machen würden. Kürzere Wellen (Oberschwingungen) dagegen können sich zwischen den beiden Aufhängepunkten ausbilden, immer unter der Voraussetzung, dass die Auslenkung in den Aufhängepunkten verschwindet, sich also jeweils ein Schwingungsknoten ausbildet. Die nächst kürzere Wellenlänge nach der Grundschwingung hat einen zusätzlichen Schwingungsknoten in der Mitte des Seils (mittlere Abbildung), d.h. die Wellenlänge dieser Schwingung ist gleich der Seillänge: $\lambda_2 = l$. Für jede weitere kürzere Wellenlänge müssen wir einen zusätzlichen Schwingungsknoten auf dem Seil unter bringen. Für insgesamt zwei Schwingungsknoten ist dies im unteren Teilbild gezeigt, wir erhalten dann $3\lambda_3/2 = l$. Insgesamt gilt also für die Wellenlängen, die sich auf einem Seil der Länge l ausbilden können, das an beiden Enden fest eingespannt ist:

$$\lambda_n = \frac{2l}{n}. \quad (12.12)$$

Wegen $c = \lambda \cdot f$ können wir auch die Frequenzen dieser Schwingungen angeben:

$$f_n = \frac{nc}{2l}. \quad (12.13)$$

Ein typisches Beispiel für eine Seilschwingung mit zwei festen Enden ist die Saite eines Musikinstruments: die Wellenlängen, die sich auf der Saite ausbilden können, sind durch die Länge der Saite bestimmt.

Zwei lose Enden

Ein Seil der Länge l habe zwei lose Enden. Dann kann das Seil sich an diesen Enden frei bewegen und es bilden sich Schwingungsbäuche aus, an denen die Auslenkung des Seils maximal wird. Die kürzeste Welle ergibt sich auf diesem Seil, wenn sich zwischen zwei Punkten maximaler Auslenkung genau ein Schwingungsknoten befindet, wie im oberen Teilbild. Dann ist, wie bei einem Seil mit zwei festen Enden, $\lambda_1/2 = l$. Auch hier sind längere Wellenlängen nicht möglich, da dann nicht an beiden Enden die Auslenkung maximal werden könnte. Schwingungen mit kürzeren Wellenlängen (Oberschwingungen) dagegen lassen sich realisieren, wenn sich zwischen den Seilenden mehr als ein Schwingungsknoten ausbildet: ein zweiter Schwingungsknoten führt auf das mittlere Bild und damit auf eine Wellenlänge $\lambda_2 = l$. Mit

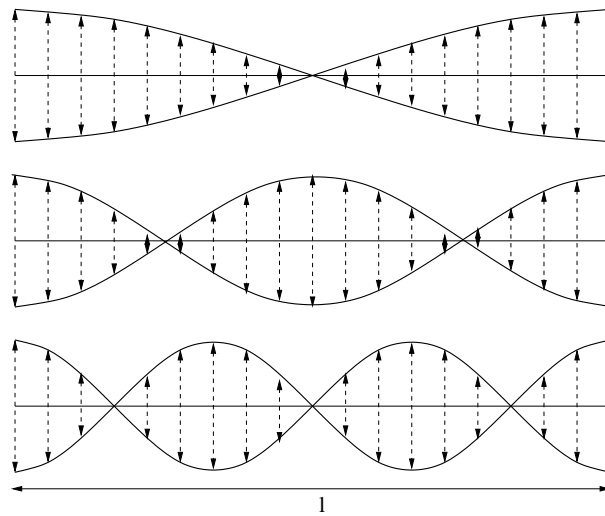


Abbildung 12.12: Stehende Welle bei zwei losen Enden

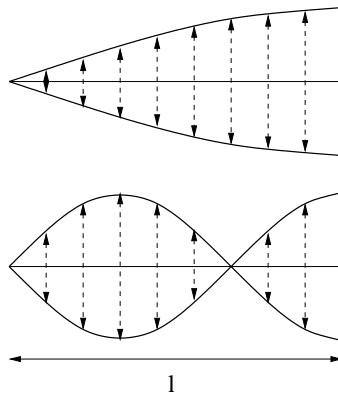


Abbildung 12.13: Stehende Welle bei einem festen (links) und einem offenen (rechts) Ende

insgesamt drei Schwingungsknoten ergibt sich das untere Teilbild mit $3\lambda_3/2 = l$. Insgesamt gilt also für die Wellenlängen, die sich auf einem Seil der Länge l ausbilden können, das an beiden Enden lose ist (frei schwingen kann):

$$\lambda_n = \frac{2l}{n} \quad \text{und damit} \quad f_n = \frac{nc}{2l}. \quad (12.14)$$

Schwingungen mit zwei offenen Enden lassen sich mit Hilfe eines Seils nicht realisieren. Ein, ebenfalls aus der Akustik stammendes Beispiel für eine Schwingung mit zwei offenen Enden ist das Anblasen eines Rohrs (blasen Sie einfach über einen Strohhalm weg) bzw. eine offene Orgelpfeife. Hier gelten die gleichen Betrachtungen wie bei der Seilwelle, auch wenn sich im Rohr keine Transversalwelle (wie bei der Saite) sondern eine Longitudinalwelle (Dichteschwankungen entlang der Ausbreitungsrichtung der Welle) ausbilden. Der Strohhalm dient hier als Beispiel, da bei ihm beide Enden offen sind und die Luftmoleküle daher frei hin- und her schwingen können.

Ein festes und ein loses Ende

Betrachten wir jetzt ein Seil der Länge l , da an einem Ende fest eingespannt ist, sich am anderen Ende jedoch frei bewegen kann. Dann bildet sich am eingespannten Ende ein Schwingungsknoten aus, am freien Ende dagegen ein Schwingungsbauch. Die längste Wellen (Grund-

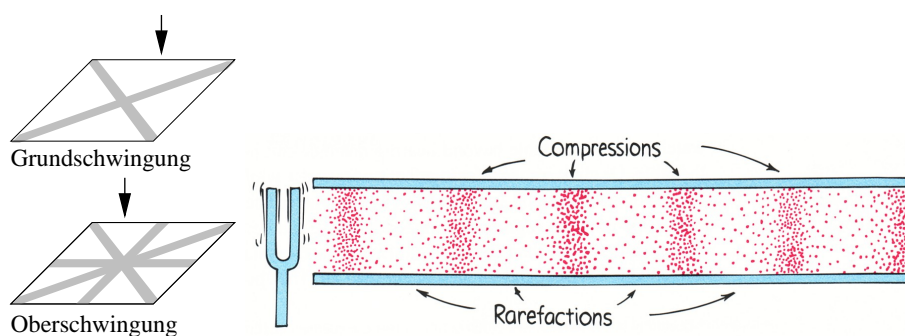


Abbildung 12.14: Andere Beispiele für schwingende Systeme: mit Hilfe der Chladni'schen Platten können Schwingungen in zwei-dimensionalen Gebilden veranschaulicht werden (links). Mit Hilfe der Kundt'schen Röhre werden Schwingungen der Luftsäule bei einer Schallwelle dargestellt (rechts)

schwingung) ergibt sich dann als das Stückchen zwischen Knoten am festen und benachbartem Schwingungsbauch am losen Ende, d.h. es ist $\lambda_1/4 = l$. Die nächst kürzere Welle ergibt sich mit einem weiteren Schwingungsknoten. Dann ist $3\lambda_2/4 = l$. Insgesamt erhalten wir für stehende Wellen auf einem Seil mit einem festen und einem losen Ende

$$\lambda_n = \frac{4l}{2n-1} \quad \text{und damit} \quad f_n = (2n-1) \frac{c}{4l}. \quad (12.15)$$

Orgelpfeifen können so konstruiert sein, dass sie ein offenes und ein geschlossenes Ende aufweisen.

12.2.3 Schwingende Saiten und ähnliches

Im Zusammenhang mit den stehenden Wellen haben wir immer wieder Beispiele aus der Tonerzeugung verwendet. Bisher haben wir dabei nur schwingende Saiten (Transversalwelle) oder schwingende Luftsäulen (Longitudinalwelle) kennen gelernt.

Saiten oder Luftsäulen in einem Rohr sind eindimensionale Wellen.³ Wenn Sie sich Musikinstrumente genauer ansehen, so sind diese nicht eindimensional: Saiteninstrumente haben einen Schallkörper, andere Instrumente wie Trommeln haben eine zweidimensionale Fläche auf der die Schwingung erzeugt wird, das Trommelfell. Daraus lernen wir zwei Dinge:

- zur Erzeugung einer Welle muss das schwingende System nicht eindimensional sein sondern kann auch höhere Dimensionen haben. In der Vorlesung wurde dies an Hand der Chladni'schen Klangfiguren demonstriert. Dazu wird eine Platte mit einem Geigenbogen gestrichen und es bilden sich, je nach Ansatzstelle des Bogens (markiert durch einen Pfeil) unterschiedliche Muster aus, die das Auftreten von Schwingungsknoten (hier sammelt sich der Mehlstaub) und Schwingungsbäuchen anzeigen, vgl. Abb. 12.14.
- Tonerzeugung erfolgt durch die Transversalschwingung von Saiten, Trommelfellen, Stimmgabeln oder ähnlichem. Die Ausbreitung in der Luft erfolgt jedoch nicht als Transversalwelle sondern als Longitudinalwelle, da sich in flüssigen und gasförmigen Medien auf Grund der fehlenden Kopplung benachbarter Atome bzw. Moleküle keine Transversalwelle ausbilden kann. Der Übergang von der Transversalschwingung der Saite zur Longitudinalschwingung der Luft erfolgt dadurch, dass die Bewegung der Saite die benachbarten Luftmoleküle ebenfalls in Schwingung versetzt. Bei der Tonwahrnehmung wird im

³Dies gilt im mathematischen Sinne: wir nehmen an, dass die Saite und die Luftsäule nur eine Länge haben jedoch keine Ausdehnung senkrecht dazu, d.h. keine Dicke. Eine physikalische Saite oder Luftsäule hat natürlich keine verschwindende Dicke, allerdings ist diese gering gegen ihre Länge, so dass die mathematische Näherung, die Saite als eindimensionales Gebilde zu betrachten, ein angemessenes Abbild der Realität liefert.

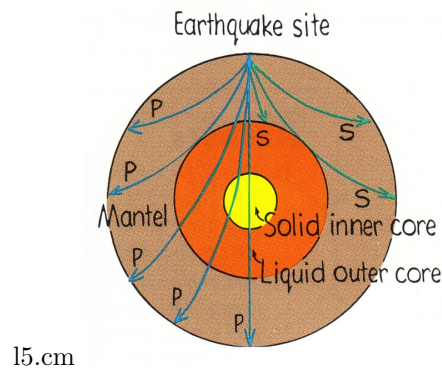


Abbildung 12.15: Erdbeben erzeugen transversale und longitudinale Wellen; da sich die Transversalwellen nicht im flüssigen Erdkern ausbreiten können, kann man aus dem Vergleich der transversalen und der longitudinalen Wellen auf dessen Existenz und Ausdehnung schließen

äußeren Ohr die Longitudinalwelle aufgenommen und am Trommelfell in eine Transversalschwingung umgewandelt. Eine einzelne Saite kommt nur mit wenigen Luftmolekülen in Bewegung, versetzt entsprechend wenig Moleküle in Schwingung und erzeugt damit nur eine Welle sehr geringer Intensität. Die Verwendung eines Resonanzkörpers dagegen bewirkt, dass die Schwingung der Saite über die Anregung einer Schwingung im Resonanzkörper eine wesentlich größere Menge von Luftmolekülen in Bewegung versetzt und entsprechend eine Schallwelle größerer Intensität erzeugt.

Wir haben weiter oben gesehen, dass sich auf einer Saite nicht nur eine Welle mit der Grundfrequenz ausbildet sondern auch Oberwellen. Der relative Anteil der verschiedenen Oberwellen bestimmt, zusammen mit den Eigenschaften des Resonanzkörpers, die Klangfarbe des Instruments.

12.2.4 Erdbebenwellen

Longitudinalwellen können sich in allen Medien ausbilden, auch in Flüssigkeiten und Gasen: in Longitudinalwellen werden die Schwingungen durch Stöße zwischen den Molekülen weiter gegeben. Dies ist möglich, weil die Schwingung in Ausbreitungsrichtung der Welle erfolgt. In Transversalwellen dagegen erfolgt die Schwingung senkrecht zur Ausbreitungsrichtung, die Schwingung kann nicht durch direkte Stöße weiter gegeben werden. Stattdessen benötigen wir eine andere Form der Kopplung zwischen den schwingenden Molekülen, wie sie in festen Körpern vorhanden ist. Da sie keine Stöße zwischen Molekülen benötigen, können sich Transversalwellen jedoch auch im Vakuum ausbreiten: hierbei handelt es sich nicht um Schwingungen von Materie sondern von elektrischen und magnetischen Feldern. Die dabei entstehenden elektromagnetischen Wellen umfassen einen weiten Frequenzbereich von der Röntgenstrahlung über das sichtbare Licht bis hin zu Radiowellen. Wir werden die elektromagnetischen Wellen am Anfang des nächsten Kapitels genauer betrachten.

Für die Untersuchung des Erdinneren macht man sich den Unterschied im Ausbreitungsverhalten von Transversal- und Longitudinalwellen zu Nutze, vgl. Abb. 12.15. Wellen im Erdkörper entstehen z.B. durch Erdbeben, unterirdischen Atombombentests oder beim Einsturz von Höhlen bzw. Stollen. Erzeugt werden bei diesen Prozessen sowohl Transversal- als auch Longitudinalwellen, in der Seismographie bezeichnet als s- und p-Wellen. Diese breiten sich im Erdkörper aus, wobei sich die Longitudinalwellen sowohl in der festen Erdkruste als auch im flüssigen Kern ausbreiten können, die Transversalwellen dagegen nur in den festen Bereichen. Durch den Vergleich der an verschiedenen Stationen ankommenden Wellen kann man auf die Existenz und die Ausdehnung eines flüssigen Erdinneren schließen.

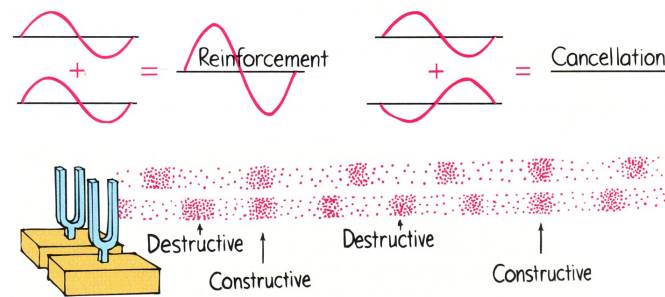


Abbildung 12.16: Interferenz, dargestellt am Beispiel von Seilwellen (oben) und Schallwellen (unten) [22]

12.2.5 Besondere Phänomene bei Wellen

Bei der Wechselwirkung von Wellen unter einander und beim Auftreffen von Wellen auf Materie können verschiedene Prozesse auftreten:

1. Absorption: Verringerung der Amplitude von Wellen beim Durchgang durch Materie. Absorption führt zu einer Abschwächung der Intensität, die von den Materialeigenschaften des Absorbers (Absorptionskoeffizient κ) und der Dicke x des Absorbers abhängen:

$$I = I_0 e^{-\kappa x} \quad (12.16)$$

mit I_0 als der Intensität des Lichtes vor Eintritt in den Absorber. Wir werden diesem Abschwächungsgesetz im Zusammenhang mit γ -Strahlen in Materie in Kap. 15 noch einmal begegnen und es dort genauer untersuchen. Physikalisch bedeutet Absorption den Übergang von Energie aus der Welle auf die Materie.

2. Brechung: Änderung der Ausbreitungsrichtung beim Übergang in ein Medium mit anderer Ausbreitungsgeschwindigkeit. Brechung ist die Grundlage für die Entwicklung einfacher optischer Instrumente wie Lupen, Ferngläser und Mikroskope.
3. Reflexion: Zurückwerfen der Welle beim Auftreffen auf ein Hindernis, in der Optik am offensichtlichsten am Spiegel.
4. Beugung: Änderung der Ausbreitungsrichtung an einem Spalt oder an einer Kante, so dass die Welle in den dahinter liegenden geometrischen Schattenraum ein dringt. Beugung tritt nur dann auf, wenn die Wellenlänge vergleichbar der Größe des Hindernis ist. Daher können wir die Beugung von Wasserwellen an Hafenanlagen beobachten, die Beugung von Licht jedoch nur bei sehr kleinen Gegenständen. Beugung ist das Phänomen, das das Auflösungsvermögen eines Mikroskops begrenzt.
5. Interferenz: Überlagerung von Wellen mit gegenseitiger Verstärkung und/oder Auslöschung, wir haben die Grundlagen bereits im Zusammenhang mit zwei auf einem Seil auf einander zu laufenden Störungen diskutiert.
6. Polarisation: Beschränkung auf bestimmte Schwingungsrichtungen (Sonnenbrille, Unterdrückung störender Reflexe).

Interferenz entsteht bei der Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz. Sind beide Wellen in Phase, d.h. trifft Wellenberg auf Wellenberg, so überlagern sich diese (positive Interferenz), trifft Wellenberg auf Wellental, so löschen sich die Wellen aus (negative Interferenz). Interferenz existiert bei Longitudinalwellen genauso wie bei Transversalwellen, vgl. Abb. 12.16.

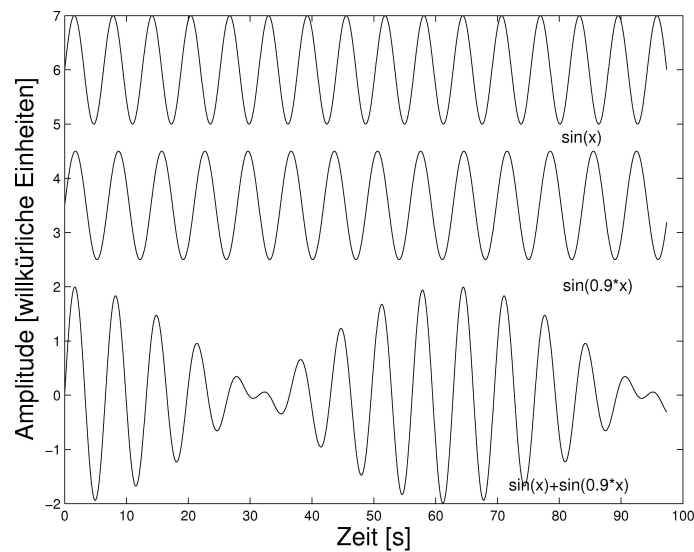


Abbildung 12.17: Eine Schwebung entsteht durch die Überlagerung zweier Wellen mit leicht unterschiedlicher Frequenz

12.3 Akustik

Die wesentlichen Gesichtspunkte zur Akustik, insbesondere die Bedeutung der offenen und geschlossenen Ende bei der Ausbildung von Schallwellen haben wir bereits diskutiert, hier sollen nur noch einige Stichworte nach gereicht werden.

12.3.1 Schwebung

Eine Schwebung ist eine Überlagerung zweier Wellen mit leicht verschiedenen Frequenzen. Hätten beide Wellen exakt gleiche Frequenz, so würden sie sich, wie bei der Interferenz diskutiert, auslöschen (Phasen entgegen gesetzt, d.h. Wellenberg trifft auf Wellental) oder verstärken (in Phase, Wellenberg trifft auf Wellenberg). Unterscheiden sich die Wellen jedoch in ihrer Frequenz, so gibt es Zeiten, in denen die Interferenz positiv ist, zu anderen ist sie negativ. Dazu sind in Abb. 12.17 zwei Schwingungen dargestellt, die eine als $\sin x$, die andere als $\sin 0.9x$, d.h. mit einer um 10% geringeren Frequenz. Im unteren Teil ist die Überlagerung dieser beiden Schwingungen gezeigt: am Anfang sind beide nahezu in Phase, so dass durch konstruktive Interferenz eine Verstärkung der Wellen, d.h. eine Erhöhung der Amplitude, auftritt. Mit zunehmender Zeit verschieben sich die beiden Wellen aufgrund der unterschiedlichen Frequenzen immer weiter gegen einander, so dass es zu negativer Interferenz kommt: die Wellen löschen sich annähernd aus, die Amplitude verschwindet. Mit weiter zunehmender Zeit vergrößert sich die Verschiebung noch weiter bis wieder Wellenberg auf Wellenberg trifft, also konstruktive Interferenz auftritt. Als Überlagerung der beiden Wellen entsteht also eine Welle, deren Amplitude sich mit der Zeit verändert. Bei akustischen Wellen nehmen wir diese überlagerte Welle als eine mit auf- und abschwellender Intensität (und damit Lautstärke) wahr, ein Phänomen, das als Schwebung bezeichnet wird.

12.3.2 Schallpegel

Der Mensch hört Töne nur in einem bestimmten Frequenzbereich und auch nur, wenn ihr Schallpegel seine Hörschwelle überschreitet. Ein junger Erwachsener hört Frequenzen im Bereich von 20 Hz bis 20 kHz, mit zunehmendem Alter verringert sich der Hörbereich auf ca. 50 Hz bis 10 kHz. Je größer die Frequenz, um so höher wird der Ton empfunden. Bedingt durch die Geometrie des äußeren Ohres (einseitig offene Röhre mit einer Länge von ca.

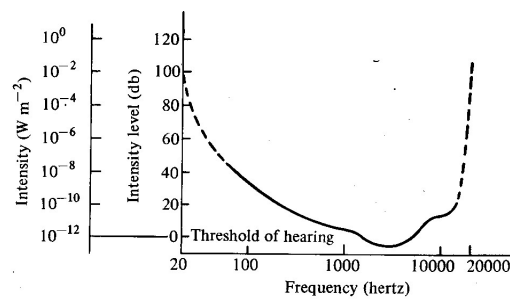


Abbildung 12.18: Empfindlichkeit des menschlichen Ohrs in Abhängigkeit von der Frequenz

2.7 cm) ergibt sich eine maximale Empfindlichkeit (und damit die niedrigste Hörschwelle) bei ca. 3 kHz (vgl. Übungsaufgabe und Abb. 12.18). Das Intensitätsempfinden des Ohrs ist annähernd logarithmisch, so dass der Schallpegel auf einer logarithmischen Skala definiert wird als

$$L = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_0} \right) \text{ [dB]} \quad (12.17)$$

mit I als der Intensität der betrachteten Schallwelle und $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ als einer Referenzintensität (entsprechend ungefähr der menschlichen Hörschwelle bei einer Frequenz von 1000 Hz).⁴ Die Schmerzgrenze ergibt sich bei Intensitäten oberhalb etwa 1 W/m^2 , entsprechend einem Schallpegel von 120 dB.

12.3.3 Ultraschall

Ultraschall ist physikalisch genauso wie der von uns wahrnehmbare Schall eine Longitudinalwelle, die sich als Druckschwankung ausbreitet. Ultraschall hat Frequenzen oberhalb des menschlichen Hörbereiches, d.h. oberhalb 20 kHz. Fledermäuse verwenden Ultraschall zur Sondierung ihrer Umgebung: ein kurzes Schallsignal wird von der Fledermaus ausgesandt und die Zeit gemessen, nach der es bei ihr wieder ankommt. Aus der Laufzeit t des Signals und der Schallgeschwindigkeit c ergibt sich der Abstand d des Hindernisses von der Fledermaus zu

$$2d = ct \quad \Rightarrow \quad d = \frac{ct}{2}. \quad (12.18)$$

Der Faktor 2 ergibt sich daraus, dass das Signal den Abstand zwischen Fledermaus und Hindernis zwei Mal zurück legt: auf dem Weg von der Fledermaus zum Hindernis und nach der Reflektion auf dem Rückweg. Dieses Messprinzip wird als Sonar bezeichnet, in Anlehnung an das Radar, bei dem Radiowellen zur Abstandsmessung verwendet werden.

Ultraschall breitet auch in biologischer Materie aus und kann daher zur Diagnostik verwendet werden. Gegenüber der Röntgendiagnostik hat Ultraschall den Vorteil, dass keine Strahlenschäden auftreten, d.h. Ultraschalldiagnostik kann insbesondere auch bei sehr strahlenempfindlichen Geweben eingesetzt werden, z.B. zur Untersuchung des Fötus. Ultraschalluntersuchungen basieren auf dem gleichen Prinzip wie das Sonar der Fledermaus: es werden kurze Impulse ausgesandt und deren Reflektionen detektiert. Um dieses Verfahren genauer verstehen zu können, müssen wir uns mit der Reflektion von Ultraschall in biologischer Materie auseinandersetzen. Verschiedene biologische Gewebe haben leicht unterschiedliche

⁴Die menschliche Hörschwelle liegt bereits sehr niedrig, die dabei wahr genommene Amplitude der Druckauslenkung in der Longitudinalwelle liegt bei 10^{-11} m , das ist der Bereich atomarer Dimensionen. Die Wahrnehmung niedrigerer Schallpegel würde bedeuten, dass auch noch geringere Auslenkungen vom Ohr wahr genommen werden können – wir würden dann die thermische Bewegung der Luftmoleküle als andauerndes Hintergrundrauschen wahr nehmen, d.h. eine Herabsetzung der Hörschwelle wäre nicht sinnvoll.

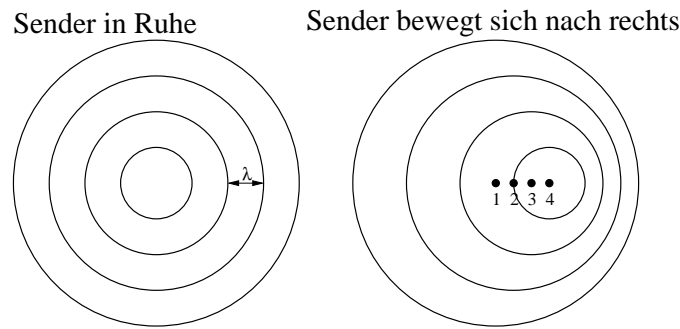


Abbildung 12.19: Wellenfronten um einen ruhenden (links) und einen bewegten (rechts) Sender

Dichten. Das Ultraschallsignal wird beim Auftreffen auf einen solchen Dichteunterschied teilweise reflektiert, wobei sich das Verhältnis aus reflektierter und eingestrahelter Welle bei senkrechtem Einfall ergibt zu

$$\frac{I_r}{I_o} = \left(\frac{\varrho_1 c_1 - \varrho_2 c_2}{\varrho_1 c_1 + \varrho_2 c_2} \right)^2 \quad (12.19)$$

mit ϱ_1 als der Dichte im Ausgangsmedium und ϱ_2 als der Dichte im zweiten Medium. Entsprechend sind c_1 und c_2 die Schallgeschwindigkeiten in den beiden Medien. Da die Schallgeschwindigkeiten in den in Betracht kommenden biologischen Medien ungefähr gleich sind, lässt sich die Gleichung vereinfachen zu

$$\frac{I_r}{I_o} = \left(\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_1 + \varrho_2} \right)^2 . \quad (12.20)$$

Daraus erkennen wir, dass die Reflektion um so geringer wird, je weiter sich die beiden Dichten an einander annähern. Aus dem reflektierten Ultraschallsignal lassen sich zwei Informationen gewinnen: (a) aus der Laufzeit des Signals lässt sich, wie beim Sonar der Fledermaus, der Abstand der reflektierenden Grenze bestimmen (und damit die Lage der Gewebegrenzen), und (b) aus der relativen Intensität des Signals lässt sich die Dichte und damit das Gewebe bestimmen.

12.4 Doppler-Effekt

Der Doppler-Effekt beschreibt Veränderungen der Frequenz des beim Beobachter ankommenden Signals in Abhängigkeit von der Relativbewegung zwischen Sender und Beobachter. Ein typisches Beispiel ist das Martinshorn eines vorbeifahrenden Feuerwehrfahrzeuges: bei Annäherung nehmen wir einen höheren Ton (eine höhere Frequenz) wahr, als wenn das Fahrzeug sich wieder von uns entfernt.

12.4.1 Prinzip

Das Prinzip des Doppler-Effekts können wir uns veranschaulichen, wenn wir einen bewegten Sender betrachten. Bei einem ruhenden Sender bilden benachbarte Wellenberge konzentrische Kreise um den Sender, der Abstand benachbarter Wellenberge ist gleich der Wellenlänge. Die im linken Teil gezeigten Wellenberge wurden zu 4 verschiedenen Zeiten erzeugt: der äußerste zur Zeit 1 (er hatte am längsten Zeit, sich aus zu breiten), der nächst innere zur Zeit 2 usw.

Bewegt sich jedoch die Quelle, so wird jeder Wellenberg an einer anderen Stelle erzeugt: der zur Zeit 1 erzeugte Wellenberg hat sich wieder bereits als äußerster Wellenberg aus gebreitet. Der zur Zeit 2 erzeugte Wellenberg wurde jedoch nicht im Punkt 1 erzeugt wie der erste sondern in Punkt 2, da sich der Sender in der Zeit bis zur Erzeugung des nächsten

Sender in Ruhe

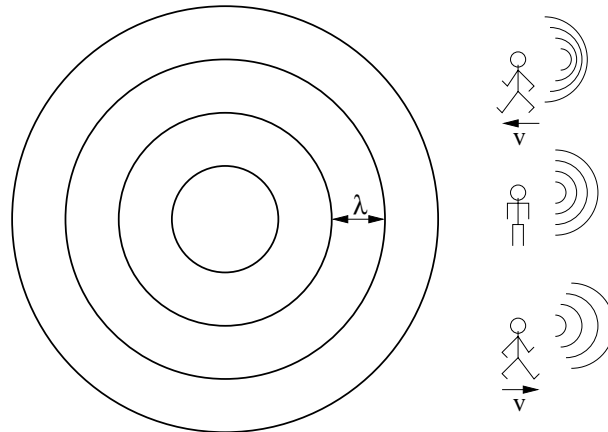


Abbildung 12.20: Doppler-Effekt beim ruhenden Sender und bewegtem Empfänger

Welleneberges bis zum Punkt 2 bewegt hat. Dieser Wellenberg breitet sich konzentrisch um seinen Ursprung aus, es ergibt sich der von außen gezählte zweite Wellenberg. Auch bei den folgenden Wellenbergen hat sich der Sender jeweils ein Stückchen weiter bewegt: ein bewegter Sender erzeugt kein Muster konzentrischer Wellenberge sondern die Wellenberge sind in Bewegungsrichtung verschoben, vgl. Abb. 12.19. Damit ergibt sich vor dem bewegten Sender ein kleinerer Abstand zwischen benachbarten Wellenbergen, d.h. eine kürzere Wellenlänge, als beim ruhenden Sender. Entsprechend ergibt sich hinter dem bewegten Sender ein größerer Abstand und damit auch eine größere Wellenlänge. Insgesamt hängt also die beobachtete Wellenlänge von der relativen Bewegung zwischen Sender und Empfänger ab.

12.4.2 Ruhender Sender und bewegter Empfänger

Für eine formale Herleitung gehen wir von einem ruhenden Sender und einem bewegten Empfänger aus. Da der Sender ruht, erzeugt er konzentrische Wellenberge, d.h. die Wellenlänge λ_S des Senders ist überall konstant. Ein Empfänger, der sich in Ruhe befindet, empfängt dann konzentrische Wellen, wobei die Wellenberge einen Abstand von λ_S haben, d.h. für die Wellenlänge λ_E beim Empfänger gilt: $\lambda_E = \lambda_S$. In Abb. 12.20 ist dies schematisch durch die konzentrischen Halbkreise angedeutet (der Maßstab ist gegenüber der Welle im linken Teil der Abbildung verkleinert).

Bewegt sich der Empfänger auf den Sender zu (oben), so ist die von ihm wahrgenommene Wellenlänge λ_E kleiner als λ_S . Die Zeit T zwischen der Ankunft zweier auf einander folgender Wellenberge beim ruhenden Beobachter ist gleich der Schwingungsdauer, d.h. es ist $T = \lambda/c$. Bewegt sich der Beobachter auf die Quelle zu, so läuft er den Wellenbergen entgegen, d.h. die Wellenberge haben eine Geschwindigkeit $v+c$ gegenüber dem Beobachter. Dadurch verringert sich der Zeitabstand zwischen zwei benachbarten Wellenbergen auf $T_E = \lambda/(c+v)$ und die Frequenz wird zu $f_E = (c+v)/\lambda$.

Bewegt sich dagegen der Empfänger vom Sender fort (unten), so vergrößert sich die Zeit zwischen dem Eintreffen benachbarter Wellenberge. Da die Relativgeschwindigkeit zwischen Welle und Empfänger nun auf $c-v$ reduziert ist, erhalten wir $T_E = \lambda/(c-v)$ bzw. für die Frequenz $f_E = (c-v)/\lambda$.

Zusammengefasst erhalten wir bei ruhender Quelle und bewegtem Empfänger

$$f_E = \frac{c \pm v}{\lambda} = f_S \frac{c \pm v}{c} = f_S \left(1 \pm \frac{v}{c} \right), \quad (12.21)$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen berücksichtigt haben, dass für die Frequenz des Senders gilt $f_S = c/\lambda$. Das obere Vorzeichen in der Gleichung gilt für den Fall, dass sich der

Empfänger auf den Sender zu bewegt; das untere für den Fall, dass sich der Empfänger vom Sender entfernt.

12.4.3 Bewegter Sender

Für einen bewegten Sender ist die formale Herleitung etwas anders, da wir hier nicht verwenden können, dass die Wellenlänge konstant ist – wir haben ja bereits in der Abbildung in Abschn. 12.4.1 gesehen, dass dies nicht der Fall ist. Hier gehen wir davon aus, dass die Quelle stets in gleichen Zeitabständen T_S , d.h. mit konstanter Frequenz f_S , Wellenberge aus sendet. In Bewegungsrichtung der Quelle erhalten wir dann eine verkürzte Wellenlänge: der Sender hat sich in der Zeit zwischen dem Aussenden zweier Wellenberge um ein Stückchen $\Delta s = v \cdot T_S$ nach rechts bewegt. Dann beträgt der Abstand zwischen den Wellenbergen nur $\lambda_S - vT_S = \lambda_S - v/f_S$. Ein Empfänger, auf den sich der Sender zu bewegt, wird also in einem Zeitabstand

$$T_E = \frac{\lambda_S - \frac{v}{f_S}}{c} = \frac{1}{f_S} \left(1 - \frac{v_s}{c}\right) \quad (12.22)$$

von den Wellenbergen getroffen.

Für einen Empfänger, von dem sich der Sender fort bewegt, können wir eine entsprechende Betrachtung anstellen, allerdings gilt dort $\lambda_S - vT_S = \lambda_S + v/f_S$, d.h. das Vorzeichen der Geschwindigkeit ist entgegengesetzt. Fassen wir beide Möglichkeiten zusammen, so erhalten wir

$$T_E = \frac{\lambda_S \mp \frac{v}{f_S}}{c} = \frac{1}{f_S} \left(1 \mp \frac{v_s}{c}\right), \quad (12.23)$$

wobei das obere Vorzeichen für den Fall gilt, dass sich der Sender auf den Empfänger zu bewegt. Das untere Vorzeichen gilt entsprechend für einen Sender, der sich vom Empfänger weg bewegt. Für die Frequenzen erhalten wir daraus

$$f_E = f_S \frac{1}{1 \mp \frac{v}{c}}. \quad (12.24)$$

12.4.4 Anwendung

Eine Anwendung des Doppler-Effekts in der Biologie bzw. Medizin ist die Messung von Strömungsgeschwindigkeiten in Gefäßsystemen, z.B. die Messung der Strömungsgeschwindigkeit von Blut in Arterien und Venen. Auch hier wird wieder eine hochfrequente Schallquelle verwendet. Das Messprinzip ist ähnlich dem Sonar der Fledermaus oder der Ultraschalluntersuchung: es wird ein kurzer Impuls emittiert und das an den Blutkörperchen reflektierte Signal aufgefangen. Der Sender ist in Ruhe, der erste Empfänger, das reflektierende Blutkörperchen, ist bewegt. Damit nimmt es die durch (12.21) gegebene Frequenz wahr. Diese Frequenz wird auch vom Blutkörperchen emittiert, d.h. bei der Reflektion wird das Blutkörperchen zu einem bewegten Sender. Der Empfänger ruht und empfängt die vom Blutkörperchen emittierte Frequenz durch den Doppler-Effekt verändert gemäß (12.24). Für die Geschwindigkeitsmessung muss der Doppler-Effekt also zweimal angewandt werden. Als Endergebnis erhalten wir

$$f_r = f_o \left(\frac{c-v}{c+v}\right) \approx f_o \left(1 + 2\frac{v}{c}\right) \quad (12.25)$$

mit f_r als der Frequenz am Empfänger und f_o als der Frequenz des Senders. Sie werden sich mit dieser Gleichung (und ihrer Herleitung) in einer Übungsaufgabe noch genauer auseinandersetzen.

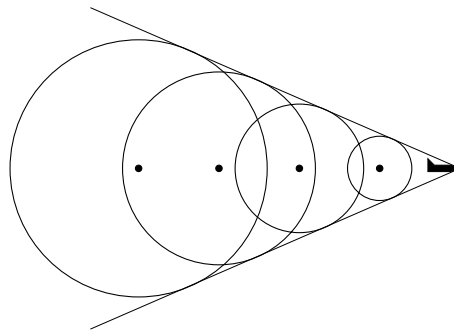


Abbildung 12.21: Bewegt sich ein Körper mit Überschallgeschwindigkeit, so bilden die Schallwellen einen Mach'schen Kegel

12.4.5 Mach'scher Kegel

Bei der Herleitung des Doppler-Effekts, insbesondere bei der Beschreibung in Abschn. 12.4.1 haben wir stillschweigend eine Annahme gemacht: die Geschwindigkeit des Senders ist kleiner als die Ausbreitungsgeschwindigkeit, d.h. er erzeugt den nächsten Wellenberg immer noch innerhalb des Kreises, der durch den voran gegangenen beschrieben wird. Bewegt sich der Sender jedoch mit einer Geschwindigkeit größer als die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, d.h. $v > c$, so läuft er der Welle davon: der nächste Wellenberg wird erzeugt, wenn der Sender außerhalb des durch den vorher erzeugten Wellenberges beschriebenen Kreis ist. Hinter dem Sender bildet sich ein Muster von Wellenbergen aus, das durch einen Kegel begrenzt ist. Dieser Kegel wird als Mach'scher Kegel bezeichnet, sein Öffnungswinkel (Winkel zwischen den beiden begrenzenden Geraden) ist gegeben durch

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{c}{v}. \quad (12.26)$$

Der Sender sitzt dabei in der Kegelspitze, der Kegel bewegt sich mit dem Sender. An den den Kegel begrenzenden Geraden überlagern sich die Wellenberge, so dass eine große Amplitude entsteht.

Ein typisches Beispiel ist ein Überschallflugzeug; da der Mach'sche Kegel vom Flugzeug mit sich geschleppt wird, wird er auch früher oder später über einen am Boden stehenden Menschen geschleppt. Dieser empfindet die hohe Amplitude an der Kegelfront als einen Knall, den Überschallknall.

12.5 Aufgaben

1. Wie groß ist die Schwingungsperiode einer Masse, die mit einer Frequenz von 10 Hz schwingt?
2. Wie verhält sich die Amplitude einer Schaukel, wenn sie mit der doppelten der Eigenfrequenz angeregt wird?
3. Können auch einer Wasseroberfläche Transversalwellen entstehen?
4. Wie verhält sich der Abstand zweier benachbarter Schwingungsknoten oder -bäuche zur Wellenlänge?
5. Wie verhält sich die Wellenlänge der dritten Harmonischen bei einer Seilwelle zur Länge des Seils?
6. Beim Federpendel wirkt auf die Masse beim Durchgang durch die Ruhelage keine Kraft. Warum bleibt das Pendel dort nicht stehen?

7. Wie können Sie die Frequenz eines Fadenpendels erhöhen, wie die eines Federpendels?
8. Ein Federpendel wird um 1 cm aus der Ruhelage ausgelenkt und seine Schwingungsperiode gemessen. Anschließend lenken Sie das Federpendel um 2 cm aus der Ruhelage aus. Was erwarten Sie für die Schwingungsperiode?
9. Eine Standuhr läuft etwas zu schnell. Die Masse am Pendel kann verschoben werden. Müssen Sie sie nach oben oder unten schieben, um den Laufzeitfehler zu korrigieren?
10. Was bewegt sich wirklich über die Oberfläche eines Sees wenn Sie einen Stein in ihn hinein werfen?
11. Hängt die Eigenfrequenz einer Schaukel davon ab, ob man auf dem Schaukelbrett sitzt oder steht?
12. Kann ein lauter Schrei ein leises Flüstern überholen?
13. Wodurch kann man die Geschwindigkeit von Seilwellen erhöhen?
14. Wenn ein Trog am freien Ende eines Seils reflektiert wird, kehrt er als Trog oder als Berg zurück? Ändert sich die Situation bei einem festen Ende?
15. Ein Puls in Form eines Berges läuft vom rechten Ende des Seils los. Ein Trog breitet sich in die entgegengesetzte Richtung aus, so dass sich beide in der Mitte des Seils treffen. Erwarten Sie am rechten Ende die Ankunft eines Berges oder eines Tals?
16. Zwei Wellen gleicher Geschwindigkeit haben verschiedene Wellenlängen. Welche hat die größere Frequenz?
17. Was geschieht bei Zunahme der Frequenz mit der Wellenlänge?
18. Was geschieht bei Zunahme der Schwingungsdauer mit der Wellenlänge?
19. Was geschieht bei Verdopplung der Wellengeschwindigkeit mit der Wellenlänge wenn die Frequenz konstant bleibt?
20. Wie weit bewegt sich eine Welle während einer Schwingungsperiode?
21. Wieviel größer ist die Frequenz der dritten Harmonischen einer Seilwelle als die Grundfrequenz?
22. Warum hören wir keine Schwebung, wenn auf einem Klavier benachbarte Noten angeschlagen werden?
23. Ein Modellflugzeug fliegt an einem Draht in einem Kreis um Ihren Kopf. Hören Sie eine Dopplerverschiebung?
24. Ist die Schallgeschwindigkeit größer in Luft oder in Wasser?
25. Wie kann man fest stellen, dass Schallwellen Longitudinalwellen sind?
26. Bewegt sich eine 220 Hz Schallwelle schneller oder langsamer als eine 440 Hz Welle?
27. Warum klingt die Stimme eines Menschen, der Helium inhaliert hat, viel höher als normal?
28. Welche Eigenschaft einer Welle bestimmt ihre Intensität.
29. Welche Eigenschaft einer Schallwelle bestimmt ihre Lautstärke?
30. Welche Harmonische ist eine Oktave höher als die Grundfrequenz?
31. Wie kann man die Frequenz eines Tones auf einer Gitarrensaite erhöhen?

32. Wie kann man die Wellengeschwindigkeit auf einer Gitarrensaite erhöhen?
33. Zwei stehende Wellen werden auf einer Gitarrensaite erzeugt. Ist die Frequenz der Welle mit der kleineren Wellenlänge größer, kleiner oder gleich der der anderen Welle?
34. Warum ist die Masse pro Einheitslänge für die Saite eines Cellos größer als bei einer Geigensaite?
35. Wie verändert sich die Frequenz einer Orgelpfeife, wenn Sie von ihrem Ende ein Stückchen absägen?
36. Warum klingt das mittlere C auf einer Oboe anders als auf einem Klavier?
37. Die beiden Saiten, die einen bestimmten Ton eines Klaviers erzeugen, sind verstimmt. Sie erhöhen die Spannung in der Saite, die die geringere Frequenz erzeugt. Wie verändert sich die Frequenz der Schwebung?
38. Warum klingt der Mach'sche Kegel (das Durchbrechen der Schallmauer) ähnlich wie eine Explosion?
39. Standuhr: Ein Uhrwerk werde durch ein Fadenpendel von 1 m Länge angetrieben. Wie groß darf der Fehler in der Fadenlänge maximal werden, wenn die Uhr innerhalb von 24 h nicht mehr als 1 min Gangungenauigkeit haben soll? Hinweis: zur Vereinfachung der Rechnung verwenden Sie relative Fehler! Rechnen Sie mit vielen Nachkommastellen!
40. Pendel und Energieerhaltung: ein Fadenpendel der Länge $l = 5$ m startet aus einer Höhe von 20 cm über seiner Ruhelage. Wie groß ist die Geschwindigkeit im tiefsten Punkt der Pendelbewegung. Wie ändert sich diese, wenn das Pendel eine größere (z.B. 10 m) oder eine geringere (z.B. 1 m) Länge hat?
41. Ein Foucault-Pendel mit einer Länge von 9 m hat eine Schwingungsperiode von 6 s. Wie groß ist seine Frequenz?
42. Eine Masse von 1 kg an einer Feder hat eine Schwingungsdauer von 0.3 s. Die Amplitude der Bewegung beträgt 10 cm. (a) Bestimmen Sie die Federkonstante. (b) Wie groß ist die in der Feder gespeicherte potentielle Energie zur Zeit der maximalen Auslenkung? (c) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit der Masse?
43. Bestimmen Sie die Frequenz einer 0.1 kg Masse an einer Feder mit $k = 0.9$ N/m.
44. Bestimmen Sie die Schwingungsperiode eines 1.7 m Fadenpendels auf der Erde und auf dem Mond (Gravitationsbeschleunigung auf dem Mond $1/6$ der auf der Erde).
45. Kreisscheibe als Pendel: Eine Kreisscheibe mit Radius $r = 20$ cm und Masse $m = 1$ kg kann sich um eine Achse senkrecht zur Scheibe durch einen Punkt auf dem Umfang drehen. Dieses Pendel wird aus seiner Ruhelage ausgelenkt. Beschreiben Sie die sich ergebende Bewegung mit Hilfe der Energieerhaltung, können Sie wie in der voran gegangenen Aufgabe Angaben zu Geschwindigkeiten machen?
46. Massenverhältnis: Zwei Massen m und M sind an identischen Federn mit der Federkonstante k befestigt. Beide Federpendel werden in Bewegung gesetzt. Die Frequenz, mit der die Masse M schwingt, beträgt das dreifache der Frequenz, mit der m schwingt. Wie groß ist das Verhältnis der Massen?
47. Die Frequenz eines Federpendels beträgt 5 Hz. Wie groß ist die Beschleunigung der Masse, wenn dieses Pendel um 0.15 m ausgelenkt wird?
48. Die Periodendauer eines Federpendels mit einer Masse von 1 kg beträgt 2 s. Bestimmen Sie die Federkonstante.

49. Wie lang muss der Faden eines Fadenpendels sein, damit die Schwingungsdauer genau 1 s beträgt?
50. Fadenpendel hat an der Erdoberfläche eine Periodendauer von 2 s. Auf einem anderen Planeten beträgt die Periodendauer der Schwingung nur 1 s. Wie groß ist die Gravitationsbeschleunigung auf diesem Planeten?
51. Wellenzüge am Strand haben einen Abstand von 5 m und treffen mit einer Frequenz von 0.3 Hz auf das Ufer. Mit welcher Geschwindigkeit breiten sich die Wellen aus?
52. Ein Wellenzug auf einer Seilwelle bewegt sich innerhalb von 0.05 s um 10 cm. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, mit der sich der Puls ausbreitet. Wie groß wäre die Frequenz eines Welle in dem gleichen Seil für eine Wellenlänge von 0.8 m?
53. Eine Schallwelle hat eine Frequenz von 500 Hz, die Frequenz von gelbem Licht beträgt $5 \cdot 10^{14}$ Hz. Die Schallgeschwindigkeit in Luft beträgt 344 m/s, die Lichtgeschwindigkeit $3 \cdot 10^8$ m/s. Bestimmen Sie die Wellenlängen der beiden Wellen.
54. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit einer Wasserwelle mit einer Frequenz von 5 Hz und einer Wellenlänge von 8 cm.
55. Die Spannung der längsten Saite eines Klavier beträgt 1098 N, die Masse pro Längenelement 0.065 kg/m. Mit welcher Geschwindigkeit breitet sich eine Welle auf dieser Saite aus?
56. Bestimmen Sie die Frequenzen der ersten drei Harmonischen der längsten Saite eines Klavier. Die Länge der Saite beträgt 1.98 m, die Geschwindigkeit der Welle 130 m/s.
57. Welche Wellenlänge entspricht der fünften Harmonischen einer 50 cm langen Orgelpfeife?
58. Eine Radarantenne sendet elektromagnetische Strahlung ($c = 3 \cdot 10^8$ m/s) mit einer Wellenlänge von 3 cm für 0.5 s. (a) Bestimmen Sie die Frequenz der Strahlung. (b) Wie viele vollständige Wellenzüge werden innerhalb dieses Zeitintervalls emittiert? (c) Wie weit ist die Wellenfront nach 0.5 s von der Antenne entfernt?
59. In welcher Tiefe schwimmt der Fischschwarm, wenn der Sonarimpuls nach 0.06 s zurück gekehrt ist?
60. Die Spannung eine Saite beträgt das Vierfache derer einer identischen Saite. Wie groß ist das Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeiten in den beiden Saiten.
61. Die tiefste Saite einer Geige ist 33 cm lang und steht unter einer Spannung von 55 N. Ihre Grundfrequenz beträgt 196 Hz. Bestimmen Sie die Masse pro Einheitslänge der Saite.
62. Bestimmen Sie die Frequenz der Schwebung, wenn zwei Stimmgabeln mit den Frequenzen 200 Hz und 205 Hz gleichzeitig schwingen.
63. Welche Frequenzen kann eine Stimmgabel haben, wenn sie zusammen mit einer Stimmgabel der Frequenz 300 Hz eine Schwebung von 4 Hz erzeugt?
64. Ein junger Erwachsener hört Frequenzen im Bereich von 20 Hz bis 20 000 Hz. Bestimmen Sie die dazu gehörigen Wellenlängen (Schallgeschwindigkeit in Luft 344 m/s).
65. Eine Fledermaus kann Frequenzen bis zu 120 000 Hz wahrnehmen. Welcher Wellenlänge entspricht dies (Schallgeschwindigkeit 344 m/s)?
66. Wellenlänge und Frequenz: Licht breitet sich im Vakuum, unabhängig von der Frequenz, mit der Lichtgeschwindigkeit $c = 299\,793$ km/s aus. Bestimmen Sie die Frequenzen von infrarotem Licht (Wellenlänge $\lambda = 400\,000$ nm), rotem Licht ($\lambda = 770$ nm), blauem Licht ($\lambda = 420$ nm) und ultraviolettem Licht ($\lambda = 10$ nm).

67. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle auf der höchsten Saite einer Geige beträgt 435 m/s, die Länge der Saite ist $l = 0.33$ m. Wenn der Geigenspieler die Saite an einer Stelle $l/3$ nieder drückt, entsteht ein Schwingungsknoten. Wie groß ist die niedrigste Frequenz, die dabei entstehen kann?
68. Eine Stimmgabel mit einer Frequenz von 520 Hz erklingt gleichzeitig mit einer Geigensaite. Dabei erklingt eine Schwebung mit einer Frequenz von 5 Hz. Wie groß ist die Frequenz der Geigensaite?
69. Bestimmen Sie die Grundfrequenz einer 60 cm langen Banjo-Saite wenn die Schallgeschwindigkeit in der Saite 470 m/s beträgt.
70. Eine Stimmgabel schwingt mit einer Periodendauer von 0.0008 s. Wie groß ist ihre Frequenz?
71. Wie groß ist die Wellenlänge von Infraschall mit einer Frequenz von 3 Hz?
72. Die Grundfrequenz der längsten Pfeife einer Orgel beträgt 16.35 Hz. Die Pfeife ist an beiden Ende offen. Bestimmen Sie die Länge der Pfeife. Welche Länge würde sich für eine geschlossene Pfeife ergeben.
73. Eine Kirchenorgel mit offenen Pfeifen hat einen Frequenzumfang von 65 Hz bis 2090 Hz (jeweils Grundfrequenzen). Wie lang sind die längste und die kürzeste Pfeife?
74. Das äußerer Ohr kann man sich als ein einseitig geschlossenes Rohr mit einer Länge von 2.7 cm vorstellen. (a) Schall mit welcher Frequenz wird dann am einfachsten vom Ohr nachgewiesen? (b) Wie vergleicht sich dieser Wert mit dem Minimum im Ansprachvermögen des menschlichen Ohres?
75. Ohrschützer werden mit dem Hinweis, dass sie den Schall um 10 dB reduzieren, verkauft. Wie stark reduzieren Sie die Intensität des Schalls?
76. Ohrschützer können die Intensität eines Schallsignals um einen Faktor 100 000 reduzieren. Um wie viele dB wird das Schallsignal dabei reduziert?
77. Eine Seilwelle hat eine Amplitude von 0.1 m. Sie passiert einen Spalt, der um 30° gegen die Schwingungsrichtung geneigt ist. Bestimmen Sie die Amplitude der Seilwelle hinter dem Spalt.
78. Eine Seilwelle hat in der Vertikalen eine Amplitude von 0.2 m. Sie breitet sich durch zwei Spalte aus: der erste ist um 45° gegen die Vertikale geneigt, der zweite ist vertikal. Bestimmen Sie die Amplituden der Welle hinter dem ersten Spalt sowie hinter dem zweiten Spalt. Wie groß ist die Energie der Welle hinter dem zweiten Spalt im Verhältnis zur Energie vor dem ersten Spalt?
79. Doppler-Effekt: Eine Sirene hat eine Frequenz von 1000 Hz. Welche Frequenz hört ein Radfahrer, der sich mit einer Geschwindigkeit von 7 m/s auf die Sirene zu bewegt bzw. sich mit einer Geschwindigkeit von 5 m/s von ihr fort bewegt? (Schallgeschwindigkeit in Luft: 344 m/s).
80. Die Sirene eines Polizeiwagens hat eine Frequenz von 1000 Hz. Er bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 15 m/s zuerst auf einen ruhenden Beobachter zu, dann von ihm weg. Bestimmen Sie die Änderung der vom Beobachter gehörten Frequenz.
81. Von zwei identischen 500 Hz Stimmgabeln befindet sich eine in Ruhe, die andere bewegt sich relativ dazu. Dabei entsteht eine Schwebung von 5 Hz. (a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit der sich bewegenden Stimmgabel. (b) Können Sie bestimmen, ob sich die bewegte Stimmgabel von der ruhenden entfernt oder auf sie zu bewegt?

82. Eine Galaxie entfernt sich von uns mit einer Geschwindigkeit von $3 \cdot 10^7$ m/s. Sie emittiert Licht einer Frequenz von $6 \cdot 10^{14}$ Hz. Licht welcher Frequenz empfängt ein Beobachter auf der Erde?
83. Eine Fledermaus bewegt sich auf ein ruhendes Hindernis zu. Sie sendet eine Frequenz von 50 000 Hz und empfängt eine von 51 000 Hz. Wie schnell bewegt sich die Fledermaus?
84. Doppler-Effekt zur Geschwindigkeitsmessung: Eine Fledermaus orientiert sich mit Hilfe von Ultraschall-Signalen mit einer Frequenz von 30 kHz. Die Fledermaus hängt träge von einem Dachbalken und sondiert ihre Umgebung. Plötzlich nimmt sie eine Reflektion des Ultraschall-Signals wahr, die in der Frequenz um 70 Hz höher ist, als das von ihr ausgesandte Signal. Sollte die Fledermaus sich von diesem Signal bedroht fühlen oder nicht? Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich der 'Reflektor' des Signals? Angenommen, der Reflektor kann ebenfalls Ultraschalls-Signale wahrnehmen, welche Frequenz würde er erkennen? (Hinweise: (a) die Schallgeschwindigkeit beträgt 340 m/s; (b) die Geschwindigkeit des Reflektors ist klein gegen die Schallgeschwindigkeit; (c) Sie erhalten im Laufe des Lösungsverfahrens einen Bruch der Form $(1 + v/c)/(1 - v/c)$, den Sie durch erweitern mit $(1 + v/c)$ und vernachlässigen von Ausdrücken mit v^2/c^2 vereinfachen können. Das Vernachlässigen von v^2/c^2 ist erlaubt, da v/c schon klein sein soll und damit v^2/c^2 ganz klein ist, eben vernachlässigbar.)
85. Die maximale (Druck-)Amplitude Δp einer Schallwelle, die noch vom menschlichen Ohr toleriert wird, beträgt 28 Pa. (a) Welchem Anteil am Bodendruck der Atmosphäre entspricht dies? (b) Welcher Intensität der Schallwelle entspricht dies bei Raumtemperatur (Dichte $\rho = 1.05$ kg/m³, Schallgeschwindigkeit 344 m/s)?
86. Der Bass-Lautsprecher einer Stereo-Anlage hat eine Oberfläche von 0.05 m² und erzeugt 1 W akustische Leistung. (a) Bestimmen Sie die Intensität am Lautsprecher. (b) Der Schall wird gleichförmig in den Halbraum vor dem Lautsprecher abgestrahlt. In welchem Abstand ist seine Intensität auf 0.1 W/m² abgesunken?
87. Ein Kupferrohr wird an einem Ende angeschlagen. Bestimmen Sie die Länge des Rohres, wenn der Schall in Luft 1 s später ankommt als der im Rohr geleitete.
88. Wenn sich eine Fledermaus einem Objekt nähert, verringert sie die Dauer ihrer Schallsignale ebenso wie den Abstand zwischen ihnen. Ein kurzes Schallsignal dauert $3 \cdot 10^{-4}$ s. Bestimmen Sie die kleinste Entfernung, bei der der erste Teil des Echos ankommt bevor der letzte Teil des Signals emittiert ist.
89. Zwei Schallwellen gleicher Druckamplitude breiten sich in Luft und in Wasser aus. Wie groß ist das Verhältnis ihrer Intensitäten?
90. Bestimmen Sie die Intensität einer Schallwelle in Luft mit einer Druckamplitude von 1 Pa.
91. Schall kann vom Menschen auch durch die Weiterleitung der Vibrationen zum Innenohr durch den Knochen wahrgenommen werden. In dieser Form von Hören spielen das äußere Ohr und das Mittelohr keine Rolle. (a) Skizzieren Sie eine Methode für einen Gehörttest, bei dem fest gestellt werden kann, ob ein Hörschaden nur im inneren Ohr oder auch im Mittelohr lokalisiert ist. (b) Für welche Arten von Hörfehler sind Hörhilfen verwendbar, die den Schall durch den Schädelknochen transportieren?
92. Knochen ist ein besserer Leiter für niederfrequente Schallwellen als Luft. Warum empfindet eine Person ihre Stimme als voller und tiefer als ein Zuhörer?
93. Bestimmen Sie das Verhältnis der Intensitäten zweier Schallwellen, wenn die eine 10 dB lauter ist als die andere.

94. Bestimmen Sie die Intensität einer Schallwelle, die 5 dB lauter ist als Schall mit einer Intensität von 10^{-9} W/m^2 .
95. Die Fläche des Trommelfells des Ohres beträgt $8 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$. Welche Leistung wird auf das Trommelfell übertragen, wenn eine Schallwelle von 40 dB auftritt und kein Schall reflektiert wird?
96. Die Lautsprecheranlage auf einem Bahnhof ist so eingestellt, dass ein Hörer in einem Abstand von 10 m ein Schallsignal von 70 dB wahrnimmt. Welche Intensität wird in einem Abstand von 50 m wahrgenommen?
97. Ultraschall: Die Dichten von zwei verschiedenen Typen von menschlichem Gewebe betragen 1026 kg/m^3 und 1068 kg/m^3 . Wie groß ist das Verhältnis von reflektierter und einfallender Welle, wenn sich die Welle aus dem dichteren in das dünnere Medium bewegt?
98. In einem Hirnscan werden die Echos von der rechten Seite des Schädels, von der Mittellinie und von der linken Seite des Schädels nach jeweils $0.1 \cdot 10^{-4}$, $1.26 \cdot 10^{-4}$ und $2.4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ beobachtet. Die Schallgeschwindigkeit beträgt 1540 m/s . Wie weit ist die Mittellinie gegen die wahre Mitte versetzt? Welche Hemisphäre des Gehirns ist vergrößert?

Kapitel 13

Optik

Das voran gegangene Kapitel hat Ihnen eine Einführung in die Grundbegriffe von Wellen gegeben. In diesem Kapitel sollen die Ideen auf das Licht angewandt werden. Das Kapitel beginnt mit der Einführung von Licht als elektromagnetischer Welle (Abschn. 13.1) und dem Konzept der ebenen Welle (Abschn. 13.2). Daran schließen sich an Abschnitte, die sie in der Schule unter dem Oberbegriff geometrische Optik kennen gelernt haben (Abschn. 13.4–13.7). Geometrische Optik bedeutet dabei, dass wir mit der Vorstellung des Lichtstrahls argumentieren können. Diese Vorstellung werden wir u.a. verwenden, um die Funktionsweise optischer Instrumente wie Lupe, Fernrohr und Mikroskop zu verstehen. Wir werden in diesen Abschnitten auch über den normalen Mittelstufenstoff hinaus gehen, in dem wir unsere Kenntnisse über Wellen verwenden, um die durch die geometrische Optik gegebene Beschreibung zu verstehen.

Im zweiten Teil des Kapitels (Abschn. 13.8–13.12) werden wir uns mit der Wellenoptik beschäftigen. Dazu gehören insbesondere die bereits im voran gegangenen Kapitel erwähnten Konzepte von Beugung, Interferenz und Polarisation. Wir werden dabei u.a. lernen, warum das Auflösungsvermögen eines Mikroskops begrenzt ist.

13.1 Licht als elektromagnetische Welle

Licht ist eine elektromagnetische Welle. Im Gegensatz zu den bisher betrachteten Wellen schwingt hier keine Materie sondern ein elektromagnetisches Feld. Die Entstehung einer elektromagnetischen Welle können wir uns mit Hilfe der Gesetze veranschaulichen, die wir in Kap. 11 kennen gelernt haben.

13.1.1 Elektromagnetische Wellen

Die Entstehung einer elektromagnetischen Welle können wir uns durch ein hin- und her schwingendes Elektron veranschaulichen. Bewegte Ladungen sind Ströme, d.h. sie umgeben sich mit einem Magnetfeld (vgl. Abschn. 11.4.1). Betrachten wir ein Elektron, das in einem Drahtstückchen hin und her schwingt. Bewegt sich das Elektron in Abb. 13.1 nach oben (technische Stromrichtung entgegen gesetzt der Elektronenbewegung, daher Pfeil nach unten), so erzeugt es ein Magnetfeld (gestrichelte Kreise). Diese Feld ist kreisförmig um die Elektronenbahn, d.h. es liegt in einer Ebene senkrecht zur Papierebene. Die Richtung des Feldes ist durch die rechte Hand Regel gegeben, für das nach oben bewegte Elektron weist das Feld auf der rechten Seite in die Papierebene hinein. Kommt das Elektron am obersten Punkt des Leiters zur Ruhe, so fließt kein Strom mehr und das Magnetfeld klingt ab (mittleres Teilbild). Dann haben wir ein veränderliches Magnetfeld. Dieses veränderliche Feld umgibt sich seinerseits mit einem elektrischen Feld (durchgezogene Kurven). Ist das Magnetfeld vollständig abgeklungen, so gibt es keine Änderung des magnetischen Feldes mehr und damit auch keine Quelle für das elektrische Feld, so dass dieses abklingt. Ein veränderliches elektrisches Feld

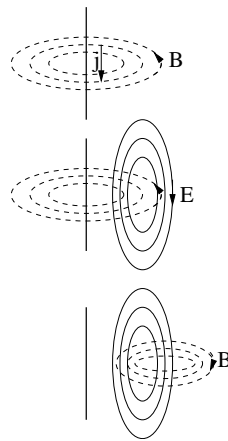


Abbildung 13.1: Entstehung einer elektromagnetischen Welle aus der Oszillation von Elektronen in einem Draht (Antenne), vgl. auch Abb. 11.21

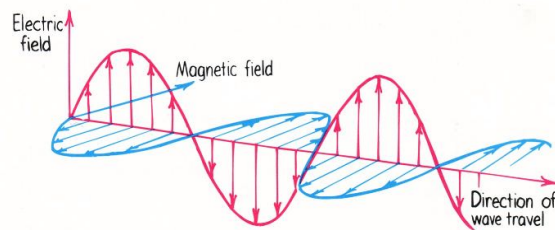


Abbildung 13.2: In der elektromagnetischen Welle stehen das elektrische und das magnetische Feld senkrecht aufeinander und beide stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der Welle

erzeugt, ebenso wie ein Strom, ein magnetisches Feld (unteres Teilbild) usw. Auf diese Weise lässt sich eine Störung erzeugen, die sich vom Draht weg ausbreitet.

Aus dieser Störung wird eine Welle, wenn das Elektron im Draht nach unten zurück schwingt. Dabei erzeugt es ein magnetisches Feld, das dem bei der Aufwärtsbewegung erzeugtem entgegen gesetzt ist. Durch diesen steten Wechsel von elektrischem und magnetischem Feld entsteht eine elektromagnetische Welle, die sich durch den Raum ausbreitet.

Die Bewegung des Elektrons sowie die Schwingung des elektrischen und des magnetischen Feldes stehen jeweils senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung, die elektromagnetische Welle ist also eine Transversalwelle.

Die elektromagnetische Welle hat die folgenden Eigenschaften, vgl. Abb. 13.2:

- das elektrische und das magnetische Feld stehen senkrecht auf einander,
- das elektrische und das magnetische Feld schwingen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung der Welle (Transversalwelle).

Die elektromagnetische Welle ist in ihrer Entstehung zwar an Materie gebunden (Schwingung von Elektronen), sie kann sich jedoch im Vakuum ausbreiten, da die Welle selbst keine Schwingung von Materie beinhaltet sondern nur die Schwingung eines elektromagnetischen Feldes. Dieses ist eine Eigenschaft des Raumes, die nicht an die Materie gebunden ist (vgl. Kap. 11).

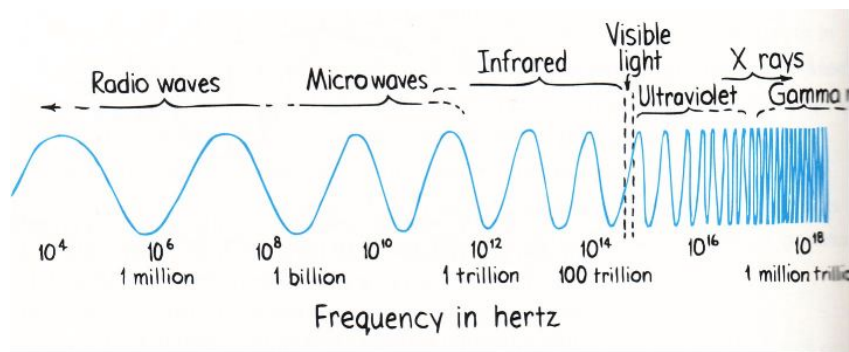


Abbildung 13.3: Das elektromagnetische Spektrum erstreckt sich von den Radiowellen (links, niedrige Frequenz und große Wellenlänge) über das sichtbare Licht bis hin zu den Röntgen- und Gammastrahlen (rechts, hohe Frequenz und kleine Wellenlänge); [22]

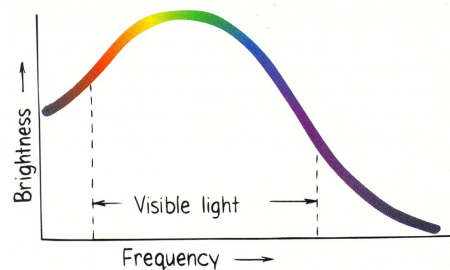


Abbildung 13.4: Intensitätsverteilung in natürlichem Licht im sichtbaren Bereich des elektromagnetischen Spektrums [22]

13.1.2 Elektromagnetisches Spektrum

Elektromagnetische Wellen können über einen weiten Bereich von Frequenzen und Wellenlänge erzeugt werden. Wie für alle Wellen sind Frequenz und Wellenlänge über die Ausbreitungsgeschwindigkeit mit einander verknüpft: $c = \lambda f$, wobei hier c die Lichtgeschwindigkeit ist (im Vakuum ist $c = 300\,000\text{ km/s}$). Abbildung 13.3 gibt einen groben Überblick über das elektromagnetische Spektrum: im langwelligen bzw. niederfrequenten Bereich finden sich die Radiowellen mit Wellenlängen im Meter-Bereich. Mit zunehmender Frequenz nimmt die Wellenlänge ab: an die Radiowellen schließen sich die Mikrowellen an, daran die thermische Infrarot-Strahlung. Das sichtbare Spektrum beginnt bei einer Wellenlänge von 700 nm (rot) und erstreckt sich bis 400 nm (violett). Daran schließt sich die harte elektromagnetische Strahlung an: UV-Strahlung, Röntgenstrahlung und γ -Strahlung. Der sichtbare Bereich macht also nur einen sehr kleinen Anteil des elektromagnetischen Spektrums aus.

Abbildung 13.4 gibt einen Überblick über den sichtbaren Bereich; die Intensitätsverteilung entspricht der im Sonnenlicht. Dieses hat seine maximale Intensität im gelblich-grünen Bereich, zu den Rändern des Spektrums (rot zu kleinen Frequenzen und violett zu hohen Frequenzen) fällt die Intensität ab. Ungefähr die Hälfte der von der Sonne emittierten Energie liegt im sichtbaren Bereich des elektromagnetischen Spektrums, ca. 1% bei kürzeren Wellenlängen (UV und Röntgen) und der Rest größtenteils im Infrarot. Auf Grund dieser Intensitätsverteilung ist in der Abbildung der Abfall zu den hohen Frequenzen auch wesentlich stärker als der zu den niedrigen.

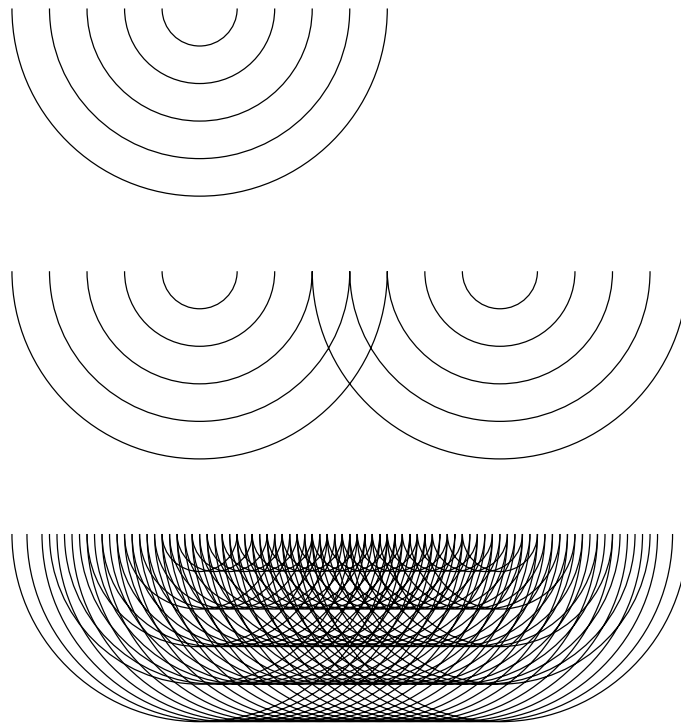


Abbildung 13.5: Erklärung der Entstehung einer ebenen Welle (unten) mit Hilfe des Huyghens'schen Prinzips

13.2 Ebene Wellen und Huyghen'sches Prinzip

Die schwingenden Elektronen, die eine elektromagnetische Welle erzeugen, können z.B. die Elektronen in den Atomen einer Kerzenflamme oder eines Drahtes in der Glühlampe sein. In beiden Fällen handelt es sich um ausgedehnte Körper, in denen viele Elektronen schwingen. Diese erzeugen jeweils eine Elementarwelle, die sich überlagern (Interferenz, s. Kap. 12). Wollen wir die Ausbreitung von Licht untersuchen, so interessieren uns jedoch nicht einzelne Elementarwellen sondern Lichtstrahlen. Dabei helfen uns das Konzept der ebenen Welle und das Huyghens'sche Prinzip.

Definition 38 Huyghens'sches Prinzip: *jeder Punkt einer Welle ist der Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle.*

Jeder Punkt eines ausgedehnten Körpers emittiert eine Elementarwelle. Diese überlagern sich. Dabei löschen sich Wellenberge und -täler gegenseitig aus (destruktive Interferenz), Wellenberge und Wellenberge dagegen verstärken sich (konstruktive Interferenz). Dabei entsteht eine ebene Welle. Im oberen Teil von Abb. 13.5 sind die von einem Punkt ausgehenden Wellenberge angedeutet, entsprechend einer Elementarwelle. Im mittleren Teilbild erkennt man, wie sich die Elementarwellen von zwei Punkten teilweise überlagern. Berücksichtigt man weitere Punkte zwischen diesen beiden Punkten als Ausgangspunkt von Elementarwellen, so entsteht das untere Bild. Man erkennt die Überlagerung der einzelnen Elementarwellen als dunkle Bereiche: vor den Ausgangspunkten der Elementarwellen bildet sich eine ebene Welle aus, die in der Abbildung als gerade Wellenfront nach unten wandern würde. In den Randbereichen überlagern sich die Elementarwellen derart, dass die Wellenfront wieder ein Kreissegment wird. Für unsere Betrachtungen ist der mittlere Teil, der Bereich der ebenen Welle, der entscheidende.

Die durch die ebene Welle eingeführte Wellenfront beschreibt, wie sich die Welle ausbreitet. Für die geometrische Optik betrachten wir einen senkrecht auf den Wellenfronten

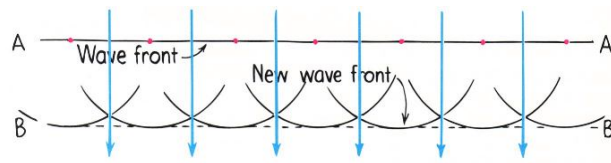


Abbildung 13.6: Ausbreitung einer ebenen Welle, erklärt mit Hilfe des Huyghens'schen Prinzips

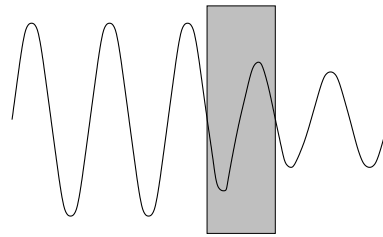


Abbildung 13.7: Absorption beschreibt die Verringerung der Intensität beim Durchgang elektromagnetischer Strahlung durch Materie. Im Wellenbild ist die quadrierte Amplitude der Welle der Intensität proportional, d.h. Absorption entspricht auch einer Verringerung der Amplitude der Welle

stehenden Strahl, d.h. eine in Ausbreitungsrichtung der Welle weisende Linie. Diese Senkrechte ist das, was wir anschaulich als Lichtstrahl bezeichnen.

Bei der Konstruktion der ebenen Welle in der oberen Abbildung haben wir die von einem Punkt ausgehenden Wellenberge zu verschiedenen Zeiten betrachtet – entsprechend den konzentrischen Kreisen bei der Elementarwelle. Das Huyghens'sche Prinzip ermöglicht eine andere Beschreibung. Hier gehen wir von einer Wellenfront aus. Die sich zu einer späteren Zeit ergebende Wellenfront erhalten wir, in dem wir an jedem Punkt der Wellenfront eine neue Elementarwelle konstruieren. Damit müssen wir nicht bis auf die Entstehung der Wellenfront zurück gehen, sondern können einfach von einer beobachteten Wellenfront ausgehen und deren Ausbreitung konstruieren.

13.3 Absorption

Absorption beschreibt die Abschwächung der Intensität einer Welle beim Durchgang durch Materie. Da die Intensität einer Welle durch deren Amplitude bestimmt ist, bedeutet eine Verringerung der Intensität gleichzeitig eine Verringerung der Amplitude: im Wellenbild erhalten wir für die mit der Absorption verbundene Abschwächung eines Lichtstrahls Abb. 13.7. Formal hängt die Abschwächung ab von (a) dem Absorptionskoeffizienten κ , d.h. einer Materialkonstante, und (b) der Dicke x des Materials:

$$I_h = I_o e^{-\kappa x} . \quad (13.1)$$

Darin ist I_h die Intensität hinter dem Absorber, I_o die Intensität der einfallenden Welle, und x die Dicke des Absorbers. Die Gleichung besagt, dass die Intensität der Welle mit zunehmender Dicke des Absorbers exponentiell abfällt.

Aus der Abbildung erkennen wir, dass die Intensität nicht an irgendeiner Stelle abrupt von I_o auf I_h ab nimmt, sondern dass diese Abnahme kontinuierlich erfolgt. Daher muss das Abschwächungsgesetz bereits innerhalb des Absorbers gelten und wir können auch schreiben

$$I(x) = I_o e^{-\kappa x} , \quad (13.2)$$

wobei $I(x)$ die Intensität am Ort x innerhalb des Absorbers ist. Diese Form des Abschwächungsgesetzes ist universell, wir werden dem Gesetz auch bei der Abschwächung von γ -Strahlung in Materie begegnen.

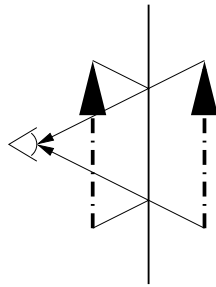


Abbildung 13.8: Bildkonstruktion am ebenen Spiegel: es entsteht ein virtuelles Bild

Aus (13.2) können wir uns auch die Bedeutung von κ veranschaulichen. Als erstes liefert eine Dimensionsanalyse, dass κ die Einheit $1/\text{m}$ haben muss, da das Produkt κx dimensionslos sein muss (der Exponent in einer Exponentialfunktion muss dimensionslos sein, genau so, wie auch das Argument einer Winkelfunktion). Außerdem sehen wir, dass sich die Intensität wie eine abfallende e-Funktion verändert. Bei derartigen Gesetzen wird der Abfall durch einen Parameter charakterisiert, der beschreibt, an welcher Stelle x_e die einfallende Intensität I_0 auf $1/e$ abgefallen ist. Dies ist der Fall, wenn $\kappa x_e = 1$ wird. Damit gibt $1/\kappa$ die Dicke an, bei der die Intensität auf $1/e$ abgeklungen ist.

13.4 Reflektion

Definition 39 *Reflektion ist die Änderung der Ausbreitungsrichtung eines Lichtstrahls beim Auftreffen auf einen Spiegel.*

Bei der Reflektion wird der auf den Spiegel treffende Lichtstrahl durch den Einfallswinkel α_{ein} charakterisiert, den er mit der Normalen auf dem Spiegel bildet. Der Winkel zwischen dem reflektierten Lichtstrahl und der Normalen ist der Ausfallswinkel α_{aus} . Am Spiegel gilt das Reflektionsgesetz “Einfallswinkel = Ausfallswinkel” oder formal

$$\alpha_{\text{ein}} = \alpha_{\text{aus}} . \quad (13.3)$$

Dieses Gesetz verwenden wir auch für die Bildkonstruktion am Spiegel, vgl. Abb. 13.8. Der im Spiegel zu betrachtende Gegenstand ist der Pfeil. Jeder Punkt dieses Pfeils emittiert Licht in alle Richtungen. Für Anfangs- und Endpunkt des Pfeils werden exemplarisch die Lichtstrahlen betrachtet, die nach Reflektion am Spiegel (unter Wahrung des Reflektionsgesetzes) in das Auge des Betrachters fallen. Die Bildkonstruktion erfolgt im Gehirn des Betrachters: dieser ist es gewohnt, dass sich Lichtstrahlen nur gradlinig ausbreiten können. Daher verlängert er jeden Lichtstrahl rückwärts weiter und wir erhalten das hinter dem Spiegel stehende Bild des Pfeils. Das Bild ist ein virtuelles Bild, d.h. ein scheinbares Bild: wir können es im Gegensatz zu einem reellen Bild nicht mit einer Mattscheibe auffangen sondern es entsteht im Kopf des Betrachters durch dessen Angewohnheit, Lichtstrahlen gradlinig zu verlängern.

Das Reflektionsgesetz können wir im Bild der Lichtwelle begründen, vgl. Abb. 13.9. Laufen Wellenfronten auf einen Spiegel zu, so können sich die an der Wellenfront entstehenden Elementarwellen so lange ungestört ausbreiten, bis die erste Elementarwelle (in der Abbildung die zum linken Teil der Wellenfront gehörende) auf den Spiegel trifft. Diese wird am Spiegel reflektiert während die Elementarwelle im rechten Teil sich ungestört ausbreitet. Die neue Wellenfront, die wir an diesen beiden Elementarwellen konstruieren können, weist dann einen Knick auf, da sich beide Elementarwellen in unterschiedlicher Richtung ausbreiten. Die an der neuen Wellenfront entstehenden Elementarwellen breiten sich im linken Teil vom Spiegel weg aus, im rechten dagegen auf den Spiegel zu: die hier entstehende Wellenfront hat wieder einen Knick, allerdings weiter rechts. Dieses unterschiedliche Verhalten (vom Spiegel weg laufend

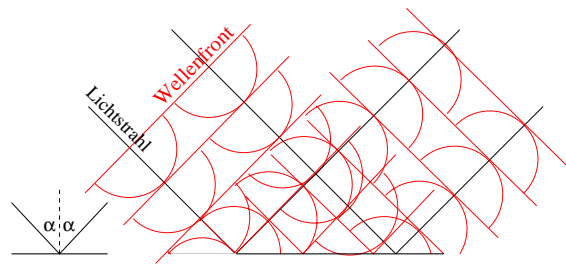


Abbildung 13.9: Erklärung des Reflektionsgesetzes im Wellenbild des Lichts

links, auf den Spiegel zu laufend rechts) setzt sich so lange fort, bis auch auf der rechten Seite die Elementarwelle vom Spiegel reflektiert wird und alle Wellen nach außen laufen. Die Wellenfronten sind dann wieder Geraden, allerdings ist ihre Neigung gegen die Spiegelfläche genau an dieser gespiegelt, da die einzelnen Elementarwellen zu unterschiedlichen Zeiten am Spiegel reflektiert wurden.

13.5 Brechung

Ebenfalls im Wellenmodell des Lichts kann die Brechung, d.h. die Ablenkung eines Lichtstrahls von seiner Ausbreitungsrichtung, verstanden werden.

Brechung tritt immer dann auf, wenn sich ein Lichtstrahl von einem Medium 1 mit dem Brechungsindex n_1 in ein Medium 2 mit Brechungsindex n_2 bewegt. Physikalisch bedeuten die unterschiedlichen Brechungsindizes unterschiedliche Ausbreitungsgeschwindigkeiten der Lichtwelle:

$$n = \frac{c_{\text{Vak}}}{c_{\text{Med}}} \quad (13.4)$$

mit c_{Vak} als der Lichtgeschwindigkeit im Vakuum und c_{Med} als der Lichtgeschwindigkeit im Medium. Da die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum maximal ist, kann der Brechungsindex nie kleiner werden als 1. In Luft breitet sich Licht praktisch genau so schnell aus, wie im Vakuum, d.h. es ist $c_{\text{Vak}} = c_{\text{Luft}}$ und damit $n_{\text{Luft}} = 1$. Vergleicht man zwei Materialien unterschiedlicher Brechungsindizes, so wird das Material mit dem größeren Brechungsindex als das optisch dichtere Material bezeichnet.

13.5.1 Snell'sches Brechungsgesetz

Im Wellenbild können wir Brechung durch die unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten des Lichts in verschiedenen Medien verstehen. Eine Wellenfront fällt auf ein optisch dichteres Medium, in dem sie sich nur langsamer ausbreiten kann. Dann wird der bereits im Medium befindliche Teil der Wellenfront verzögert, es entsteht ein Knick in der Wellenfront. Da die Lichtstrahlen senkrecht auf den Wellenfronten stehen, werden diese ebenfalls von ihrer ursprünglichen Ausbreitungsrichtung abgelenkt. Daraus ergibt sich das Snellius'sche Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{c_1}{c_2} \quad (13.5)$$

mit n_i als dem Brechungsindex des Mediums i , c_i als den Lichtgeschwindigkeiten in den Medien, und α_i als den Winkeln zwischen Lot und Lichtstrahl. Daher wird der Lichtstrahl beim Übergang vom optisch dünneren zum optisch dichteren Medium zum Lot hin gebrochen, beim Übergang von einem optisch dichteren in ein optisch dünneres vom Lot weg.

Das Brechungsgesetz lässt sich auch aus dem *Fermat'schen Prinzip* herleiten: ein Lichtstrahl sucht sich den schnellsten Weg zwischen zwei Punkten (entsprechend einem Rettungs-

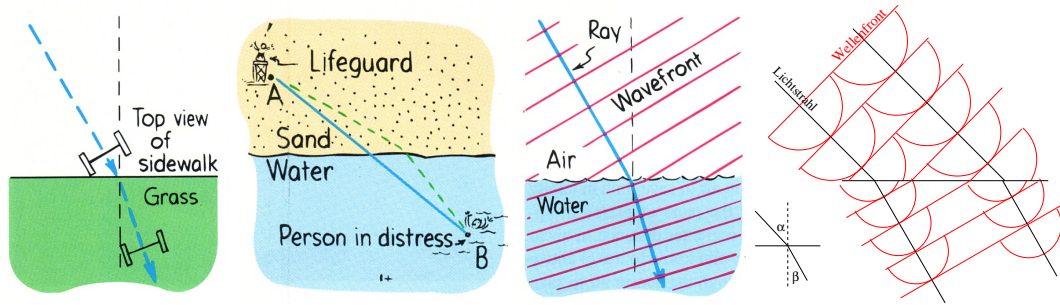


Abbildung 13.10: Verschiedene Darstellungen zum Brechungsgesetz: Verringerung der Ausbreitungsgeschwindigkeit entlang der Wellenfront im Bild einer starren Achse; Brechung und Fermat'schen Prinzip; Brechung und Wellenfronten; Brechung, Wellenfronten und Elementarwellen; Abbildungen a-c aus [22]

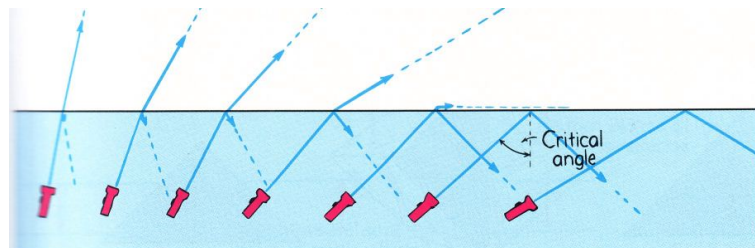


Abbildung 13.11: Totalreflektion: beim Übergang vom optisch dichteren zum optisch dünneren Medium wird der Lichtsstrahl vom Lot weggebrochen. Tritt Licht unter einem zu großen Winkel auf die Grenzfläche, so wird es nicht gebrochen sondern reflektiert [22]

schwimmer, der sich auf dem Strand schnell, im Wasser jedoch nur langsam fortbewegen kann, aber schnellstmöglich helfen will, vgl. Abb. 13.10).

13.5.2 Totalreflektion

Beim Übergang von einem optisch dichten auf ein optisch dünnes Medium kann *Totalreflexion* auftreten: das Licht tritt unter einem so großen Winkel auf die Grenzfläche zwischen den Medien auf, dass der Strahl nicht nach draußen gebrochen sondern nach innen reflektiert wird.

Zum Verständnis der Totalreflektion müssen wir uns daran erinnern, dass der Lichtstrahl beim Übergang vom optisch dichteren zum optisch dünneren Medium vom Lot weg gebrochen wird. Lassen wir einen Lichtstrahl nahezu senkrecht auf die Grenzfläche zwischen den Medien auf treffen, so wird beim Übergang vom optisch dichten zum optisch dünnen vom Lot weg gebrochen. Vergrößern wir den Winkel, unter dem der Lichtstrahl auf die Grenzfläche tritt, so vergrößert sich auch der Winkel, unter dem er aus dieser Fläche heraus tritt – letzterer vergrößert sich jedoch auf Grund des Brechungsgesetzes stärker. Daher muss es einen kritischen Winkel α_{krit} geben, bei dem der gebrochene Strahl genau parallel zur Grenzfläche gebrochen wird. Ist der Winkel, unter dem das Licht auf die Grenzfläche fällt, kleiner als der kritische Winkel, so kann das Licht in das dünnere Medium gelangen; ist der Winkel größer, so wird es in das dichtere Medium zurück reflektiert.

Formal können wir den kritischen Winkel aus dem Brechungsgesetz bestimmen. Der kritische Winkel α_{krit} ergibt sich genau dann, wenn der gebrochene Lichtstrahl unter einem Winkel α_2 von 90° aus tritt, d.h. wenn $\sin \alpha_2 = 1$. Dann erhalten wir aus dem Brechungsgesetz (mit $n_2 = 1$ für den Fall, dass wir den Übergang vom optisch dichteren Medium in Luft

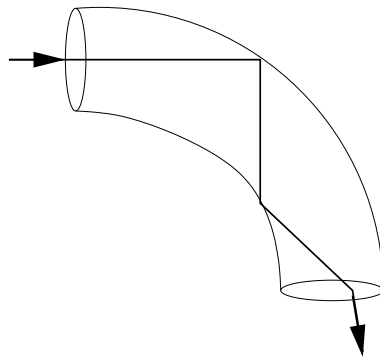


Abbildung 13.12: Totalreflektion im Lichtleiter: durch die Totalreflektion an der Grenzfläche zwischen Lichtleiter und umgebendem Medium kann der Lichtstrahl mit Hilfe des Lichtleiters um eine Kurve gelenkt werden

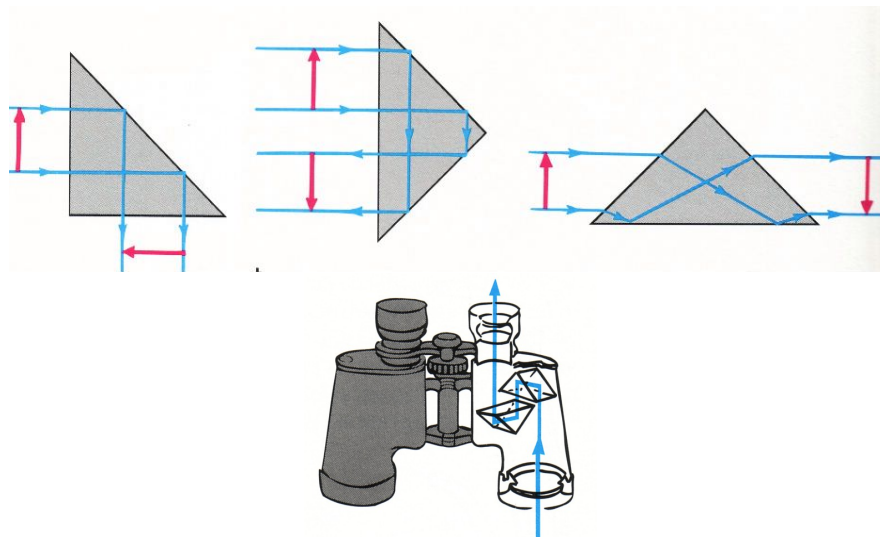


Abbildung 13.13: Totalreflektion in Prismen zur Umkehr des Lichtweges (oben) und Anwendung dieses Prinzips im Feldstecher (unten) [22]

oder ins Vakuum betrachten):

$$\frac{\sin \alpha_{\text{krit}}}{\sin \alpha_2} = \sin \alpha_{\text{krit}} = \frac{n_2}{n_1} . \quad (13.6)$$

Der Effekt der Totalreflektion wird im Lichtleiter ausgenutzt: Licht wird über die Querschnittsfläche einer Glasfaser in den Lichtleiter eingekoppelt. Da der Lichtstrahl ungefähr senkrecht auf dieser Fläche steht, trifft er in einem flachen Winkel (entsprechend einem großen Winkel gegen die Normale) auf die Seitenwände des Lichtleiters und wird dort total reflektiert. Erst wenn das Licht am anderen Ende der Glasfaser wieder in steilem Winkel auf die Querschnittsfläche trifft, verlässt es die Faser. Durch Krümmung der Glasfaser kann Licht “um die Ecke” geleitet werden und in Bereiche gelangen, die bei gradliniger Lichtausbreitung im Schatten liegen würden.

Lichtleiter haben vielfältige technische Anwendungen, in der minimalinvasiven Chirurgie werden sie sowohl zum Ausleuchten des Operationsgebiets als auch zum Einsehen in dieses verwendet. Ein Beispiel für einen natürlichen Lichtleiter ist das Fell eines Eisbären: Eisbären haben ein weißes Fell, damit sie in ihrer Umgebung gut getarnt sind. Weiss absorbiert jedoch elektromagnetische Strahlung schlecht, was in der kalten Umgebung ungünstig ist. Außerdem

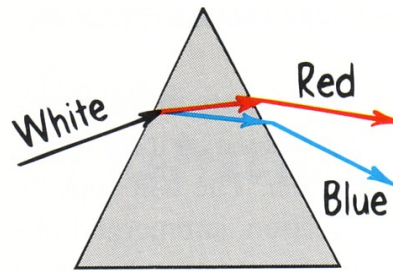


Abbildung 13.14: Dispersion: Aufspaltung des Lichts in Farben auf Grund der unterschiedlichen Ausbreitungsgeschwindigkeiten und damit Brechungsindizes [22]

ist das Fell des Eisbären sehr dicht, um gut gegen Auskühlung zu schützen. Damit wird die an der Oberfläche des Eisbärenfells absorbierte Energie auch nicht nach innen geleitet. Ein dunkles und dünneres Fell wäre im Hinblick auf die Absorption von Sonnenwärme für den Eisbären wesentlich praktischer – aus Tarnungs- und Isolationsgründen jedoch sicherlich nicht. Das Eisbärenfell stellt eine geschickte Lösung dar, in dem die einzelnen Haare wie Lichtleiter wirken. Damit ist das Eisbärenfell dicht genug, um gut gegen Wärmeverluste zu isolieren, die Lichtleiter lenken die einfallende Sonnenstrahlung jedoch auf die darunter liegende dunklere Haut, wo sie absorbiert wird.

In Prismen wird die Totalreflektion zur Umkehr des Lichtweges eingesetzt. Je nach verwendeter Geometrie lassen sich unterschiedliche Ablenkungswinkel realisieren, vgl. Abb. 13.13. Eine Anwendung der Totalreflektion im Prisma ist der Feldstecher: durch die Umlenkung des Lichts durch zwei Prismen erreicht man auf kurzer Baulänge einen langen Lichtweg. Die Abbildung durch die Linsen des Feldstechers erfolgt wie beim Fernrohr, die Prismen dienen nur zur Umlenkung des Lichts und damit zur Verkürzung des geometrischen Abstandes zwischen den Linsen (entspricht der Baulänge des Fernrohrs) unter Beibehaltung der Länge des Lichtweges zwischen den Linsen (entspricht der blauen Linie im unteren Teil von Abb. 13.13).

13.5.3 Dispersion

Allgemein beschreibt Dispersion Aufweitungseffekte, die sich bei der Ausbreitung von Objekten mit unterschiedlicher Geschwindigkeit ergeben. Ein anschauliches Beispiel für Dispersion ist der Zieleinlauf bei einem Marathon: alle Läufer starten gleichzeitig, auf Grund der unterschiedlichen Geschwindigkeiten der einzelnen Läufer kommen sie jedoch nicht als ein geschlossener Pulk ins Ziel sondern als ein weit aus einander gezogenes Feld. In der Optik wird mit Dispersion das Phänomen bezeichnet, dass weißes Licht beim Durchgang durch ein Medium (z.B. ein Prisma) in sein Spektrum zerlegt werden kann. Physikalisch basiert der Effekt auf der von der Wellenlänge des Lichtes abhängigen Ausbreitungsgeschwindigkeit: je kleiner die Wellenlänge ist, um so geringer ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit und um so größer der Brechungsindex. Daher wird kurzwelliges Licht (violett) stärker gebrochen als langwelliges (rot), vgl. Abb. 13.14.

Eine natürliche Anwendung der Dispersion ist der Regenbogen: auf einen Regentropfen fallendes Licht wird gebrochen, violettes Licht stärker als rotes. Je nachdem, wie das Licht auf den Tropfen trifft, kann es durch den Tropfen durch gehen, einmal total reflektiert werden oder zweimal. Das durch den Tropfen gehende Licht trägt nicht zum Regenbogen bei; wir sehen den Regenbogen nur mit der Sonne im Rücken. Das einmal in den Tropfen total reflektierte und in seine Wellenlängen aufgespaltene Licht dagegen bildet den Regenbogen. Licht, das zweimal im Tropfen total reflektiert wurde, erzeugt den Nebenbogen, vgl. Abb. 13.15.

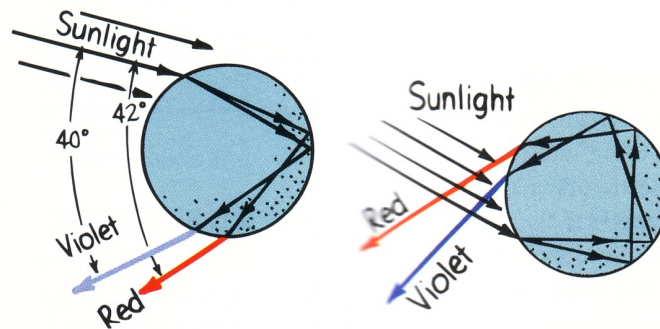


Abbildung 13.15: Dispersion im Wassertropfen: Lichtstrahlen, die im Tropfen einmal total reflektiert wurden, tragen zum Hauptregenbogen bei, Lichtstrahlen, die zweimal total reflektiert wurden, zum Nebenbogen [22]

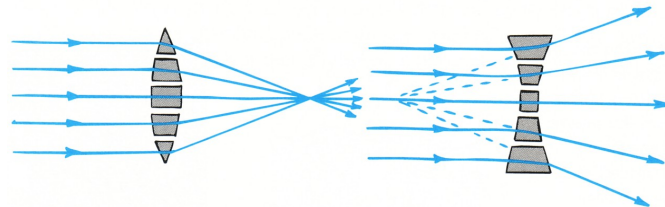


Abbildung 13.16: Veranschaulichung der Abbildung durch eine Sammellinse (links) und eine Zerstreuungslinse (rechts) durch Zerlegung der Linsenkörper in Prismen und Anwendung der von den Prismen bekannten Gesetze [22]

13.6 Linsen

Eine *Linse* ist ein optisches Gerät, bei dem die Brechung ausgenutzt wird, um parallel einfallende Lichtstrahlen in einem Punkt, dem Brennpunkt, zu bündeln (Sammellinse, zwei konvexe Flächen, bikonvexe Linse) oder so zu zerstreuen, als würden sie alle von einem Punkt ausgehen (Zerstreuungslinse, zwei konkave Flächen). Wir können uns die Linse wie ein Prisma mit abgerundeten Seitenkanten vorstellen. In Anlehnung an die Prismen können wir uns die Richtung der Ablenkung der Lichtstrahlen veranschaulichen.

Eine Linse ist charakterisiert durch ihre Brennweite f . Diese hängt ab von dem Brechungsindex n und den Krümmungsradien r_i des Linsenkörpers gemäß der Linsenmachergleichung

$$f = \frac{r_1 r_2}{(n - 1)(r_2 - r_1)}. \quad (13.7)$$

Bei einer bikonvexen Linse ist $r_1 > 0$ und $r_2 < 0$. Der Kehrwert der Brennweite ist die Brechkraft $D = 1/f$, ihre Einheit ist die Dioptrie.

Im Wellenbild können wir die Abbildungseigenschaften einer Linse wieder durch die Verzögerung der Wellenfronten und die dadurch bewirkte Ablenkung des Lichtstrahls verstehen. Trifft ein Lichtbündel auf eine Sammellinse, so durchsetzen die Randstrahlen weniger Materie als der Strahl in der Mitte. Dadurch breitet sich die Wellenfront in der Linsenmitte über eine größere Strecke mit verminderter Geschwindigkeit aus als am Rand und nimmt eine konkave Form an. Die Lichtstrahlen stehen senkrecht auf der Wellenfront, werden also in Richtung auf die optische Achse abgelenkt und konvergieren im Brennpunkt. Bei der Zerstreuungslinse wird von der Mitte des Lichtbündels weniger Materie durchsetzt, die Wellenfronten nehmen eine konvexe Form an und die Lichtstrahlen divergieren.

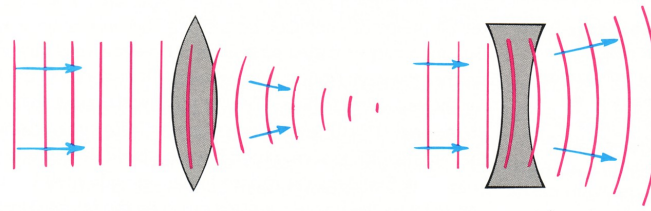


Abbildung 13.17: Darstellung der Abbildungseigenschaften von Sammellinse (links) und Zerstreuungslinse (rechts) im Wellenbild des Lichts [22]

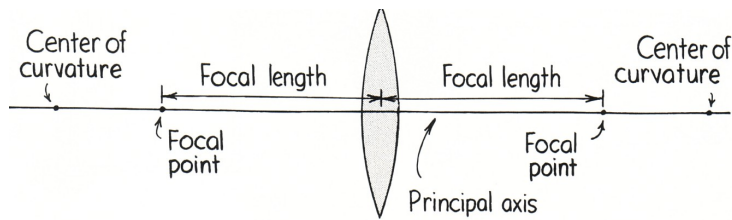


Abbildung 13.18: In die Abbildungsgesetze eingehende Größen bei einer Sammellinse [22]

13.6.1 Abbildungsgesetze

Die Abbildungseigenschaften einer Linse werden durch die Abbildungsgesetze beschrieben. Mit Brennweite f , Bildweite b , Bildgröße B , Gegenstandsweite g und Gegenstandsgröße G (vgl. Abb. 13.18) gilt

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad \text{und} \quad \frac{b}{g} = \frac{B}{G} . \quad (13.8)$$

Befindet sich der Gegenstand in der zweifachen Brennweite, so wird ein umgekehrtes Bild auf der anderen Seite der Linse ebenfalls in zweifacher Brennweite erzeugt. Für Gegenstände mit $G > 2f$ liegt das verkleinerte Bild zwischen f und $2f$, für Gegenstände zwischen f und $2f$ entsteht ein reelles Bild jenseits von $2f$; jeweils auf der anderen Seite der Linse und auf dem Kopf stehend. Ein Gegenstand im Unendlichen erzeugt ein Bild genau in der Brennweite, ein Gegenstand im Brennpunkt erzeugt kein Bild, da die Strahlen die Linse parallel verlassen. Befindet sich der Gegenstand innerhalb der Brennweite, so entsteht ein vergrößertes virtuelles Bild (Lupe).

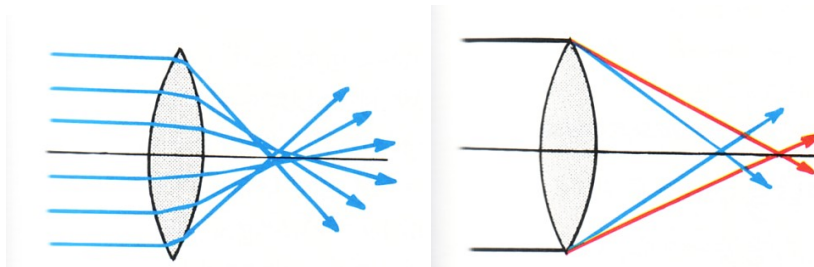


Abbildung 13.19: Linsenfehler: sphärische Aberration (links) und chromatische Aberration (rechts) [22]

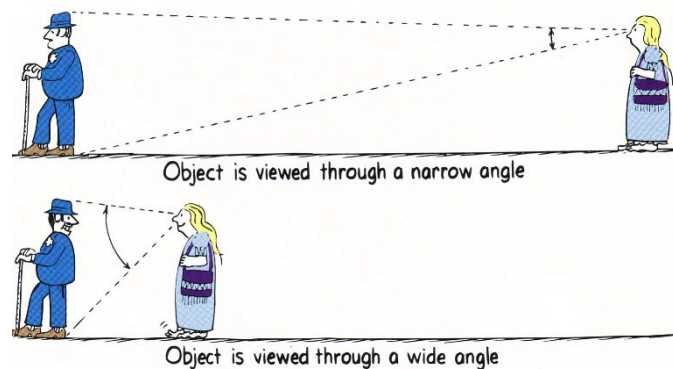


Abbildung 13.20: Die Vergrößerung des Sehwinkels ist das Ziel vieler zur Abbildung verwendeter optischer Instrumente: eine Vergrößerung des Sehwinkels lässt den Gegenstand größer erscheinen

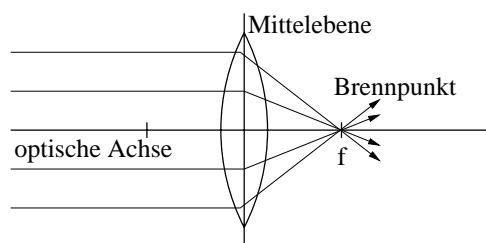


Abbildung 13.21: Strahlen und Ebenen zur Bildkonstruktion bei einer Sammellinse

13.6.2 Linsenfehler

Linsen sind keine idealen optischen Instrumente. Die beiden wichtigsten Abbildungsfehler sind (vgl. Abb. 13.19):

- sphärische Aberration: nicht alle Lichtstrahlen werden im Brennpunkt gebündelt, insbesondere die Randstrahlen werden in anderen Punkten gebündelt.
- chromatische Aberration: die Brennweite hängt nach Linsenmacherformel vom Brechungsindex ab. Dieser hängt wiederum von der Wellenlänge ab. Also hängt auch die Brennweite von der Wellenlänge ab. Damit liegen die Brennpunkte für rotes und blaues Licht an verschiedenen Stellen – die Linse erzeugt das Bild des Gegenstandes je nach Farbe an verschiedenen Orten bzw. zerlegt das Bild eines mehrfarbigen Gegenstandes in Teilbilder.

13.7 Optische Instrumente

Viele optische Instrumente basieren wie die Lupe auf der Idee, den Sehwinkel zu vergrößern und damit einen Gegenstand größer erscheinen zu lassen. Auch beim Fernrohr wird dieser Ansatz verfolgt: mit einer Sammellinse wird ein reelles Zwischenbild erzeugt, das durch eine weitere Sammellinse vergrößert betrachtet wird. Auch das Mikroskop basiert auf diesem Prinzip. Daher werden optische Instrumente teilweise nicht durch die Vergrößerung als Verhältnis von Bildgröße zu Gegenstandsgröße sondern durch eine Winkelvergrößerung charakterisiert

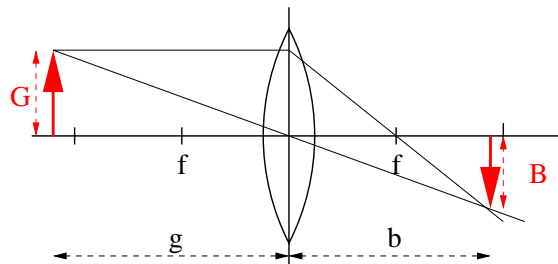


Abbildung 13.22: Bildkonstruktion bei der Sammellinse

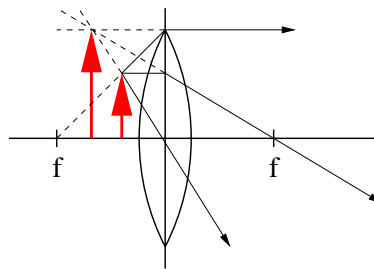


Abbildung 13.23: Bildkonstruktion bei der Lupe

13.7.1 Bildkonstruktion bei Linsenabbildung

Die Arbeitsweise optischer Instrumente können wir uns mit Hilfe der Bildkonstruktion bei Linsen veranschaulichen. Dazu gehen wir von einer Sammellinse aus. Die optische Achse ist die zur Mittelebene der Linse senkrechte Achse. Real wird jeder parallel zur optischen Achse eintretende Lichtstrahl zwei mal in Richtung auf diese gebrochen: das erste Mal beim Eintritt in die Linse, das zweite Mal beim Austritt. Für die Bildkonstruktion können wir eine vereinfachte Darstellung wählen: ein parallel zur optischen Achse einfallender Lichtstrahl wird an der Mittelebene der Linse derart gebrochen, dass er durch den Brennpunkt geht, vgl. Abb. 13.21.

Zur Bildkonstruktion benötigen wir einen zweiten Lichtstrahl: der Strahl, der durch den Schnittpunkt von optischer Achse und Mittelebene geht, wird nicht gebrochen sondern breitet sich gradlinig aus. Damit erhalten wir folgende Konstruktionsvorschrift, vgl. Abb. 13.22: (a) Zeichne von einem ausgewählten Punkt des Gegenstandes G den achsenparallelen Strahl bis zur Mittelebene der Linse und verlängere ihn von dort durch den Brennpunkt. (b) Zeichne vom gleichen Punkt einen Strahl durch den Schnittpunkt von Mittelebene und optischer Achse und verlängere ihn über diesen Punkt hinaus. (c) Im Schnittpunkt der beiden Strahlen liegt das Bild des auf G ausgewählten Punktes. Bei einfachen Gegenständen, wie dem Pfeil in der Abbildung, wählt man einen markanten Punkt aus, die Pfeilspitze, und führt für diese die Konstruktion durch.

In der voran gegangenen Abbildung befindet sich der Gegenstand bei einer Gegenstandsweite größer als $2f$, daher liegt sein Bild zwischen f und $2f$. Sie können sich mit Hilfe dieser Konstruktionsanleitung von den oben für die Abbildung mit einer Linse gegebenen Regeln überzeugen.

13.7.2 Lupe

Bei einer Lupe betrachtet man einen Gegenstand durch eine Sammellinse, wobei die Gegenstandsweite kleiner ist als die Brennweite. In diesem Fall entsteht kein reelles Bild sondern ein virtuelles: das Bild kann nicht auf einem Schirm aufgefangen werden sondern entsteht, wie beim Spiegel, durch die Tendenz des Gehirns, die auf das Auge auf treffenden Lichtstrahlen nach hinten zu verlängern, vgl. Abb. 13.23. Das virtuelle Bild einer Lupe ist aufrecht und

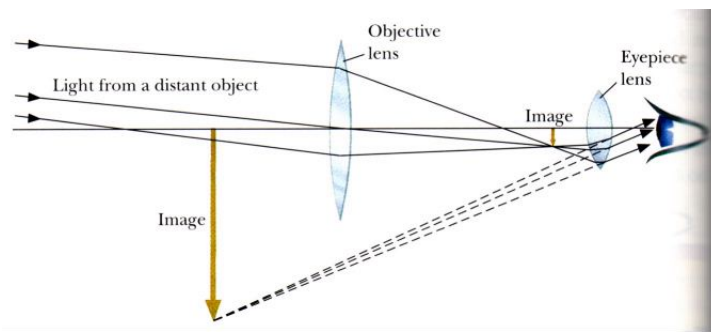


Abbildung 13.24: Kepler'sches Fernrohr: das Objektiv erzeugt ein reelles Zwischenbild, das sich in der Brennweite des Okulars befindet. Dieses wirkt als Lupe und erzeugt ein virtuelles Bild

vergrößert. Das Abbildungsgesetz gilt auch hier.

Aus der Brennweite einer Lupe lässt sich die Winkelvergrößerung m bestimmen zu

$$m = \frac{x_n}{f} \approx \frac{0.25 \text{ m}}{f} \quad (13.9)$$

wobei x_n den Nahpunkt des Auges bezeichnet, d.h. der dem Auge nächste Punkt, bis zu dem es noch bequem fokussieren kann. Für einen jungen Erwachsenen liegt der Nahpunkt bei 25 cm. Die Winkelvergrößerung beschreibt, um welchen Faktor der Sehwinkel vergrößert wird und damit auch, um welchen Faktor die Objekte vergrößert erscheinen.

13.7.3 Fernrohr

Für das Fernrohr gibt es im wesentlichen zwei unterschiedliche Konstruktionsprinzipien: beim einen steht das Bild auf dem Kopf (astronomisches Fernrohr; bei der Betrachtung von Sternen ist es nicht so wichtig, ob ein aufrechtes oder ein umgekehrtes Bild erzeugt wird), beim anderen aufrecht. Beide Typen von Fernrohr gehen von einer Sammellinse als Objektiv (Objektiv: die dem Objekt zu gewandte Linse) aus. Da mit einem Fernrohr weit entfernte Gegenstände betrachtet werden, können wir außerdem in erster Näherung davon ausgehen, dass die vom Gegenstand auftreffenden Lichtstrahlen parallel sind und durch das Objektiv auf seinen Brennpunkt fokussiert werden.

Der Unterschied zwischen den Fernrohren besteht im Okular, d.h. der dem Auge zu gewandten Linse. Das einfachste Fernrohr ist das astronomische Fernrohr (Kepler'sches Fernrohr). Hier erzeugt das Objektiv ein reelles Bild in der Brennweite des Objektivs, das Bild steht auf dem Kopf. Das Okular ist ebenfalls eine Sammellinse. Das reelle Bild des Objektivs befindet sich innerhalb der Brennweite des Okulars, d.h. dieses wirkt wie eine Lupe. Dadurch wird das reelle Bild vergrößert, nicht jedoch umgedreht. Da das Objektiv ein umgekehrtes Bild erzeugt hat, bleibt dies auch bei der Betrachtung mit der Lupe ein umgekehrtes Bild – das astronomische Fernrohr erzeugt also ein auf dem Kopf stehendes Bild. Und das Bild ist, wie bei einer Lupe, das virtuelle Bild eines reellen Zwischenbildes.

Ein aufrechtes Bild würde man erhalten, wenn man das Okular nicht als Lupe verwendet, sondern das reelle Bild mit Hilfe des Okulars abbildet. Dann müsste sich das reelle Bild jedoch in einem Abstand von mehr als der zweifachen Brennweite vom Okular befinden (sonst würde ein verkleinertes Bild entstehen). Damit ergeben sich sehr große Baulängen für ein Teleskop, so dass dieses Verfahren kaum verwendet wird. Diese Form des Teleskops erzeugt ein reelles, aufrecht stehendes Bild.

Einen etwas anderen Ansatz verfolgt das holländische Fernrohr (Galilei'sches Fernrohr). Es unterscheidet sich von den voran gegangenen durch zwei Merkmale: das Objektiv erzeugt kein reelles Zwischenbild und das Okular ist eine Zerstreuungslinse. Letztere befindet

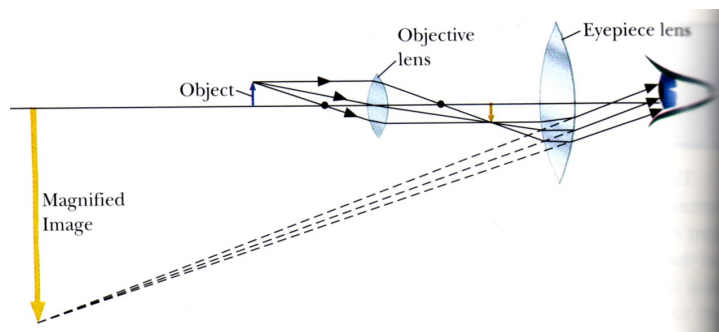


Abbildung 13.25: Abbildung im Mikroskop; im Gegensatz zum Kepler'schen Fernrohr befindet sich der betrachtete Gegenstand nicht im Unendlichen sondern in sehr geringer Gegenstandsweite; die Funktionsweise von Objektiv und Okular und damit die Bildkonstruktion sind jedoch identisch

sich so innerhalb der Brennweite des Objektivs, dass die dem Auge zugewandten Brennpunkte beider Linsen zusammen fallen. Die vom Objektiv auf seine Bildpunkt fokussierten Lichtstrahlen werden also noch vor Erreichen desselben durch das Okular defokussiert und gelangen wieder als paralleles Strahlenbündel auf das Auge des Beobachters. Dabei vergrößert sich der Winkel, unter dem das Objekt beobachtet wird, das Objekt erscheint vergrößert. Im holländischen Fernrohr entsteht ein aufrechtes virtuelles Bild. Die Vergrößerung beträgt das Drei- bis Fünffache, die Bauform ist sehr kurz, da kein reelles Zwischenbild erzeugt werden muss.

13.7.4 Mikroskop

Das Mikroskop folgt in seinem Bauprinzip dem astronomischen Fernrohr: das Objektiv erzeugt ein reelles Zwischenbild, das Okular wird bei der Betrachtung dieses Zwischenbildes als Lupe verwendet. Der Unterschied besteht darin, dass sich der zu betrachtende Gegenstand nicht in unendlichem Abstand vom Objektiv befindet sondern in geringem Abstand. Daher ist die Bildkonstruktion des Zwischenbildes eine etwas andere.

Die Winkelvergrößerung eines Mikroskops bestimmt sich aus den Brennweiten f_1 und f_2 der beiden Linsen, dem Abstand des Nahpunktes x_n und der Bildweite b_{ZB} des reellen Zwischenbildes zu

$$M = \frac{-b_{ZB} x_n}{f_1 f_2} . \quad (13.10)$$

13.8 Beugung

Bis hier haben wir die Aspekte der Optik betrachtet, die man im Bild des Lichtstrahls beschreiben kann und für die man die Vorstellung der Lichtwelle nicht benötigt, d.h. wir haben geometrische Optik betrieben – das, was sie auch aus der Mittelstufe kennen sollten. Wir werden jetzt mit den Aspekten von Optik beginnen, die nur im Bild der Wellenoptik beschrieben und verstanden werden können.

Definition 40 *Beugung erlaubt das Eindringen von Licht in den Bereich, der geometrisch im Schatten liegt.*

Beugung ist nur dann ein wichtiger Effekt, wenn die Größe des Hindernis/Spalt in der Größenordnung der Wellenlänge liegt. Beugungsmuster können wir in der Wellenwanne darstellen, da hier die Wellenlängen im cm-Bereich liegen und sich leicht Hindernisse in der Größe der Wellenlänge in das Wellenfeld stellen lassen. Wir können als erstes einen Spalt verwenden: parallel zur Wellenfront wird ein Hindernis aufgestellt, dass nur eine Öffnung

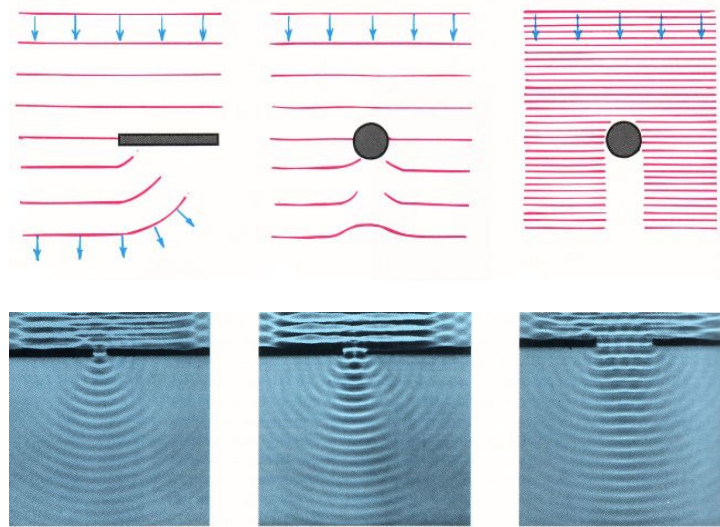


Abbildung 13.26: Beugung an Hindernissen: oben schematisch; unten Wasserwellen in der Wellenwanne

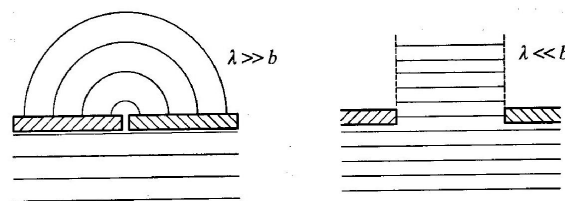


Abbildung 13.27: Beugung tritt nur dann auf, wenn das Hindernis klein ist im Vergleich zur Wellenlänge (links); sonst breitet sich die Wellenfront weiter als ebene Welle aus und dringt nicht in den Schattenbereich ein (rechts)

hat (untere Bildsequenz). Ist diese Öffnung (Spalt) groß im Vergleich zur Wellenlänge, so bilden sich hinter dem Hindernis Wellenfronten im wesentlichen in dem Bereich aus, der vom geometrischen Schattenbereich begrenzt wird. Wird der Spalt verkleinert, so fächert sich der Bereich, in den die Wellenfronten eindringen können auf und reicht in den geometrischen Schattenbereich hinein. Dieses Eindringen der Welle in den geometrischen Schattenbereich wird als Beugung bezeichnet, es ist oben schematisch für andere Hindernisse als einen Spalt dargestellt.

Beugung können wir mit Hilfe des Huyghens'schen Prinzips verstehen. Danach ist jeder Punkt der Wellenfront Ausgangspunkt einer Elementarwelle. Uns interessieren nur die Teile der Wellenfront, die im Spalt liegen und daher auch Elementarwellen erzeugen, die in den Bereich hinter dem Hindernis gelangen können. Haben wir einen Spalt, dessen Breite klein ist gegen die Wellenlänge, so wird an der Wellenfront praktisch nur eine Elementarwelle erzeugt, die sich kreisförmig (bzw. im dreidimensionalen als Kugelschale) in den Schattenraum ausbreitet. In diesem Fall sehen wir die Beugung deutlich. Aber warum verschwindet die Beugung, wenn wir zu einem breiteren Spalt über gehen? Warum sehen wir parallele Wellenfronten, die nicht in den Schattenbereich eindringen, wenn die Spaltbreite groß ist gegen die Wellenlänge? Die Antwort haben wir bereits bei der Einführung der ebenen Welle gegeben: in einem breiten Spalt wird eine große Zahl von Elementarwellen erzeugt, die sich überlagern, so dass die ebenen Wellenfronten übrig bleiben.

Beugung beschränkt das Auflösungsvermögen optischer Instrumente: sie können keine Details unterscheiden, die sich in einem Abstand von der Größe der Wellenlänge oder kleiner befinden, da sich die Beugungsbilder dieser Gegenstände überlagern und damit ihre Abbil-

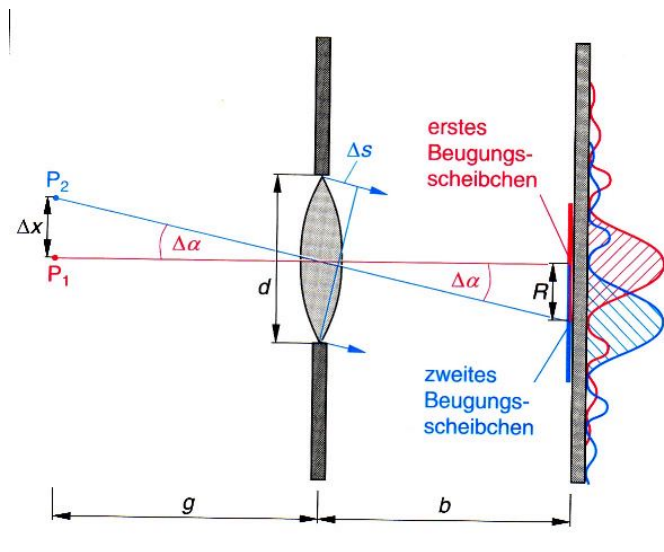


Abbildung 13.28: Einschränkung des Auflösungsvermögens eines optischen Instruments durch Beugung. Zwei Punkte des Objekts können nur dann als getrennt wahr genommen werden, wenn sich ihre nullten Beugungsmaxima nicht überlagern [19]

der nicht mehr getrennt werden können, vgl. Abb. 13.28. Genauer gilt: zwei Gegenstände sind nur dann von einem optischen Instrument zu unterscheiden, wenn die nullten Beugungsmaxima der von ihnen erzeugten Bildpunkte sich nicht überlappen. Allgemein gilt aus dem Abbildungsgesetz

$$R = b \sin \Delta\alpha \approx b \Delta\alpha = b 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (13.11)$$

Für ein Mikroskop gilt $g \approx f$ (Gegenstand in Brennebene des Objektivs) und damit

$$\Delta x = f \Delta\alpha = f 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (13.12)$$

Für ein gutes Objektiv ist $f/d \approx 0.8$ und damit $\Delta x \approx \lambda$, d.h. mit einem Mikroskop können nur Gegenstände erkannt werden, die größer als die Wellenlänge des verwendeten Lichts sind.

Umgekehrt kann man Beugungsmuster verwenden, um die Größe kleiner Gegenstände zu vermessen; in der Vorlesung wurde als Beispiel das Beugungsmuster von Bärlappsporen gezeigt.

13.9 Interferenz

Definition 41 *Interferenz ist die Überlagerung von Wellen, wobei sich Wellenberge gegenseitig verstärken (konstruktive Interferenz) und Wellental und Wellenberg sich auslöschen (destruktive oder negative Interferenz).*

Betrachten wir nun zwei benachbarte Spalte die jeweils sehr klein sind gegen die Wellenlänge, vgl. Abb. 13.29. Dann sind beide Ausgangspunkte je einer Elementarwelle – wobei diese Wellen identische Eigenschaften haben, da sie ja aus der gleichen Wellenfront stammen. Diese beiden Elementarwellen überlagern sich: trifft Wellenberg auf Wellenberg, so verstärkt sich die Welle, es entsteht konstruktive Interferenz; trifft dagegen Wellenberg auf Wellental, so löschen sich die Wellen aus, wir haben negative Interferenz. Im nebenstehenden Bild ist dies für Wasserwellen gezeigt; für Licht gilt entsprechendes Muster, nur im dreidimensionalen. Stellen wir nun einen Schirm in den Bereich hinter dem Doppelspalt (denken Sie sich

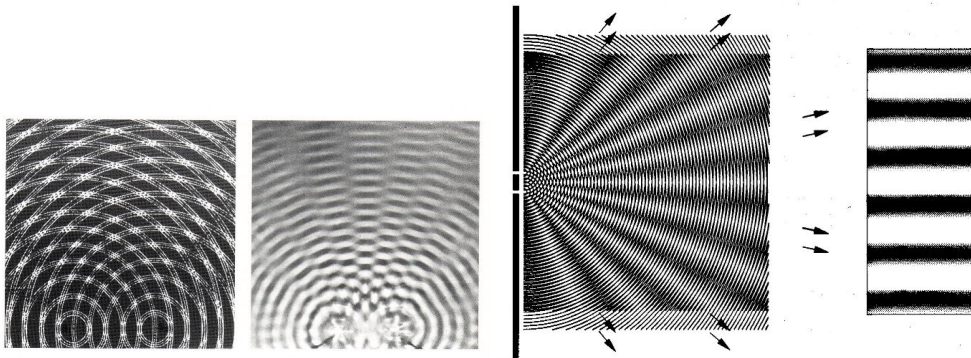


Abbildung 13.29: Interferenz der von zwei Punktquellen ausgehenden Wellen – auf einem Schirm entsteht ein Muster aus Beugungstreifen

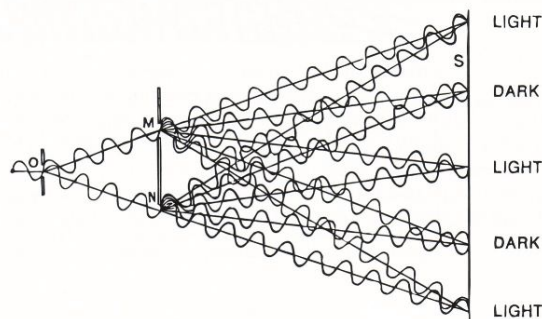


Abbildung 13.30: Zur Entstehung von Interferenz am Doppelspalt

eine Linie parallel zu der die Ausgangspunkte der Elementarwellen verbindenden Achse), so sehen wir darauf ein Muster aus hellen und dunklen Bereichen: hell, wo konstruktive Interferenz stattfindet, dunkle bei negativer Interferenz. Dieses Linienmuster oder Interferenzmuster hängt ab von der Wellenlänge des Lichts und dem Abstand der beiden Spalte.

13.9.1 Doppelspalt

Beim Doppelspalt betrachten wir zwei Spalte, deren Ausdehnung klein ist gegen die Wellenlänge und die in einem kleinen Abstand stehen. Dann ist nach dem Huyghens'schen Prinzip jeder Spalt Ausgangspunkt einer Elementarwelle und wir müssen diese Wellen wie in Abb. 13.29 überlagern. Zum Verständnis des Beugungsmusters trägt Abb. 13.30 bei.

Positive Interferenz entsteht, wenn Wellenberg auf Wellenberg trifft. Dazu muss der Gangunterschied Δs zwischen den beiden Wellen ein Vielfaches der Wellenlänge betragen:

$$\Delta s_+ = n \cdot \lambda . \quad (13.13)$$

Entsprechend entsteht negative Interferenz, wenn der Gangunterschied der Wellen $\lambda/2$ oder $\lambda/2 + n \cdot \lambda$ beträgt, oder formaler

$$\Delta s_- = \left(n - \frac{1}{2} \right) \lambda . \quad (13.14)$$

Auf dem Schirm ergeben sich unter einem Winkel α_n gegen die Achse zwischen Spalten und Schirm Bedingungen für

$$\begin{aligned} \text{Maxima :} & \quad n\lambda = d \sin \alpha_n \quad \text{und} \\ \text{Minima :} & \quad \frac{2n-1}{2}\lambda = d \sin \alpha_n . \end{aligned} \quad (13.15)$$

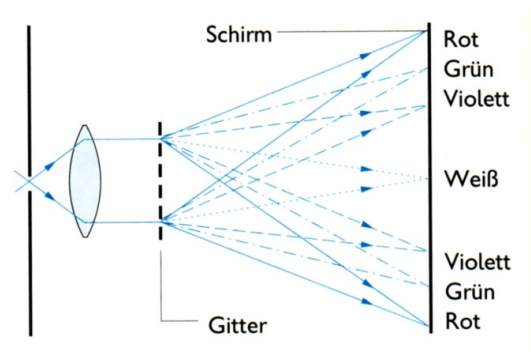


Abbildung 13.31: Interferenz der von verschiedenen Spalten eines Gitters ausgehenden Elementarwellen

Darin ist d der Abstand der beiden Spalte. Der Index n bezeichnet die Ordnung des Beugungsmaximums oder -minimums.

Der geometrische Abstand a_n der Beugungsmaxima und -minima vom nullten Maximum in der Mitte des Schirms ergibt sich für große Abstände l des Schirms vom Doppelspalt wegen $\tan \alpha_n \approx a_n/l \approx \alpha_n \approx \sin \alpha_n$ zu

$$\begin{aligned} \text{Maxima : } n\lambda &= d \sin \alpha_n = \frac{d a_n}{\lambda} \Rightarrow a_n = \frac{n\lambda^2}{d} \quad \text{und} \\ \text{Minima : } \frac{2n-1}{2}\lambda &= d \sin \alpha_n = \frac{d a_n}{\lambda} \Rightarrow \frac{2n-1}{2d}\lambda^2. \end{aligned} \quad (13.16)$$

Für Interferenzmuster erhalten wir daher die folgenden Merkgeln:

- je größer die Wellenlänge (bei gegebenem Spaltabstand), um so größer ist der Abstand zwischen zwei Interferenzstreifen: rotes Licht wird stärker abgelenkt als violette. Daher liegen Interferenzstreifen verschiedener Farben getrennt; ein Doppelspalt kann zur Spektralzerlegung verwendet werden.
- Je größer der Abstand zwischen den Spalten, um so kleiner ist der Abstand zwischen den Interferenzstreifen.

13.9.2 Beugungsgitter

Ein Beugungsgitter besteht aus einer großen Anzahl von Spalten, alle jeweils in einem Abstand d . Das Beugungsgitter kann statt durch den Spaltabstand auch durch die Gitterkonstante $g = 1/d$ beschrieben werden, die die Anzahl der Spalte pro Längeneinheit an gibt. Für ein Beugungsgitter gelten die gleichen Regeln wie für den Doppelspalt, insbesondere gilt wieder für die Lage der Maxima

$$n\lambda = d \sin \alpha_n. \quad (13.17)$$

Gitter werden häufig zur spektralen Zerlegung von Licht verwendet: senden wir weißes Licht auf ein Gitter, so überlagern sich alle Wellen ohne Ablenkung im Nullten Maximum und wir erhalten weißes Licht. In den Nebenmaxima ist die Ablenkung jedoch, wie beim Doppelspalt festgestellt, um so größer, je größer die Wellenlänge ist. Daher liegt der violette Teil des ersten Nebenmaximums dichter am Nullten Maximum als der rote.

Beugungsgitter können wie der Doppelspalt so verwendet werden, dass das Licht durch das Beugungsgitter hindurch geht. Man kann auch Beugungsgitter so konstruieren, dass sie in Reflektion verwendet werden können, d.h. wir betrachten die Interferenz von an Strukturen reflektierten Elementarwellen. Ein Beispiel werden Sie in den Übungen kennen lernen: die CD als Beugungsgitter und die Verwendung des Beugungsmusters zur Bestimmung des Platzbedarfs für 1 Datenbit.

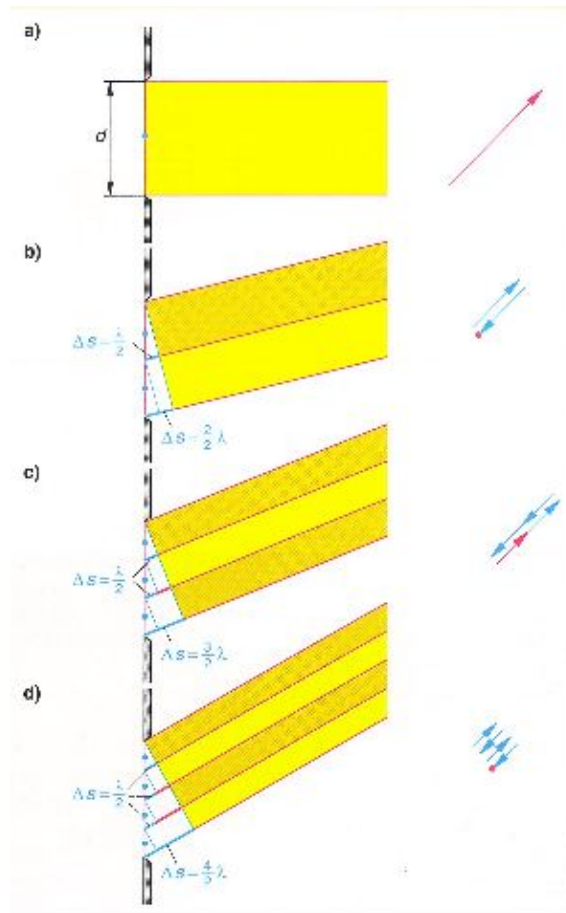


Abbildung 13.32: Beugung am Einfachspalt [19]

13.9.3 Einfachspalt

Beugung kann auch an einem einzelnen Spalt (Einfachspalt) auftreten. Allerdings darf dieser dann nicht klein sein gegen die Wellenlänge λ des Lichts sondern muss eine Breite größer als λ haben – aber natürlich auch nicht groß gegen λ . Jetzt können wir den Spalt nicht mehr als Ausgangspunkt einer einzelnen Elementarwelle betrachten sondern müssen ihn als Ausgangspunkt einer ganzen Reihe von Elementarwellen sehen. Das Wellenfeld hinter dem Spalt ergibt sich als das Interferenzmuster dieser einzelnen Elementarwellen. Wir können es uns anschaulich herleiten, wenn wir die von den Punkten am Spaltrand ausgehenden Randstrahlen heraus greifen.

Betrachten wir wieder den Winkel α , unter dem sich Interferenzerscheinungen auf dem Schirm abbilden. Für $\alpha = 0^\circ$, d.h. genau in Richtung des Schirms, sind alle Strahlen parallel, es treten keine Gangunterschiede auf und damit auch keine Auslöschung. Dies ist die Richtung des Nullten-Maximums. Betrachten wir darunter einen Winkel α , für den der Gangunterschied zwischen den beiden Randstrahlen genau λ beträgt. Dann können wir das Strahlenbündel in zwei Hälften teilen: zu jedem Strahl aus der oberen Hälfte lässt sich dann in der unteren Hälfte genau ein Strahl finden, mit dem der Gangunterschied $\lambda/2$ beträgt. Die beiden Strahlenbündel löschen sich also aus. Der Gangunterschied Δs zwischen den beiden Randstrahlen ist in diesem Fall λ oder ausgedrückt über die Spaltbreite d und den Winkel α :

$$\sin \alpha_{1.\min} = \frac{\Delta s}{d} = \frac{\lambda}{d} \quad (13.18)$$

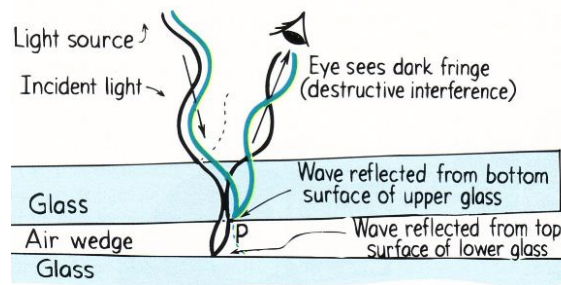


Abbildung 13.33: Newton'sche Ringe: Bildung von Interferenzmustern an einem dünnen Luftspalt zwischen zwei Platten [22]

oder verallgemeinert für die höheren Ordnungen:

$$\sin \alpha_{n,\min} = \frac{n\lambda}{d}. \quad (13.19)$$

Betrachten wir nun einen Winkel, bei dem der Unterschied zwischen den Randstrahlen genau $3/2\lambda$ beträgt. Dann können wir diesen Strahl in drei Strahlenbündel zerlegen, die sich jeweils um einen Gangunterschied $\lambda/2$ unterscheiden. Von diesen Strahlenbündeln löschen sich das obere und das mittlere gegenseitig aus (Argumentation wie beim Strahlenbündelpaar des ersten Minimums) und das untere Strahlenbündel gelangt auf den Schirm, wo es das erste Beugungsmaximum gibt. Aus dem Gangunterschied zwischen den Randstrahlen erhalten wir damit als die Bedingung für das erste Maximum am Einfachspalt

$$\sin \alpha_{1,\max} = \frac{\Delta s}{d} = \frac{3\lambda}{2d} \quad (13.20)$$

oder verallgemeinert auf Maxima der n -ten Ordnung:

$$\sin \alpha_{n,\max} = \frac{(2n+1)\lambda}{2d}. \quad (13.21)$$

13.9.4 Interferenz an dünnen Schichten

Die schillernden Farben von Ölfilmen auf Pfützen oder Seifenblasen basieren ebenfalls auf Interferenz: hier interferieren, je nach Dicke des Films, verschiedene Wellenlängen positiv oder negativ, d.h. es gibt Bereiche, in denen der Gangunterschied zwischen an der Vorder- und Rückseite des Films reflektierten Wellen z.B. für rot zur Verstärkung, für grün aber zur Auslöschung führt. Entsprechend hat dieser Bereich eine rötliche Färbung usw.

In Abb. 13.33 ist ein Beispiel gegeben: die Interferenz, die bei der Reflexion von Licht an einem Luftfilm zwischen zwei Glasplättchen entsteht. Diesen Versuchsaufbau können Sie leicht z.B. mit einem leeren Dia-Rahmen erzeugen und sie werden helle und dunkle Bereiche erkennen, in denen Lichtwellen positive oder negative Interferenz erfahren. Dieses Phänomen wird als Newton'sche Ringe bezeichnet. Die Interferenz entsteht zwischen den Lichtstrahlen, die an der Unterseite der oberen Platte reflektiert werden und denen, die an der Oberseite der unteren reflektiert werden. Bei der Reflexion an der Oberseite der unteren Platte, d.h. bei der Reflexion am Übergang von einem optisch dünnen zu einem optisch dichten Medium, erleidet die Welle eine Phasensprung, ähnlich der Reflexion einer Welle an einem festen Ende wie in Abschnitt 12.2.1 beschrieben. Bei der Reflexion an der Unterseite der oberen Glasplatte dagegen, d.h. bei der Reflexion an einem Übergang von einem optisch dichten zu einem optisch dünnen Medium, erfolgt kein Phasensprung, entsprechend der Reflexion an einem losen Ende. Die beiden Lichtstrahlen haben also alleine durch die unterschiedlichen Reflexionen an den beiden Platten einen Gangunterschied von $\lambda/2$. Zusätzlich wird dieser



Abbildung 13.34: Interferenzmuster beim Ölfilm auf einer Pfütze

Gangunterschied noch durch die Dicke d des Luftspalts vergrößert. Der gesamte Gangunterschied zwischen den beiden Strahlen ergibt sich damit zu

$$\Delta s_n = 2d_n + \frac{\lambda}{2}, \quad (13.22)$$

wobei der Index n andeutet, dass der Abstand zwischen den beiden Platten variabel ist, wie auch in der Zeichnung angedeutet. Je nach Dicke des Spaltes ergibt sich positive Interferenz oder negative.

Ein verwandtes Phänom sind schillernde Ölfilme auf Pfützen oder die Farbspiele auf Seifenblasen. In beiden Fällen handelt es sich um Interferenzmuster, die durch Reflexion an dünnen Filmen gebildet werden. Die Reflexion der beiden am Interferenzmuster beteiligten Strahlen erfolgt zum einen auf der Oberseite des Films, d.h. beim Übergang des Lichts von Luft auf den optisch dichteren Film, zum anderen an der Unterseite des Films, d.h. bei einer Seifenblase beim Übergang von Seifenfilm auf Luft, bei der Ölpfütze beim Übergang von Öl auf Wasser, d.h. beim Übergang vom optisch dünneren auf das optisch dichtere Medium. Bei der Seifenblase haben wir daher einen Phasensprung bei der Reflexion an der Oberfläche aber keinen an der Rückseite, d.h. die beiden Lichtstrahlen löschen sich gegenseitig aus, so fern es nicht Ursachen für einen weiteren Gangunterschied gibt. Beim Ölfilm dagegen erfolgt bei beiden Reflexionen ein Phasensprung, d.h. die Lichtstrahlen verstärken sich, so weit es nicht Gründe für einen weiteren Gangunterschied gibt. Diese weiteren Gangunterschiede ergeben sich, analog zu den Überlegungen bei den Newton'schen Ringen, aus der Dicke der Schichtm wobei wir hier jedoch berücksichtigen müssen, dass die Wellenlänge im Film, als $\lambda_{\text{film}} = \lambda/n$ für den Gangunterschied entscheidend ist.

Interferenz an dünnen Schichten wird zur Vergütung von Linsen optischer Instrumente eingesetzt.

13.10 Polarisation

Polarisation ist ein Phänomen, das sich ebenfalls nur aus den Welleneigenschaften des Lichts verstehen lässt. Allerdings betrachten wir bei der Polarisation wieder Gegenstände, die groß sind gegen die Wellenlänge des Lichts, d.h. wir brauchen keine Beugung oder Interferenz zu berücksichtigen.

Licht ist eine Transversalwelle. In natürlichem Licht sind die Schwingungsebenen (Schwingungsebene: die Ebene, in der das Feld/Seil schwingt) regellos über alle Richtungen verteilt. Bei der Polarisation wird nur eine Schwingungsebene ausgewählt: alle anderen Schwingungsebenen werden unterdrückt. Licht, in dem nur eine Schwingungsebene auf tritt, wird als linear polarisiertes Licht bezeichnet. Polarisation lässt sich mit Hilfe eines Polarisationsfilters realisieren, entsprechend dem Gitter in der neben stehenden Zeichnung. Durch die Kombination von Polarisationsfiltern kann man eine Auslöschung oder Teilauslöschung des Lichtes

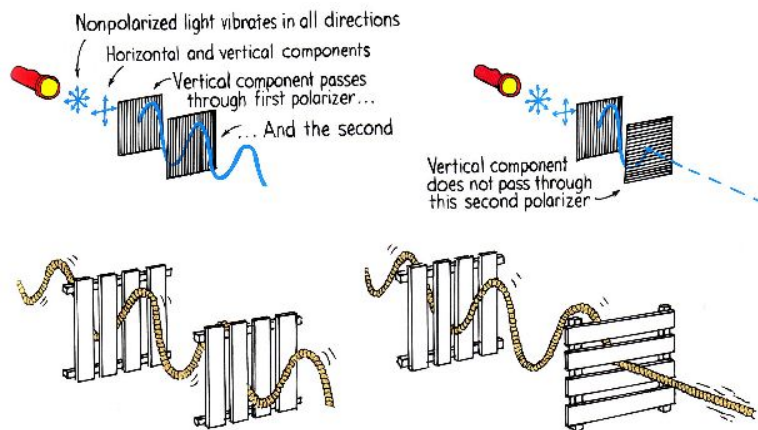


Abbildung 13.35: Polarisation durch Auswahl von Schwingungsebene in der Optik (oben) und beim mechanischen Analogon von Seilwelle und Gitter [22]

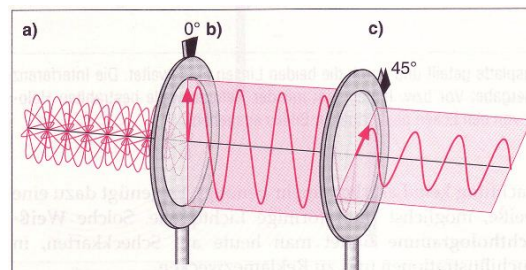


Abbildung 13.36: Zwei Polarisationsfilter, die verschiedene Schwingungsebenen durchlassen [19]

erreichen: sind zwei Polarisationsfilter so kombiniert, dass die von ihnen durchgelassenen Schwingungsebenen senkrecht auf einander stehen, so wird das Licht vollständig ausgelöscht: zwar lässt der erste Polarisationsfilter noch Licht in einer Schwingungsebene durch, das zweite Filter lässt jedoch nur Wellen mit einer Schwingungsebene senkrecht dazu durch. Diese würde zwar im natürlichen einfallenden Licht vor kommen, nicht jedoch im bereits durch den ersten Filter polarisiertem. Daher löschen zwei Polarisationsfilter mit senkrecht auf einander stehenden Polarisationssebenen das Licht vollständig aus. Liegen die Polarisationssebene beider Filter dagegen parallel, so ist der zweite Filter wirkungslos, vgl. Abb. 13.35.

Stehen die von den beiden Polarisationsfiltern durch gelassenen Schwingungsebenen ein einem beliebigen Winkel auf einander, so kommt es zu einer Teilauslöschung, vgl. Abb. 13.36. Der erste Polarisationsfilter lässt aus dem natürlichen Licht wieder nur eine Schwingungsebene passieren. Am zweiten Filter können wir diese Schwingungsebene zerlegen in zwei Komponenten: eine parallel und eine senkrecht zu der Ebene, die der Filter durch lässt. Von diesen beiden Komponenten wird nur die parallele durch gelassen, die Intensität ist also reduziert. Dieser Effekt wird beim Polarisationsfilter (in der Photographie, Sonnenbrille) verwendet: natürliches Himmelslicht ist durch Streuung polarisiert, reflektiertes Licht (z.B. an einer Schaufensterscheibe reflektiert) ebenfalls. Ein Polarisationsfilter wird dann verwendet, um beim Himmelslicht einen Teil des polarisierten Streulichts zu filtern (bessere Farbsättigung) oder das störende reflektierte Licht zu unterdrücken (Photographieren durch eine Scheibe).

Polarisiertes Licht kann auch zur Erzeugung von 3D Abbildungen verwendet werden: wie beim konventionellen Verfahren mit zwei Folien unterschiedlicher Farbe wird das räumliche Sehen durch die Überlagerung zweier aus leicht unterschiedlichem Blickwinkel aufgenommener Bilder erzeugt, wobei das eine Auge auf Grund des Filters nur das eine, das andere

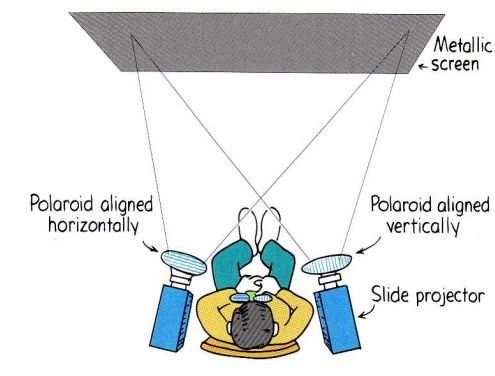


Abbildung 13.37: Erzeugung von Stereobildern mit Hilfe von polarisiertem Licht [22]

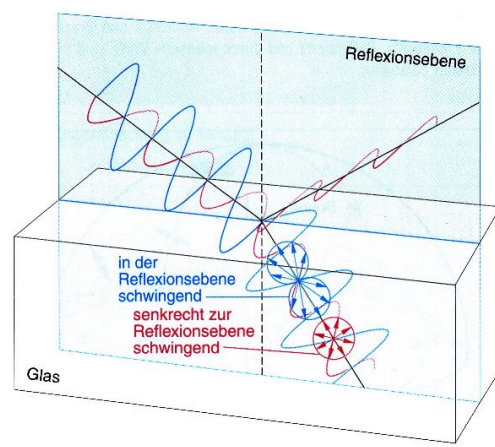


Abbildung 13.38: Brewster'sches Gesetz zur Polarisation von reflektiertem und gebrochenem Strahl [19]

dagegen das andere Bild wahrnimmt – genau der Effekt, der beim räumlichen Sehen benötigt wird. Statt der Farbfolien kann man die unterschiedlichen Aufnahmen jeweils mit polarisiertem Licht projizieren und dann mit unterschiedlich orientierten Polarisationsfiltern vor den Augen betrachten: dadurch wird von jedem Auge nur eines der beiden Teilbilder wahrgenommen und diese auf Grund der unterschiedlichen Blickwinkel bei Aufnahme der Bilder wieder zu einem räumlichen Eindruck zusammen gesetzt, vgl. Abb. 13.37. Das Verfahren ist zwar technisch aufwendiger, da das vom Bild aufs Auge fallende Licht polarisiert sein muss, hat aber gegenüber den Farbfolien den Vorteil, dass Polarisationsfilter die Farbe nicht verfälschen.

Polarisation lässt sich demnach durch zwei Effekte erzeugen: Streuung (Himmelslicht) oder durch Reflexion und Brechung. Dazu lassen wir Licht schräg auf eine Glasplatte fallen. Wellen mit Schwingungsvektor in der Einfallsebene (die Ebene, die aus dem einfallenden und dem reflektierten Strahl gebildet wird) werden nicht reflektiert, das Licht ist in einer Ebene senkrecht zur Einfallsebene linear polarisiert. Anschaulich können wir dies im Wellenmodell des Lichts verstehen: bei der Reflexion dringt die Welle nicht in die Materie ein. Schwingungen in der Einfallsebene würden jedoch am Auftreffpunkt ein teilweises Eindringen in die Materie erfordern, daher werden nur Schwingungen senkrecht zur Einfallsebene reflektiert.

Im gebrochenen Lichtstrahl finden sich alle Wellen, die in der Einfallsebene schwingen, allerdings auch ein Teil des nicht reflektierten Lichts mit Schwingungsebene senkrecht zur Einfallsebene. Der gebrochene Strahl ist daher nicht vollständig polarisiert; er ist jedoch



Abbildung 13.39: Links: natürliches Licht, es treten alle Wellenlänge auf, die Phasen können beliebig sein; Mitte: monochromatisches Licht, es tritt nur eine Wellenlänge auf, die Phasen können beliebig sein; rechts: kohärentes Licht, es tritt nur eine Wellenlänge auf und alle Wellen sind in Phase [22]

bevorzugt linear polarisiert mit Wellen in der Einfallsebene, vgl. Abb. 13.38.

Brewster'sches Gesetz: Licht wird durch Reflexion an Materialien mit dem Brechungsindex n vollständig linear polarisiert, wenn gebrochener und reflektierter Strahl senkrecht aufeinander stehen. Der Einfallswinkel (Brewster'scher Winkel) ist dann

$$\tan \alpha_B = n . \quad (13.23)$$

In vielen Kristallen hängt die Lichtgeschwindigkeit von der Ausbreitungsrichtung und von der Schwingungsebene des Lichts ab. In solchen Kristallen (z.B. Kalkspat) wird ein einfallender Lichtstrahl in zwei Lichtstrahlen auf gespalten, die senkrecht zu einander polarisiert sind. Dieses Phänomen wird als Doppelbrechung bezeichnet.

Polarisiertes Licht kann zur Untersuchung von Materialien verwendet werden:

- Spannungsdoppelbrechung: werden in lichtdurchlässigen Körpern mechanische Spannungen erzeugt, so können die stark belasteten Gebiete doppel brechend werden. Mechanische Spannungen können in aus durchsichtigem Kunststoff gefertigten Modellen dieser Körper sichtbar gemacht werden, in dem man sie mit polarisiertem Licht durchstrahlt: die Kräfteverteilung lässt sich sichtbar machen.
- Drehung der Polarisationssebene: einige Stoffe (z.B. Quarz oder eine Zuckerlösung) können die Schwingungsebene polarisierten Lichts drehen. Diese Stoffe werden als optisch aktiv bezeichnet. Der Drehwinkel hängt von der Art des Stoffes, von der vom Licht zu durchlaufenden Schichtdicke, von der Wellenlänge und bei Lösungen von der Konzentration ab. Eine Anwendung ist die Konzentrationsbestimmung mit einem Polarimeter (Zuckerhalt von Rüben).

13.11 Anmerkungen natürliches Licht

In natürlichem Licht sind die Schwingungsebenen der Wellen beliebig verteilt, ebenso folgen die Wellenlängen der Verteilung, wie wir sie weiter oben als Spektrum angegeben haben. Außerdem sind selbst Wellen mit gleicher Schwingungsebene und Frequenz bzw. Wellenlänge nicht in gleicher Phase sondern schwingen zeitlich gegeneinander versetzt (oberes Bild). Beschränken wir uns auf eine Schwingungsebene, so ist das Licht polarisiert. Beschränken wir uns auf eine Wellenlänge oder eine Frequenz, so ist das Licht monochromatisch (Mitte). Licht, das von glühenden Körpern emittiert wird, weist stets ein Spektrum von Wellenlängen auf. Monochromatisches Licht lässt sich durch Filter erzeugen, die nur eine Wellenlänge passieren lassen. Schwingen alle Wellen in gleicher Phase, so erhalten wir kohärentes Licht (unten). In einem Laser werden die Atome so zur Lichtemission angeregt, dass diese Emission Wellen nur einer Wellenlänge erzeugt, die alle in Phase in einer Schwingungsebene liegen, d.h. das Licht ist monochromatisch, polarisiert und kohärent.

13.12 Holographie

Holographie hat das Ziel, drei-dimensionale Bilder auf ein zwei-dimensionales Medium zu bannen. Hologramme werden z.B. als Sicherheitsmerkmale (Ausweis, EC-Karte) verwendet.

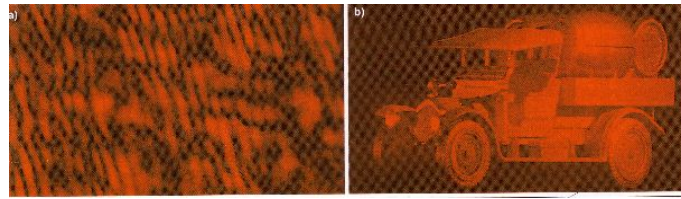


Abbildung 13.40: Hologramm (links) und daraus rekonstruiertes Bild (rechts) [19]

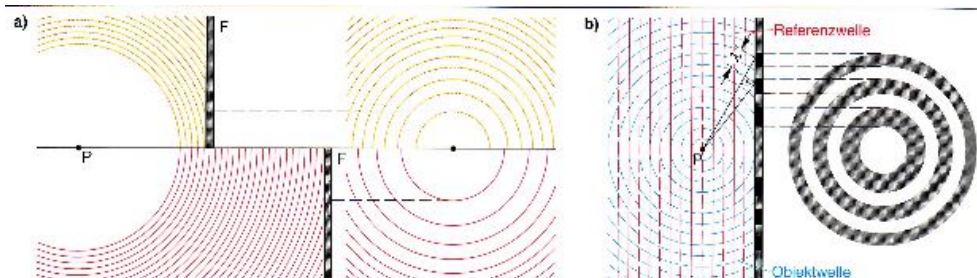


Abbildung 13.41: Zur Erzeugung der Fresnel'schen Zonenplatte [19]

Bei Hologrammen unterscheidet man zwischen solchen, die bei einer Wellenlänge erzeugt wurden und auch nur mit Licht dieser Wellenlänge betrachtet werden kann, und solchen, die auch in weißem Licht betrachtet werden können (Weißlichthologramm).

Holographie lässt sich nur über die Wellennatur des Lichtes und das Entstehen von Interferenzmustern erklären. Bei der Diskussion von Interferenz haben wir immer von Gangunterschieden zwischen verschiedenen Wellen gesprochen. Gangunterschiede beim Durchgang durch ein optisches System lassen sich am einfachsten quantifizieren, wenn das Licht kohärent ist: dann bestehen im Ausgangslichtbündel keine Gangunterschiede zwischen den einzelnen Wellenzügen (bzw. die Gangunterschiede sind ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge). Eine kohärentes Licht erzeugende Lichtquelle ist der Laser.

Holographie besteht aus zwei Teilen: die Konstruktion eines Speichers und die Rekonstruktion des Bildes daraus. Im Hologramm ist das Bild als ein Muster aus hellen und dunklen Bereichen (oder Bereichen unterschiedlicher optischer Dichte) gespeichert, eine direkte Betrachtung enthält keine verwertbare Information über den aufgenommenen Gegenstand, vgl. Abb. 13.40. Allerdings hat das Aufnahmeverfahren den Vorteil, dass auch Bruchstücke des Hologramms die vollständige Information über den abgebildeten Gegenstand enthalten.

Um die Erzeugung eines Hologramms zu verstehen, betrachten wir einen einzigen Lichtpunkt, den wir abbilden wollen. Von diesem Lichtpunkt geht eine Kugelwelle aus, vgl. Abb. 13.41. Diese Objektwelle erzeugt beim Auftreffen auf eine Fläche F zu einem bestimmten Zeitpunkt ein Muster von hellen und dunklen Bereichen, je nachdem, ob ein Wellenberg oder ein Wellental ankommt. Der Vergleich des oberen und unteren Teils von Teil (a) der Abbildung zeigt, dass man aus dem Muster auf den Abstand der Punktquelle von der Fläche F zurück schließen kann: in diesem Ringsystem ist also auch die für die Rekonstruktion eines dreidimensionalen Bildes so wichtige Abstandsinformation enthalten. Um dieses Ringsystem auf einen Film zu bannen, bringt man die Objektwelle mit einer ebenen Referenzwelle gleicher Wellenlänge zur Interferenz (Teil (b) in der Abbildung). Diese Fresnel'sche Zonenplatte ist das Hologramm des Objektpunktes.

Die Rekonstruktion des Bildes aus dem Hologramm erfolgt durch die Beugung einer ebenen Referenzwelle an dem in der Fresnel'schen Zonenplatte gespeichertem Muster, vgl. Abb. 13.42. Die Interferenz aller dabei entstehenden Wellenzüge liefert zwei Systeme von Kugelwellen: ein System läuft im reellen Bildpunkt P' zusammen, das andere im virtuellen Bildpunkt P'' . Letzterer liegt auf der anderen Seite des Hologramms, man sieht ihn, wenn man dem Licht entgegen in das Hologramm blickt.

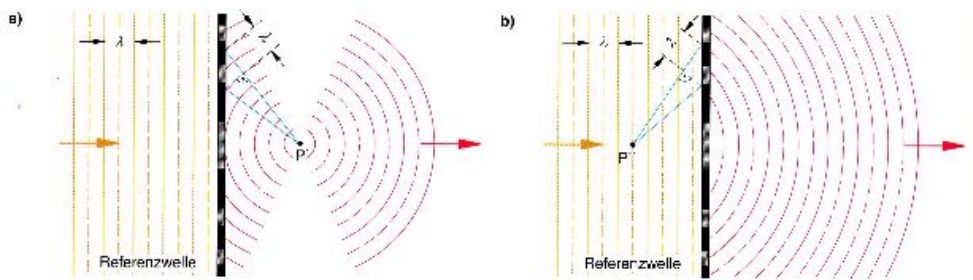


Abbildung 13.42: Rekonstruktion des Bildes mit Hilfe einer Referenzwelle [19]

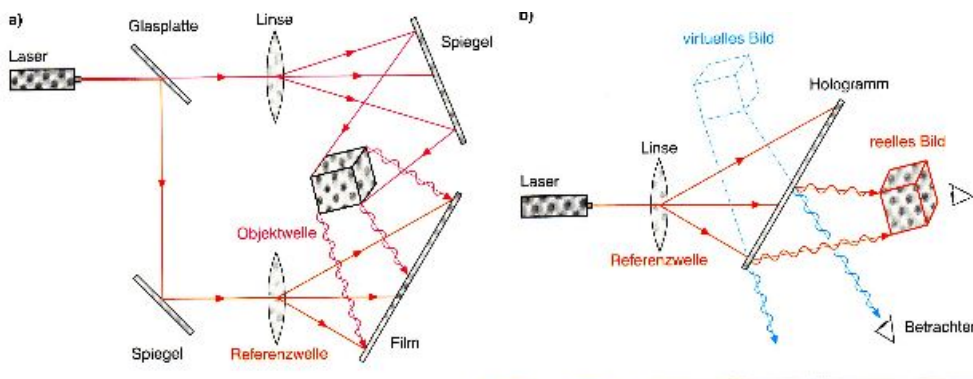


Abbildung 13.43: Aufbau zur Erzeugung und Rekonstruktion eines Hologramms [19]

Verwendet man statt des punktförmigen Objekts ein ausgedehntes, so ergibt sich auf dem Hologramm nicht das konzentrische Ringmuster sondern ein irreguläres Muster wie in obigem Beispiel angedeutet.

Ein Hologramm ist ein Interferenzmuster der Objekt- und der Referenzwelle, vgl. Abb. 13.43. Damit Gangunterschiede nicht zufällig entstehen, ist die Verwendung kohärenten Lichtes erforderlich. Bei der Aufnahme eines Hologramms wird dieses, wie in Teil (a) dargestellt, praktisch dadurch realisiert, dass man Objekt- und Referenzwelle mit einem Laser erzeugt: eine Glasplatte im Laserstrahl wirkt als Strahlteiler. Der reflektierte Strahl wird als Referenzwelle verwendet (der zweite Spiegel und die Linse dienen nur der Abbildung des Strahles auf den Film). Der von der Glasplatte transmittierte Strahl wird über einen Spiegel auf das Objekt gelenkt und erzeugt dort die Objektwelle. Beide Wellen bilden ein Interferenzmuster auf dem Film, das Hologramm. Zur Wiedergabe (Teil (b) der Abbildung) wird das Hologramm mit der Referenzwelle beleuchtet, wobei in Ausbreitungsrichtung des Lichts ein reelles Bild entsteht.

Bei der bisherigen Beschreibung ist das Hologramm aus hellen und dunklen Stellen aufgebaut, entsprechend dem Interferenzmuster. Statt heller und dunkler Bereich kann man Bereiche unterschiedlicher optischer Dichte und damit unterschiedlichen Brechungsindex verwenden. Das so entstandene Phasenhologramm ist auf Grund der fehlenden Absorption wesentlich lichtstärker als ein konventionelles Hologramm. Bei Weißlichthologrammen benötigt man für die Betrachtung nicht einmal mehr das kohärente Licht eines Lasers sondern kann sie, wie der Name sagt, auch im Licht einer weißen, möglichst punktförmigen Lichtquelle betrachten. Weißlichthologramme finden sich heute auf EC-Karten, in der Werbung oder auf Siegeln.

13.13 Aufgaben

1. Sie sind auf einer einsamen Insel gestrandet und wollen sich mit Ihrem Spiegel einem Suchflugzeug bemerkbar machen. Wie müssen Sie den Spiegel ausrichten?

2. Eine Wand in einer Zelle eines Spiegelkabinetts ist vollständig mit einem Spiegel ausgekleidet. Um wieviel größer wirkt die Zelle?
3. Sie stehen zwischen zwei exakt parallelen Spiegeln. Können Sie Ihren Hinterkopf sehen?
4. Warum können Sie den Lichtfleck einer Taschenlampe an der Wand sehen, nicht jedoch den Strahl in der Luft?
5. Warum kann man den Lichtstrahl eines Flugleitfeuers normalerweise in der Luft sehen?
6. Kurz vor oder nach Neumond kann man neben der Mondsichel auch ein schwaches Abbild des restlichen Mondes erkennen. Warum?
7. Ein punktförmige Lichtquelle erzeugt den Schatten eines Balls an einer Wand. Wie verändert sich der Schatten, wenn der Ball dichter an die Lichtquelle gebracht wird?
8. Eine ausgedehnte Lichtquelle erzeugt den Schatten eines Balls an einer Wand. Wie ändert sich der Schatten, wenn der Ball auf die Wand zu bewegt wird?
9. Sie haben Ihre Briefmarkensammlung zum Schutz unter dicken Glasplatten. Erscheinen die Briefmarken in Originalgröße?
10. Sie beobachten einen Regenbogen von einem Flugzeug aus. Wo erwarten Sie den Schatten des Flugzeugs?
11. Brillengläser werden mit einer konvexen und einer konkaven Seite her gestellt. Wie können Sie zwischen Zerstreuungs- und Sammellinsen unterscheiden?
12. Ist die im Dia-Projektor verwendete Linse eine Sammel- oder Zerstreuungslinse?
13. Wie verändert sich das von einer Linse erzeugte Bild, wenn man die untere Hälfte der Linse abdeckt?
14. Eine einfache Kamera hat ein Objektiv mit einer Brennweite von 50 mm. Wie weit muss der Film vom Objektiv entfernt sein, wenn ein weit entferntes Objekt scharf abgebildet werden soll?
15. Ein Spiegel liegt auf dem Boden eines mit Wasser gefüllten Aquariums. Skizzieren Sie verschiedene Lichtwege.
16. Normalsichtige Schwimmer können unter Wasser nicht auf entfernte Objekte fokussieren. Warum?
17. Wasser ist transparent und farblos. Warum können Sie einen Wassertropfen trotzdem sehen?
18. Warum erscheinen klare Bäche so flach?
19. Bei der minimalinvasiven Chirurgie wird durch kleinste Schnitte im Körper operiert. Wie kann der Chirurg "sehen" was er macht?
20. Vom Boden sehen wir Sterne flackern. Warum wird dies von Astronauten nicht beobachtet?
21. Wie wird der Zeitpunkt des Sonnenaufgangs durch die Atmosphäre beeinflusst?
22. Warum ist ein Diamant wesentlich brillanter als ein in gleiche Form geschliffenes Stück Glas?
23. Wie verhält sich die Reihenfolge der Farben im Regenbogen zu der im Nebenbogen?
24. Warum befindet sich der Schatten Ihres Kopfes im Zentrum des Regenbogens?

25. Wie verhält sich ein Lichtstrahl, der parallel zur Achse auf eine Sammellinse fällt?
26. Wie muss ein Lichtstrahl auf eine Zerstreuungslinse fallen, damit er diese parallel zur Achse verlässt?
27. Wie muss ein Lichtstrahl auf eine Sammellinse fallen, damit er diese parallel zur Achse verlässt?
28. Warum ist der Hintergrund bei Portrait-Aufnahmen häufig verschwommen?
29. Wie weit von einer Lupe entfernt plazieren Sie ein Objekt um es zu betrachten?
30. Vergrößert oder verkleinert sich die Vergrößerung einer Sammellinse mit zunehmender Brennweite?
31. Hat rotes oder blaues Licht in Glas die geringere Geschwindigkeit?
32. Wie verändert sich die Breite eines Interferenzmusters wenn der Abstand der beiden Spalte verringert wird?
33. Ist das Beugungsmuster von blauem oder rotem Licht breiter?
34. Welche Eigenschaft von Licht bestimmt seine Helligkeit?
35. Welche Eigenschaft von Licht bestimmt seine Farbe?
36. Was ist der physikalische Unterschied zwischen rotem und blauem Licht?
37. Welche Eigenschaft einer Welle verändert sich beim Durchgang durch eine Grenzfläche nicht?
38. Welche der folgenden Beobachtungen lassen sich sowohl im Teilchen- als auch im Wellenbild des Lichts verstehen: gradlinige Ausbreitung, Reflektion, Brechung, Interferenz, Beugung oder Polarisation?
39. Warum beobachten wir keine Dispersion beim Durchgang von Licht durch eine Fensterscheibe?
40. Ist der Brechungsindex eines transparenten Materials unabhängig von den Eigenschaften des einfallenden Lichts?
41. Warum erhalten wir keine Interferenzmuster, wenn wir in einem Raum zwei Lichtquellen verwenden?
42. Licht und Schall sind beide Wellenphänomene. Warum können wir Schall um eine Ecke hören, Licht jedoch nicht um die gleiche Ecke sehen?
43. Wie breit muss ein Spalt ungefähr sein, damit man mit sichtbarem Licht ein Beugungsmuster erzeugen kann?
44. Gelbes Licht mit einer Wellenlänge von $5 \cdot 10^{-7}$ m im Vakuum gelangt in einen Glasplatte mit einem Brechungsindex $n = 1.5$. (a) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Lichts im Glas? (b) Wie groß seine Wellenlänge.
45. Eine Linse besteht aus Glas mit einem Brechungsindex $n = 1.5$. Welcher Anteil des Lichts wird bei senkrechtem Einfall reflektiert.
46. Licht fällt unter einem Winkel von 30° gegenüber der Vertikalen auf eine Wasseroberfläche ($n = 4/3$). Ein Teil des Lichts wird reflektiert, der andere gebrochen. Bestimmen Sie den Winkel zwischen diesen beiden Strahlen.

47. Bestimmen Sie den kritischen Winkel der Totalreflektion von Licht beim Übergang von Glas ($n = 1.5$) auf Luft.
48. Eine Lampe emittiert in Luft gelbes Licht mit einer Wellenlänge von 600 nm. Welche Wellenlänge hat dieses Licht in Wasser ($n = 4/3$)? Welche Farbe hat dieses Licht für einen Taucher, der keine Maske trägt?
49. Welcher Anteil des Lichts wird reflektiert, wenn es senkrecht auf eine Wasseroberfläche ($n = 4/3$) fällt?
50. Was ist der kritische Winkel für Totalreflektion in Diamant ($n = 2.42$)?
51. Totalreflexion: Ein Lichtleiter (Brechungsindex $n_1 = 1.6$) wird statt in Luft in Wasser (Brechungsindex $n_2 = 1.333$) betrieben. Unter welchem Winkel darf Licht maximal auf die Seitenwände des Lichtleiters treffen, damit dieser seine Funktion, eben das Licht zu leiten, erfüllt? Könnte man in Wasser einen Lichtleiter aus einem Material mit dem Brechungsindex $n = 1.3$ betreiben?
52. Ein Lichtleiter in Luft reflektiert alles Licht intern wenn der Eintrittswinkel mindestens 39° beträgt. Wie groß ist der minimale Winkel für interne Reflektion, wenn sich der Lichtleiter in Wasser ($n = 4/3$) befindet?
53. Planparallele Platte: Berechnen Sie die Parallelverschiebung s eines Lichtstrahls bei Durchgang durch eine planparallele Platte der Dicke $d = 1$ cm vom Brechungsindex $n = 1.5$ für den Einfallswinkel $\alpha_1 = 60^\circ$. Hinweis:

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) = \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2$$

54. Abbildungsgesetz: Sie bilden einen 5 mm großen Käfer mit einer Sammellinse der Brennweite $f = 25$ cm ab. Der Käfer befindet sich in einem Abstand von 27 cm von der Linse. Wo müssen Sie den Schirm aufstellen und wie groß wird das Bild?
55. Diaprojektor: Ein Diapositiv (5 cm x 5 cm) ist von einer Projektionsfläche 2 m entfernt. In welcher Entfernung vom Diapositiv muss eine Sammellinse mit der Brennweite $f = 10$ cm aufgestellt werden, damit auf dem Schirm ein scharfes Bild entsteht und um wieviel ist dieses größer als das Diapositiv?
56. Linsenmacherformel: Ein Linsenmacher erzeugt zwei dünne Linsen mit den Krümmungsradien $r_1 = 20$ cm und $r_2 = 40$ cm. Die eine Linse besteht aus Quarzglas ($n_{QG} = 1.51$ bei $\lambda = 589.3$ nm (gelb)), die andere aus Saphir ($n_S = 1.769$). Bestimmen Sie die Brennweiten der beiden Linsen. Welche Brennweiten erhalten Sie für rotes Licht mit $\lambda = 420$ nm, wenn dort die Brechungsindizes $n_{QG,rot} = 1.50$ und $n_{S,rot} = 1.778$ betragen.
57. Chromatische Aberration: Sie bilden mit einer Linse der Brennweite $f_{rot} = 54$ mm und $f_{blau} = 56$ mm einen 8 cm von der Linse entfernten, 6 mm großen Gegenstand ab. Wo befinden sich die roten, wo die blauen Anteile des Bildes und wie groß sind die Bilder?
58. Eine Linse aus Glas mit einem Brechungsindex $n = 1.5$ hat zwei konvexe Flächen mit den Krümmungsradien 0.1 und 0.2 m. Wie groß ist die Brennweite der Linse?
59. Eine Linse aus Glas mit einem Brechungsindex $n = 1.5$ hat zwei konvexe Flächen mit den Krümmungsradien 0.1 und 0.2 m. Wie groß ist die Brennweite der Linse, wenn sich diese in Wasser ($n = 4/3$) befindet?
60. Bestimmen Sie die Bildweiten für eine Linse mit Brennweite 0.1 m, wenn sich die Objekte bei Gegenstandsweiten von 0.5 m bzw. 0.08 m befinden.
61. Ein Kameraobjektiv hat eine Brennweite von 0.1 m und ist auf ein Objekt im Abstand von 2 m fokussiert. Wie groß muss der Abstand des Films vom Objektiv sein?

62. Eine Zerstreuungslinse hat eine Brennweite von -0.4 m. (a) Bestimmen Sie die Bildweite eines Objekts, das sich in einem Abstand von 2 m von der Linse befindet. (b) Bei der Abbildung entsteht ein reelles Bild in einem Abstand von 1 m von der Linse. Wo hat sich das Objekt befunden?
63. Die Brennweite des Objektivs eines Mikroskops beträgt 0.4 cm, die des Okulars 3.2 cm. Das vom Objektiv gebildete Bild befindet sich 0.2 m vom Objektiv entfernt. (a) Wo befindet sich der Untersuchungsgegenstand? (b) Wie groß ist die Winkelvergrößerung?
64. Bestimmen Sie die Brennweite einer Linse ($n = 1.6$) mit einem konkaven Radius von 0.5 m und einem konvexen Radius von 0.7 m.
65. Flintglas hat einen Brechungsindex von 1.645 für blaues und einen von 1.629 für rotes Licht. Eine Linse besteht aus zwei konvexen Flächen mit den Krümmungsradien 0.1 m. Bestimmen Sie die Brennweiten für blaues und rotes Licht. Eine Linse in einem Abstand von 0.1 m von einer Lampe erzeugt ein zehnfach vergrößertes reelles Bild. Wie groß ist die Brennweite der Linse?
66. Mikroskop: Ein Mikroskop besteht aus einem Objektiv der Brennweite $f_{\text{objektiv}} = 5$ mm und einem Okular der Brennweite $f_{\text{okular}} = 15$ mm. Die optische Tubuslänge, d.h. der Abstand zwischen den benachbarten Brennebenen von Objektiv und Okular beträgt 4 cm.
- Skizzieren Sie den Aufbau.
 - Konstruieren Sie das Bild eines 6 mm vom Objektiv entfernten 0.5 mm großen Gegenstandes.
 - Bestimmen Sie die Lage und Größe des vom Objektiv erzeugten Zwischenbildes. Ist dieses virtuell oder reell? Wie groß ist die Vergrößerung des Objektivs?
 - Bestimmen Sie die Lage und Größe des vom Okular erzeugten Bildes. Ist dies ein virtuelles oder ein reelles Bild? Wie groß ist die Vergrößerung des Okulars?
 - Wie groß ist die Vergrößerung des Mikroskops?
 - Wie könnten Sie eine höhere Vergrößerung erreichen?
 - Warum werden in einem realen Mikroskop (wie auch in anderen optischen Geräten) nicht nur je eine Linse für Objektiv und Okular verwendet sondern jeweils Linsenkombinationen?
67. Die Spalte eines Doppelspalts befinden sich in einem Abstand von 0.4 mm und werden mit Licht der Wellenlänge 600 nm beleuchtet. Unter welchem Winkel wird das Beugungsmaximum 3ter Ordnung beobachtet?
68. Die Spalte eines Doppelspalt befinden sich in einem Abstand von 0.4 mm und 1 m von einem Schirm entfernt. Mit welcher Wellenlänge wurde der Spalt beleuchtet, wenn sich das erste Maximum 1 mm vom zentralen Maximum entfernt befindet?
69. Ein Gitter hat 4000 Linien/cm und wird mit gelbem Licht der Wellenlänge 600 nm beleuchtet. Unter welchen Winkeln können die Maxima der ersten 3 Ordnungen beobachtet werden?
70. Ein Gitter mit Spaltabständen von $2.5 \cdot 10^3$ nm wird mit Licht aus dem Wellenlängenbereich 400 nm bis 700 nm beleuchtet. Beschreiben Sie das sich dabei ergebende Spektrum, unter welchem Winkel wird das Spektrum erster (zweiter) Ordnung beobachtet?
71. Warum haben Lautsprecher für den hoch-frequenten Bereich eine stärkere Richtungs Bündelung des Schalls als solche für den nieder-frequenten Bereich? (Hinweis: betrachten Sie den Lautsprechern als ein rundes Loch, durch das die Schallwelle sich ausbreiten muss.)
72. Licht fällt auf ein kreisförmiges Loch mit Durchmesser 0.1 mm. Wie groß ist der auf einem Schirm im Abstand von 1 m gebildete Lichtfleck?

73. Eine Ölschicht ($n=1.5$) auf einer Pfütze schillert in verschiedenen Farben. Bestimmen Sie die Dicke des Ölfilms im rötlichen Bereich der Pfütze ($\lambda = 750$ nm) und im bläulichen Bereich ($\lambda = 450$ nm) für senkrecht auf die Pfütze fallendes Licht. Welche minimale Dicke des Ölfilms erhalten Sie für unter einem Winkel von 45° auftreffendes Licht?
74. Die Linse eines Kameraobjektivs hat eine Vergütung mit Magnesiumfluorid mit einem Brechungsindex $n = 1.38$. Senkrecht einfallendes blaues Licht mit einer Wellenlänge von 500 nm weist minimale Reflektion auf. Wie dick ist die Vergütungsschicht?
75. Ein Seifenfilm mit einem Brechungsindex von 1.33 ist gerade dick genug, um destruktive Interferenz für die kürzeste sichtbare Wellenlänge von 400 nm zu erzeugen. Wie dick ist der Seifenfilm?
76. Warum erscheint ein Seifenfilm im weißen Licht schwarz, wenn er sehr viel dünner ist als die mittlere Wellenlänge des sichtbaren Lichts?
77. Das Sonnenlicht, das von der Oberfläche eines völlig stillen Sees ($n = 4/3$) reflektiert wurde, ist vollständig polarisiert. Unter welchem Winkel ist das Licht auf die Oberfläche des Sees getroffen?
78. Bestimmen Sie den Brewster-Winkel für Wasser ($n = 1.33$), Flintglas ($n = 1.76$) und Diamant ($N = 2.42$).
79. Licht zweier Wellenlängen λ_1 und λ_2 fällt auf einen Doppelspalt. Auf einem entfernten Schirm überlagert das 20. Maximum der einen Wellenlänge genau das 19. Maximum der anderen. Zeigen Sie, dass der relative Abstand $(\lambda_1 - \lambda_2)/\lambda_1$ klein ist und geben Sie einen Zahlenwert dafür.
80. Ein Doppelspalt mit einem Spaltabstand $d = 1.2$ mm wird mit einer Quecksilberlampe beleuchtet. Auf dem $e = 2.73$ m entfernten Schirm beobachtet man für jeweils 5 Streifenabstände im grünen Licht 6.2 mm und im blauen Licht 4.9 mm. Berechnen Sie die Wellenlängen.
81. Laserlicht wird an einem Gitter mit 400 Linien/cm gebeugt. Der zentrale Peak und das vierte Maximum sind auf einem 1.44 m vom Gitter entfernten Schirm 10.34 cm voneinander entfernt. Welche Frequenz hat das Laserlicht?
82. Durch ihre feine Rillenstruktur bedingt lässt sich eine CD-Rom als Reflexionsgitter benutzen. Lässt man das rote Licht eines He-Ne-Lasers ($\lambda = 632.8$ nm) von einer solchen CD reflektieren, dann beobachtet man zwischen dem Hauptmaximum 0. und 1. Ordnung einen Winkel von 22° . Wie groß ist der Abstand zwischen aufeinander folgenden Bits, wenn auf der CD zwischen $r = 2.2$ cm und $r = 5.5$ cm 600MB Daten gespeichert sind?

Kapitel 14

Atomphysik

In der Atomphysik beschäftigen wir uns mit dem Aufbau von Atomen und den Vorgängen in der Elektronenhülle des Atoms. Prozesse im Atomkern dagegen werden im Kapitel über Kernphysik (Kap. 15) behandelt.

Die wichtigsten Informationen über den Aufbau der Atome lieferten der Rutherford'sche Streuversuch und die Atomspektren.

14.1 Rutherford'scher Streuversuch

Die Idee des Atoms als nicht weiter teilbarem Grundbaustein der Materie reicht bis in die Antike zurück. Bis in das 19. Jahrhundert hinein stellte man sich die Atome als elektrisch neutrale Kugeln vor. Diese Vorstellung wurde erst Anfang des 20. Jahrhunderts durch den Rutherford'schen Streuversuch falsifiziert: Rutherford schoss He-Kerne (α -Teilchen aus radioaktivem Zerfall) auf eine etwa 100 Atomschichten dünne Goldfolie. Die wesentlichen Ergebnisse des Versuchs sind:

1. der größte Teil der α -Teilchen passiert die Goldfolie ohne abgelenkt zu werden.
2. ein geringer Anteil der α -Teilchen wird abgelenkt, wobei kleine Ablenkungswinkel sehr viel häufiger sind als große.

Die erste Beobachtung ist sicherlich nicht mit der Idee von Atomen als massiven Kügelchen in Übereinstimmung zu bringen sondern zeigt, dass die Masse des Atoms in einem kleinen Kern konzentriert ist und sich die Elektronen darum bewegen (Lennard: 'Das Innere des Atoms ist so leer wie das Weltall'). Die unter Punkt (2) erwähnte Ablenkung lässt sich mit der Annahme erklären, dass der Kern des Atoms positiv geladen ist und die Elektronen sich in einer Hülle darum befinden. Da auch das α -Teilchen positiv geladen ist, übt der positive Kern eine abstoßende Coulomb-Kraft auf das α -Teilchen aus, so dass dieses aus seiner Bahn abgelenkt wird. Diese Kraft ist auf Grund der $1/r^2$ -Abhängigkeit der Coulomb-Kraft um so größer, je dichter das α am Kern vorbei fliegt. Da die α s aber gleichmäßig über die Querschnittsfläche des Atoms auf dieses auftreffen, befinden sich viele α s in großem Abstand vom Kern und werden kaum abgelenkt während nur sehr wenige α s so dicht am Kern vorbei fliegen, dass sie um einen großen Winkel abgelenkt werden.

Damit ergibt sich folgendes Bild des Atoms: Ein Atom besteht aus dem positiv geladenen Atomkern, seinerseits bestehend aus Protonen und Neutronen, und einer Zahl von Elektronen, die der Zahl der positiven Ladungen im Kern entspricht. Damit ist das Atom von außen gesehen elektrisch neutral.

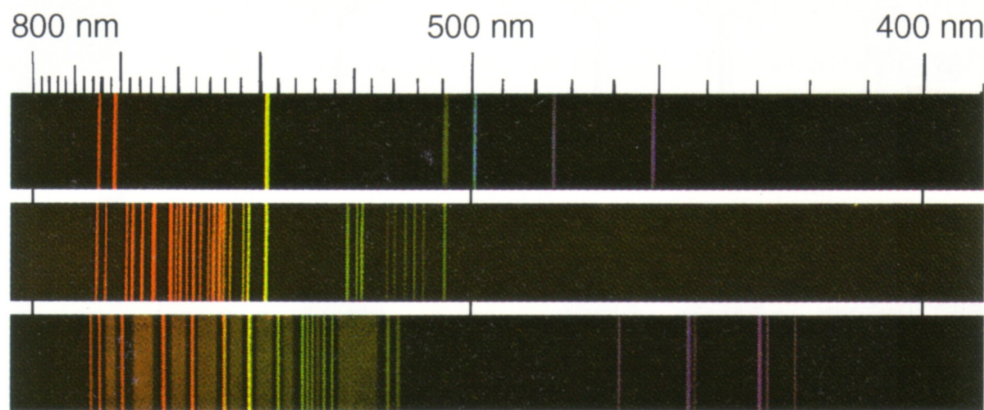


Abbildung 14.1: Beispiele für Atomspektren: die Existenz von Linien statt eines Kontinuum wie beim Spektrum der Sonne zeigt an, dass das Licht nicht von einem glühenden Körper emittiert wurde sondern in diskreten Übergängen zwischen verschiedenen Energieniveaus innerhalb der Atome

14.2 Spektren

Informationen über den Bau der Atomhülle erhält man aus den Spektren. Spektren können wir unterteilen in:

- kontinuierliche Spektren: werden von glühenden Körpern als thermische Emission ausgesandt; Beispiele Sonnenlicht (Regenbogen), konventionelle Glühlampe.
- Emissions-Linienspektren: Anregung eines gasförmigen Stoffes z.B. durch einen Strom (Gasentladungsröhre) führt zur Emission von für diesen Stoff charakteristischen Linien. Linienspektren können sehr einfach sein (Na hat im Sichtbaren nur ein eng benachbartes Linienpaar) oder im sichtbaren eine Vielzahl verschiedener Linien umfassen, vgl. Abb. 14.1.
- Absorptions-Linienspektren: Absorptionsspektren entstehen, wenn nicht das betreffende Gas zum Leuchten angeregt wird, sondern sich dieses Gas im zwischen einer Lichtquelle mit kontinuierlichem Spektrum und dem Beobachter befindet. Dann absorbiert das Gas aus dem kontinuierlichen Spektrum alle die Linien, die es sonst bei Anregung emittieren würde.

Die Spektrallinien sind charakteristisch für jedes Element, sie werden daher wie ein Fingerabdruck in der Analyse verwendet. Die Existenz der Spektrallinien zeigt an, dass ein Atom stets nur in diskreten Mengen Energie abgeben kann: es entstehen nur Photonen bestimmter Wellenlängen und damit auch mit festen Energie. Da die Photonen beim Übergang von einem Energiezustand in einen anderen emittiert werden, bedeutet die Existenz nur diskreter Übergänge auch, dass die Energiezustände im Atom diskret sein müssen. Entsprechendes gilt für die Absorption von Photonen und damit die Anregung und Ionisation von Atomen.

14.3 Wellen oder Teilchen?

Im voran gegangenen Kapitel haben wir Licht als Welle behandelt: Beugung, Interferenz und Polarisation sind nur im Wellenbild des Lichtes zu verstehen; die geometrische Optik haben wir ebenfalls im Rahmen des Wellenbildes interpretiert. Außerdem haben wir es akzeptiert, Elementarteilchen wie Elektronen und Protonen als Teilchen zu betrachten. In diesem Kapitel werden wir die Unterscheidung zwischen Wellen und Teilchen verwischen:

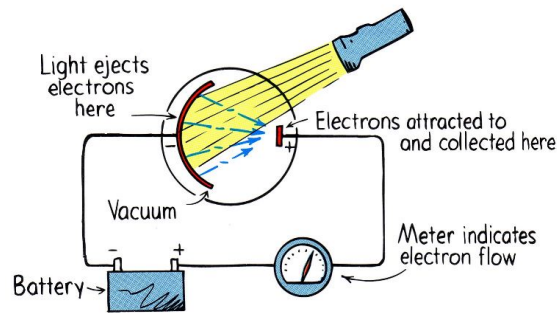


Abbildung 14.2: Versuchsaufbau zum Photoeffekt [22]

- Licht kann sich wie ein Teilchenstrom verhalten. Dies führt zur Einführung des Photons als Lichtteilchen, das relevante Experiment ist der Photoeffekt.
- Teilchen, z.B. Elektronen, können sich wie Wellen verhalten. Dies führt zur Einführung des Konzepts der Materiewellen, ein klassischer Versuch ist die Beugung von Elektronen am Spalt.

14.3.1 Photoeffekt

Das klassische Experiment zum Nachweis der Teilchennatur des Lichts ist der Photoeffekt. Er beruht auf der Fähigkeit elektromagnetischer Strahlung, Elektronen aus Materie heraus zu schlagen, diese also zu ionisieren. Dieses Phänomen alleine wäre auch mit der Wellennatur des Lichts verträglich: eine Welle überträgt Energie. Dabei ist ihre Intensität I , definiert als die pro Zeiteinheit durch eine senkrecht auf der Welle/dem Lichtstrahl stehende Einheitsfläche F , proportional dem Quadrat der Amplitude A :

$$I = \frac{E}{tF} = \frac{P}{F} \sim A^2 \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]. \quad (14.1)$$

Zur Ionisation ist Energie erforderlich, d.h. aus der Wellennatur des Lichts würden wir erwarten, dass mit zunehmender Intensität die Zahl der ausgelösten Elektronen zunimmt.

Dies lässt sich auch beobachten. Der Versuchsaufbau ist in Abb. 14.2 gezeigt. Es handelt sich um einen einfachen Stromkreis (Batterie, Amperemeter) in den eine Photozelle eingesetzt ist. Diese besteht aus einer Metallplatte (Photokathode), aus der Elektronen durch Licht heraus geschlagen werden können, und einer Anode, an der diese Elektronen gesammelt werden. Fällt kein Licht auf die Photokathode, so werden keine Elektronen heraus gelöst und der Stromkreis ist unterbrochen, es fließt kein Strom. Beim Auftreffen von Licht auf die Photokathode werden Elektronen heraus gelöst und es fließt ein Strom dessen Stärke von der pro Zeiteinheit heraus gelösten Zahl von Elektronen abhängt – und damit von der Intensität des einfallenden Lichts.

Führt man diesen Versuch nicht mit weißem Licht durch sondern zerlegt das Licht in ein Spektrum, so zeigt sich ein Ergebnis, das nicht in einfacher Weise mit der Wellennatur des Lichts zu vereinbaren ist: fällt langwelliges Licht (rot) auf die Photokathode, wo werden keine Elektronen heraus gelöst und es fließt kein Strom, vgl. oberen Teil von Abb. 14.3. Fällt dagegen kurzwelliges Licht (blau oder UV) auf die Photokathode, so fließt ein Strom. Die Wellenlänge des Lichts bestimmt also, ob der Photoeffekt überhaupt statt findet oder nicht.

Diese Beobachtung legt nahe, dass der Energieübertrag von Licht auf Elektronen in Materie in Form von Energie-Quanten erfolgt und dass die Energie dieser Quanten von der Wellenlänge bzw. Frequenz des Lichts abhängt:

$$E = hf \quad (14.2)$$

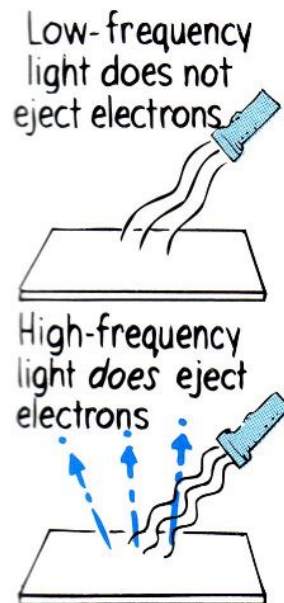


Abbildung 14.3: Beim Photoeffekt werden nur dann Elektronen ausgelöst, wenn das Licht eine bestimmte Frequenz hat oder überschreitet – bei geringeren Frequenzen werden unabhängig von der Intensität des Lichts keine Elektronen ausgelöst [22]



Abbildung 14.4: Beugungsmuster mit wenigen Photonen

mit $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js als Planck'schem Wirkungsquantum. Einsetzen von $c = \lambda f$ liefert für den Zusammenhang zwischen Energie der Photonen und Wellenlänge

$$E = \frac{hc}{\lambda}, \quad (14.3)$$

d.h. die Energie des Photons nimmt mit zunehmender Wellenlänge ab bzw. mit zunehmender Frequenz zu.

Licht verhält sich in diesem Fall wie ein Teilchen und nicht wie eine Welle. Diese Lichtteilchen werden als Photonen bezeichnet.

14.3.2 Beugungsmuster mit wenigen Photonen

Führt man den Doppelspaltversuch mit einer Lichtwelle sehr geringer Intensität durch, kann man langsam das Interferenzmuster wachsen sehen: jedes einzelne Photon erzeugt einen kleinen Lichtpunkt auf dem Schirm bzw. Film, verhält sich also wie ein einzelnes Teilchen, vgl. Abb. 14.4. Im Laufe der Zeit ordnen sich die einzelnen Lichtpunkte jedoch zu dem bekannten Interferenzmuster an, d.h. die Verteilung der auftreffenden Photonen liefert ein Muster, dass sich nicht im Teilchen- sondern im Wellenbild des Lichts erklären lässt. Betrachtet man ferner die Beugungstreifen im Detail, wie in der Abbildung angedeutet, so zeigen sich keine

scharf begrenzten Maxima sondern eine Verteilung der Photonenzahl, die zu den Rändern hin langsam ausläuft. Auch hier zeigen die Punkte wieder das Auftreffen einzelner Photonen auf dem Schirm an.

14.3.3 Beugung von Elektronen: Materiewellen

Führt man den gleichen Versuch mit Elektronen, also Teilchen, durch, so zeigt sich ein klassisches Beugungsmuster, d.h. die Elektronen zeigen Welleneigenschaften. de Broglie formulierte das Konzept der Materiewelle als erster und übertrug den von den Lichtwellen bekannten Formalismus auf Materiewellen:

$$\lambda = h/p \quad \text{und} \quad E = hf \quad (14.4)$$

mit $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js als Planck'schem Wirkungsquantum. Für ein Elektron, das mit einer Spannung von 4000 V beschleunigt wurde, ergibt sich z.B. eine Wellenlänge von 19 pm. Diese Wellenlänge ist um mehr als 4 Größenordnungen kleiner als die von Licht: setzt man Elektronenstrahlen statt Licht in einem Mikroskop ein, so kann man entsprechend kleinere Gegenstände wahrnehmen.

14.3.4 Welle-Teilchen-Dualismus

Historisch hat die Entdeckung, dass sich Teilchen wie Wellen verhalten können und umgekehrt zu einigen konzeptuellen Problemen geführt. Insbesondere ist beim Doppelspaltversuch schwer zu verstehen, wie die Elektronen bzw. Photonen im Doppelspalt ihre weitere Bewegungsrichtung bestimmen: einerseits sind die Photonen/Elektronen Individualisten in dem Sinne, dass sie nichts über die anderen Teilchen wissen, insbesondere nicht, wie diese sich ausbreiten werden. Andererseits müssen Sie jedoch auch eine Art Kollektiv bilden, da das Interferenzmuster nur durch die korrekte Überlagerung der Bewegung vieler Einzelteilchen entstehen kann.

Den scheinbaren Widerspruch, Welle oder Teilchen, können wir umgehen, in dem wir Licht und Materie als Wellenpakete betrachten, d.h. Wellenzüge mit endlicher Ausdehnung. In diesen Wellenpaketen kann das Quadrat der Amplitude als ein Maß für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens an diesem Ort interpretiert werden.

14.3.5 Heisenberg'sche Unschärferelation

Im Gegensatz zur klassischen Mechanik lassen sich in der Quantenmechanik nicht mehr Impuls p und Ort x eines Teilchens gleichzeitig bestimmen. Stattdessen gilt die Heisenberg'sche Unschärferelation

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h/2\pi \quad \text{oder} \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq h/2\pi . \quad (14.5)$$

14.4 Atombau und Periodensystem

Die Ergebnisse des Rutherford'schen Streuversuchs und die Informationen aus den Spektren haben zum Bohr'schen und später zum Schrödinger'schen Atommodell geführt, das die Wellennatur der Elektronen berücksichtigt. Mit Hilfe des Pauli-Prinzips kann man aus diesen Atommodellen den Aufbau des Periodensystems der Elemente herleiten.

14.4.1 Bohr'sches Atommodell

Das einfachste (und für sehr viele praktische Anwendungen ausreichende) Atommodell ist das Bohr'sche Atommodell. Es basiert auf der Vorstellung von Elektronen als Teilchen und findet eine Analogie im Planetensystem: die Elektronen kreisen um den Atomkern, so wie die Planeten um die Sonne kreisen.

Das Bohr'sche Atommodell basiert auf drei Postulaten:

1. Quantenbedingung: der Bahndrehimpuls ist ein Vielfaches von $h/2\pi$:

$$L = rmv = nh/2\pi \quad (14.6)$$

2. Frequenzbedingung: beim Übergang von einer Bahn mit hoher Energie E_m zu einer Bahn mit niedriger Energie E_n wird die Energiedifferenz als ein Photon mit

$$hf = E_M - E_n = \Delta E \quad (14.7)$$

abgegeben. Bei der Absorption wird ein Photon dieser Energie aufgenommen.

3. Die Elektronen bewegen sich auf ihren Bahnen ohne zu strahlen.

Die Energien und Wellenlängen für die Übergänge zwischen verschiedenen Zuständen lassen sich in diesem Modell recht einfach bestimmen. Das Elektron wird durch die Coulomb-Anziehung des Kerns auf seiner Kreisbahn gehalten, d.h. die Coulomb-Kraft wirkt als Zentripetalkraft und wir erhalten

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}, \quad (14.8)$$

wobei im letzten Schritt die Werte für ein Wasserstoffatom eingesetzt wurden: die Ladung Q_1 des Kerns ist eine Elementarladung e , die Ladung Q_2 des Elektrons ist $-e$.

Die Energie eines Elektrons auf seiner Bahn ist gegeben durch die Summe aus potentieller und kinetischer Energie, d.h.

$$E_n = E_{\text{pot},n} + E_{\text{kin},n} \quad (14.9)$$

wobei der Index n andeutet, dass es sich um den n -ten Zustand handelt. Die kinetische Energie ist $mv_n^2/2$ mit v_n als der Geschwindigkeit auf der n -ten Bahn. Die potentielle Energie ergibt sich aus der anziehenden Coulomb-Kraft und dem Abstand. Damit gilt für die Energie

$$E_n = \frac{m_e v_n^2}{2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n}. \quad (14.10)$$

Darin sind sowohl der Radius r_n als auch die Geschwindigkeit v_n der n -ten Bahn unbekannt.

Aus (14.8) erhalten wir

$$r_n m_e v_n^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}. \quad (14.11)$$

Das erste Bohr'sche Postulat besagt, dass der Drehimpuls L ein ganzzahliges Vielfaches von $h/2\pi$ ist. Der Drehimpuls ist definiert als $L = pr = mvr$ (vgl. Kap. 7), d.h. wir können die Gleichung umschreiben als

$$L v_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \quad (14.12)$$

oder

$$v_n = \frac{e^2}{2h\epsilon_0 n}. \quad (14.13)$$

Einsetzen in (14.8) liefert für den dazu gehörigen Bahnradius

$$r_n = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} n. \quad (14.14)$$

Für $n = 1$ ergibt sich damit ein Radius von $r_1 = 5.29 \cdot 10^{-11}$ m, der auch als Bohr'scher Radius bezeichnet wird. Das liefert einen Atomdurchmesser von ungefähr 10^{-10} m, in Übereinstimmung mit den auf anderen Wegen bestimmtem Wert (z.B. kinetische Gastheorie).

Einsetzen von Radius (14.14) und Geschwindigkeit (14.13) in die Energiebilanz (14.10) liefert

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{1}{8} \frac{m_e e^4}{\varepsilon_0^2 h^2 n^2} - \frac{1}{4} \frac{m_e e^4}{\varepsilon_0^2 h^2 n^2} \\ &= -\frac{1}{8} \frac{m_e e^4}{\varepsilon_0^2 h^2 n^2} = -\frac{1}{8} \frac{m_e e^4}{\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}. \end{aligned} \quad (14.15)$$

Die Energie für den Grundzustand $n = 1$ des Wasserstoffatoms beträgt daher

$$E_1 = -2.18 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -13.6 \text{ eV}. \quad (14.16)$$

Damit lassen sich die Energien für die anderen Zustände auch schreiben als

$$E_n = E_1 \frac{1}{n^2}. \quad (14.17)$$

Die beim Übergang von einer Bahn auf eine andere frei werdende Energie ergibt sich als die Differenz der Energien der beiden Bahnen (2. Bohr'sches Postulat (14.7)):

$$\Delta E = hf = \frac{1}{8} \frac{m_e e^4}{\varepsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (14.18)$$

und damit für die Frequenzen beim Übergang von m -ter zu n -ter Bahn

$$f = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad \text{mit} \quad R = \frac{m_e e^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} = 3.2898 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \quad (14.19)$$

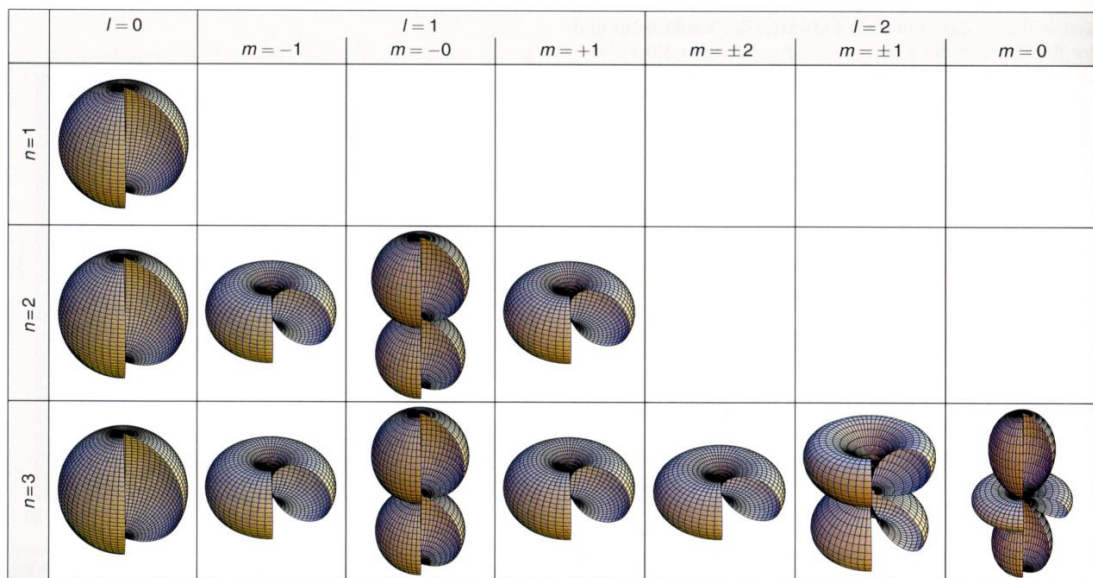
als der *Rydberg-Konstanten*.

Das Bohr'sche Atommodell ist insbesondere für spektroskopische Untersuchungen hilfreich. Seine Vorzüge sind:

1. alle Emissions- und Absorptionsvorgänge lassen sich als Energieänderungen innerhalb des Atoms verstehen.
2. das Wasserstoffspektrum lässt sich sehr genau theoretisch herleiten.
3. der Durchmesser des Wasserstoffatoms wird größenordnungsmäßig richtig bestimmt.
4. die Spektren wasserstoffähnlicher Atome lassen sich ebenfalls beschreiben.

Probleme im Bohr'schen Atommodell sind:

1. Atome mit mehr als einem Elektron in der Atomhülle können nicht oder nur ansatzweise beschrieben werden.
2. Alle Elektronen bewegen sich auf Kreisbahnen, die in einer Ebene liegen müssen, um die beobachteten Bahnübergänge zu erlauben. Dann ist das Atom platt und Atome müssten sich dichter packen lassen als aus der beobachteten Dichte der Materie zu schließen. Außerdem weisen Beobachtungen auf eine Kugelsymmetrie des Wasserstoffs hin.
3. Elektronen und Atome werden als klassische Teilchen betrachtet, im Widerspruch zu den Beobachtungen von Elektronen am Doppelspalt.
4. Die exakten Elektronenbahnen stehen im Widerspruch zur Heisenberg'schen Unschärferelation.
5. Das Bohr'sche Atommodell liefert für jeden Übergang genau eine Wellenlänge – die beobachteten Spektrallinien zeigen jedoch eine Verbreiterung der Linie, d.h. ein schmales Wellenlängenband.
6. Die Intensitätsverteilung zwischen den einzelnen Linien (und damit die Übergangswahrscheinlichkeiten der einzelnen Zustände) können mit dem Bohr'schen Atommodell nicht beschrieben werden.



424.2 Orbitale verschiedener Zustände: Das Produkt der winkelabhängigen Funktionen $\Psi(\phi)$ und $\Psi(\theta)$ wird quadriert und der Betrag über die Raumwinkel ϕ und θ aufgetragen (Abb. 424.1). Die Zustände werden durch unterschiedliche Produktfunktionen $\Psi_\phi(\phi) \cdot \Psi_\theta(\theta)$ beschrieben, die allerdings bei gleichem Betragsquadrat zu gleichen räumlichen Verteilungen führen. Die Orbitale sind nur für $0^\circ < \phi < 300^\circ$ gezeichnet, um die Räumlichkeit der Darstellung zu unterstützen. Für $n=1$ und $n=2$ sind alle Funktionen dargestellt. Die Orbitale für $m=-1$ und $m=1$ sowie $m=-2$ und $m=2$ sind jeweils gleich und werden für $l=2$ zusammengefasst. Die Zahl der Orbitale wächst mit steigendem n von einem (für $n=1$) über vier (für $n=2$) auf neun (für $n=3$).

Abbildung 14.5: Orbitale [19]

14.4.2 Schrödinger'sches Modell

Das Schrödinger'sche Atommodell beschreibt das Atom nicht mehr im Bild klassischer Teilchen sondern verwendet konsequent ein Wellenbild: das Elektron ist als eine de-Broglie Welle mit einer von Raum und Zeit abhängigen Amplitude zu beschreiben. Einem stationären Zustand des Elektrons entspricht eine drei-dimensionale stehende Welle; das Quadrat ihrer Amplitude ist wieder ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, das Elektron anzutreffen. In diesem Bild gelingt eine vollständige und widerspruchsfreie Beschreibung der Quantensysteme. Dazu stellt man das Teilchen als eine stehende Welle in einem Potentialtopf dar, d.h. es gilt $\lambda n/2 = a$ mit a als der Breite des Potentialtopfes. Der Potentialtopf kann also nur bestimmte Wellenlängen aufnehmen. Da die Wellenlänge nach de Broglie mit dem Impuls und damit mit der Energie in Beziehung steht, kann das Teilchen auch nur bestimmte Energieniveaus annehmen. Auf diese Weise lässt sich das 1. Bohr'sche Postulat begründen: das Teilchen kann nur diskrete Energieniveaus annehmen, die Energie eines Teilchens auf der Strecke a ist also gequantelt gemäß

$$E = \frac{h^2}{8ma^2} n^2 \quad (14.20)$$

und wächst proportional zu n^2 an. Die Energieänderung beim Übergang von einem Zustand zu einem anderen ist dann

$$\Delta E = E_m - E_n = \frac{h^2}{8ma^2} (m^2 - n^2). \quad (14.21)$$

Die chemische Bindung ist in diesem Modell als die Vereinigung zweier getrennter Potentialtöpfe zu einem vergrößerten Potentialtopf erklären.

Anschaulich wird die Wellenfunktion als Antreffwahrscheinlichkeit interpretiert. Zur Darstellung wird sie in zwei Teile zerlegt, einen radialen Anteil und einen azimuthalen (Orbital). Ein Orbital beschreibt die Antreffwahrscheinlichkeit für das Elektron in Abhängigkeit von den Raumwinkeln θ und ϕ . Ein Elektron in einem Atom wird durch 4 Quantenzahlen beschrieben, vgl. Tabelle 14.1:

Symbol	Name	Wert
n	Hauptquantenzahl	1,2,...
l	Nebenquantenzahl	0 bis $n-1$
m	magnetische Quantenzahl	$-l$ bis $+l$
s	Spin	$-1/2, +1/2$

Tabelle 14.1: Quantenzahlen

1. Die *Hauptquantenzahl* n bezeichnet die Energie, sie wird daher auch Energiequantenzahl genannt. Die Werte sind ganze Zahlen, $n = 1, 2, 3, \dots$
2. Die *Nebenquantenzahl* l charakterisiert die Winkelabhängigkeit der räumlichen Verteilung der Antreffwahrscheinlichkeit. Sie wird auch Bahndrehimpulsquantenzahl genannt, weil sie Eigenschaften beschreibt, die denen klassischer Drehimpulse vergleichbar sind. Für jeder Hauptquantenzahl n läuft die Nebenquantenzahl l von 0 bis $n - 1$, d.h. es ist $l = 0, 1, \dots, (n - 1)$.
3. Die *Orientierungsquantenzahl* m unterscheidet winkelabhängige Antreffwahrscheinlichkeiten bezüglich ihrer Orientierung im Raum bei gleichem Wert von l . Für jeden Wert von l existieren $(2l + 1)$ ganzzahlige Werte von $m = -l, -(l + 1), \dots, -1, 0, 1, \dots, (l - 1), l$.
4. Die *Spinquantenzahl* s mit den Werten $+\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$ beschreibt eine Eigenschaft des Elektrons vergleichbar mit den klassischen Eigendrehimpuls.

14.4.3 Pauli'sches Ausschließungsprinzip

Für Mehrelektronensysteme (also alle neutralen Atome außer Wasserstoff und alle ionisierten Atome mit mehr als einem Elektron) gilt das *Pauli-Prinzip*: in einem Atom befindet sich höchstens ein Elektron in einem durch vier Quantenzahlen bestimmten Zustand – oder: zwei Elektronen eines Atoms können nicht in allen vier Quantenzahlen übereinstimmen.

14.4.4 Periodensystem der Elemente

Mit Hilfe des Bohr'schen Atommodells und des Pauli'schen Ausschließungsprinzips¹ lässt sich das Periodensystem der Elemente konstruieren. Das einfachste Element, Wasserstoff, hat ein Elektron, das sich im Grundzustand in der K-Schale ($n = 1$) befindet und den Spin $+1/2$ oder $-1/2$ haben kann. Auf diese Schale kann nur noch ein weiteres Elektron gesetzt werden (vgl. Tabelle 14.1), und zwar mit umgekehrtem Spin. Das ist dann das Helium Atom. Für $n = 1$ gibt es also nur zwei mögliche Zustände

$$n = 1, \quad m = 0, \quad l = 0, \quad s = +\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad n = 1, \quad m = 0, \quad l = 0, \quad s = -\frac{1}{2}. \quad (14.22)$$

Fügt man ein drittes Elektron hinzu, so muss dieses in die L-Schale gesetzt werden und es ist $n = 2$. Hier kann die Bahn kreisförmig oder elliptisch sein ($l = 0, 1$) und die magnetische Quantenzahl kann 0 sein (für beide l) oder 1 (nur für $l = 1$). Jeweils zwei Elektronen (Spin positiv oder negativ) können auf jedem dieser Zustände untergebracht werden, so dass die L-Schale mit insgesamt 8 Elektronen aufgefüllt werden kann (Lithium bis Neon). Auf der folgenden M-Schale können nach gleicher Überlegung 18 Elektronen untergebracht werden. Allerdings wird diese Schale anfangs nur mit 8 Elektronen gefüllt (Natrium bis Argon). Dann wird die N-Schale mit zwei Elektronen angefüllt (Kalium und Calcium) und die darunter liegende M-Schale vollständig aufgefüllt (Übergangselemente, Scandium bis Nickel). Anschließend wird die N-Schale bis 8 aufgefüllt (Fassungsvermögen 32), es werden 2 Elektronen in der O-Schale plaziert, die N-Schale bis 18 aufgefüllt, die O-Schale bis 8 aufgefüllt

¹Zwei Elektronen eines Atoms dürfen nicht in allen vier Quantenzahlen übereinstimmen.

(Fassungsvermögen theoretisch 50, aber nur bis 32 aufgefüllt), usw. Für den Medizinphysiker von Bedeutung sind gerade die Gruppen, in denen tieferliegende Schalen aufgefüllt werden. Dazu gehören die Übergangselemente ebenso wie die seltenen Erden (Lanthanide und Aktinide). Da bei beiden Gruppen die äußeren beiden Schalen gleich gefüllt sind, ist es sehr schwer, diese Elemente chemisch zu separieren. Die Lanthanide sind interessant, da eine große Zahl von Spaltprodukten zu ihnen gehört. Die Aktinide sind ebenfalls von Interesse, da es sich hierbei um natürliche radioaktive Elemente handelt.

14.5 Aufgaben

1. Gas in einer Gasentladungsröhre leuchtet gelblich. Enthält das Spektrum daher zwingend Linien im gelben Bereich?
2. Welchen Atomradius würden Sie erhalten, wenn der Atomkern die Größe eines Basketballs (Durchmesser 24 cm) hätte?
3. Wenn die Atome ohnehin im wesentlichen aus leerem Raum bestehen, warum fallen wir dann nicht durch einen Stuhl hindurch sondern können uns auf ihn setzen?
4. Nimmt die Energie eines Elektrons mit zunehmendem Radius seiner Bahn zu oder ab?
5. Wie verhalten sich die Energien der Photonen, die einen Übergang $4 \rightarrow 2$ und $2 \rightarrow 1$ erzeugen, zu der Energie eines Photons aus dem Übergang $4 \rightarrow 1$?
6. Wodurch wird die Ordnung der Elemente im Periodensystem bestimmt? Geben Physiker und Chemiker Ihnen die gleiche Antwort?
7. Wie lässt sich die Aussage, dass es in der Sonnenatmosphäre Eisen geben muss, begründen?
8. Warum werden die Spektrallinien eines Atoms mit einem Fingerabdruck verglichen?
9. Wie groß ist die ungefähre Temperatur eines weißglühenden Gegenstands?
10. Was bestimmt die Frequenz eines von einem Atom emittierten Photons?
11. Warum ist das Spektrum des Lithiums (drittes Element) dem des Wasserstoffs so ähnlich?
12. Was haben stehende Wellen mit einem Atom zu tun?
13. Welche Bedeutung messen wir dem Quadrat der Amplitude einer Materiewelle bei?
14. Beschreiben Sie die wesentlichen Merkmale des quantenmechanischen Atommodells.
15. Was besagt das Pauli Prinzip?
16. Gibt es einen Zusammenhang zwischen dem Pauli Prinzip und dem Periodensystem der Elemente?
17. Warum macht es immer noch Sinn, sich mit dem Bohr'sche Atommodell zu beschäftigen, auch wenn wir das quantenmechanische Modell als das angemessenere betrachten?
18. Warum hat Bohr das Komplementaritätsprinzip eingeführt?
19. Eine 1 kg Masse hängt an einer Feder mit Federkonstante $k = 16 \text{ N/m}$. Die Amplitude der Schwingung beträgt 1 cm. (a) Unter der Annahme, dass die Energie wie von Planck vorgeschlagen quantisiert ist, ist die die Feder charakterisierende Quantenzahl zu bestimmen. (b) Wie verhält sich die Energieänderung zur Gesamtenergie des Systems, wenn die Quantenzahl um 1 erhöht wird?

20. He-Ne-Laser: Die Differenzen zwischen den verschiedenen Energieniveaus beim He-Ne-Laser betragen 20.61 eV beim He und 1.96 eV bzw. 18.70 eV beim Neon. Welchen Frequenzen und welchen Wellenlängen entsprechen diese Energien? Welcher der Übergänge erzeugt Licht im sichtbaren Bereich? Könnte man mit einer Substanz, bei der die stimulierte Emission mit einer Energiedifferenz von 5 eV verbunden ist, Laserlicht im sichtbaren Bereich erzeugen? (Planck'sche Wirkungsquantum $h = 6.6 \cdot 10^{-34}$ Js, $1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-19}$ J, Lichtgeschwindigkeit $c = 3 \cdot 10^8$ m/s)
21. Photoeffekt: Welche Energie können Radiowellen mit $\lambda = 200$ m, Infrarotstrahlung mit $\lambda = 1 \mu\text{m}$ und Röntgenstrahlung mit $\lambda = 1$ nm an ein Elektron übertragen?
22. Wasserstoffatom: Berechnen Sie die Energien, Wellenlängen und Frequenzen der folgenden Spektralserien im Wasserstoffatom: Lyman (auf $n = 1$), Balmer (auf $n = 2$) und Paschen (auf $n = 3$). Berechnen Sie jeweils die ersten vier Linien dieser Serien. Welche der Linien liegen im sichtbaren Bereich, wo liegen die anderen Linien?
23. Was sind die niedrigsten drei Energieniveaus von einfach ionisiertem Helium? Welchen Radien entsprechen diese?
24. Welche Energie ist erforderlich, um ein Elektron in einem Wasserstoffatom vom Grundzustand in den Zustand $n = 3$ zu heben?
25. Die Geschwindigkeiten eines Elektrons und eines 30 g Geschosses werden mit einer Ungenauigkeit von $\Delta v = 10^{-3}$ m/s gemessen. Bestimmen Sie aus der Unschärferelation die Genauigkeit, mit der die Orte der beiden bestimmt werden kann.
26. Kann ein Wasserstoffatom eine Energie von mehr als 13.6 eV absorbieren? Begründen Sie!
27. Wie viele Elektronen können sich in einem wasserstoff-ähnlichem Atom im Zustand $n = 2$ befinden?
28. Welche der Farben wird Photoelektronen mit der höchsten Energie erzeugen: rot, blau, gelb, grün oder orange?
29. Wie hängt die maximale kinetische Energie eines emittierten Photoelektrons von der Energie der einfallenden Strahlung ab?
30. Sortieren Sie die folgenden Photonen nach zunehmender Energie: Radiowellen, Infrarot, Röntgenstrahlung, sichtbar und ultraviolett.
31. Warum ergibt sich beim Wurf eines Basketballs durch den den Korb aufspannenden Ring kein Beugungsmuster?
32. Was haben stehende Wellen mit einem Atom zu tun?
33. Welche Hinweise gibt es, dass ein Elektron Teilcheneigenschaften hat? Welche für Welleneigenschaften?
34. Welche Hinweise gibt es für die Welleneigenschaften des Lichts, welche für die Teilcheneigenschaften?
35. Was sind die Unterschiede zwischen einem Elektron und einem Photon, was die Gemeinsamkeiten?
36. Was für eine Art von Wellen sind die Broglie-Wellen?
37. Was besagt die Heisenberg'sche Unschärferelation?

38. Grünes monochromatisches Licht ($f = 6 \cdot 10^{14}$ Hz) wird von einem Laser mit einer Leistung von 2 mW emittiert. (a) Wie groß ist die Energie eines Photons im Lichtstrahl? (b) Wie viele Photonen passieren während einer Sekunde eine bestimmte Stelle im Strahl?
39. Bestimmen Sie die maximale Frequenz und die minimale Wellenlänge von Röntgenstrahlen, die von 100 keV Elektronen erzeugt werden.
40. Bestimmen Sie die Energie von Photonen an den Kanten des sichtbaren Spektrums ($\lambda = 400$ nm bzw. 700 nm).
41. Bei senkrechtem Sonnenstand hat die auf den Erdboden treffende Strahlung eine Leistung von 1000 W/m^2 . Bestimmen Sie die Anzahl der pro Sekunde auf einen Quadratmeter auftreffenden Photonen unter der Annahme, dass die mittlere Wellenlänge des Lichts 550 nm beträgt.
42. Zur Wahrnehmung müssen mindestens 100 Photonen auf die Fläche der Pupille von $2.5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2$ fallen. Diese müssen innerhalb der Speicherzeit des Auges von 0.2 s auf treffen. (a) Welche minimale Intensität muss das auftreffende Licht haben (Wellenlänge $\lambda = 500$ nm)? (b) Welche Leistung muss die entsprechende Lichtquelle haben, wenn Sie sich 2 m vom Auge entfernt befindet und gleichförmig in alle Richtungen emittiert?
43. Die Aufweitung eines Laserstrahls ist mit 10^{-5} rad angegeben. Wie groß ist der vom Laser auf der Mondoberfläche erzeugte Fleck (Abstand Erde–Mond $3.8 \cdot 10^5$ km).
44. Ein Ru-Laser emittiert bei einer Wellenlänge von 693.4 nm, die Energie wird in einem 10^{-11} s dauernden Puls emittiert. Wie viele Photonen sind in dem Puls enthalten?
45. Photoeffekt: Welche Energie können Radiowellen mit $\lambda = 200$ m, Infrarotstrahlung mit $\lambda = 1 \mu\text{m}$ und Röntgenstrahlung mit $\lambda = 1$ nm an ein Elektron übertragen?
46. Materiewellen: Bestimmen Sie die Wellenlänge eines Elektrons ($m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}$ kg), das mit Hilfe einer Spannung von 4000 V beschleunigt wurde. Bestimmen Sie den Abstand des 0. und 1. Beugungsmaximums eines Elektronenstrahls bei Beugung an einem aus der Optik entlehnten Spalt der Breite $1 \mu\text{m}$ und bei Beugung an einem Kristall mit Netzebenenabstand 90 pm für einen Abstand des Schirms von 14 cm.
47. Bestimmen Sie die Wellenlänge eines 1000 kg schweren PKWs, der sich mit einer Geschwindigkeit von 72 km/h bewegt.
48. Bestimmen Sie die Unsicherheit des Impulses eines 1000 kg PKWs, der am Bordstein parkt und dessen Position mit einer Genauigkeit von 0.1 mm bekannt ist.
49. Die Geschwindigkeiten eines Elektrons und eines 30 g Geschosses werden mit einer Ungenauigkeit von $\Delta v = 10^{-3}$ m/s gemessen. Bestimmen Sie aus der Unschärferelation die Genauigkeit, mit der die Orte der beiden bestimmt werden kann.

Kapitel 15

Kernphysik

In der Atomphysik haben wir uns mit Prozessen beschäftigt, die in der Hülle eines Atoms ablaufen. Bei allen in der Atomphysik betrachteten Prozessen bleibt das Atom das gleiche Element wie vorher, lediglich seine Beteiligung an chemischen Reaktionen ändert sich auf Grund der Veränderungen in seiner Atomhülle, insbesondere Ionisation und Anregung.

Die Kernphysik dagegen befasst sich mit den Prozessen, die den Kern des Atoms betreffen. Hierbei kann der Atomkern Kernbausteine abgeben, es entsteht ein anderes Element. Beispiel für einen derartigen kernphysikalischen Prozess ist der radioaktive Zerfall.

15.1 Radioaktiver Zerfall

1896 entdeckte Becquerel bei der Untersuchung von Uransalzen eine Strahlung, die der von Röntgen entdeckten Strahlung sehr ähnlich war, jedoch im Gegensatz zur Röntgenstrahlung ohne Anregung spontan entsteht. Die ersten Nachweise erfolgten über die Schwärzung von Photoplatten. Erst 1912 wurde es durch die Entwicklung der Blaskammer (Wilson) möglich, die drei Hauptkomponenten im radioaktiven Zerfall zu identifizieren (vgl. Abb. 15.1): α -Strahlung hinterlässt eine leicht gekrümmte Spur (d.h. die Strahlung muss elektrische Ladung tragen, um im Magnetfeld abgelenkt zu werden, und relativ schwer sein, da der Krümmungsradius nur gering ist) und endet recht abrupt an einer bestimmten Stelle (was einen Hinweis darauf liefert, dass die Strahlung immer auf die gleiche Weise erzeugt wird und nur begrenzt weit in Materie eindringen kann). Die γ -Strahlung wird nicht vom Magnetfeld beeinflusst (ist also elektrisch neutral) und wird nicht durch Stöße mit den Luftmolekülen der Kammer gestoppt. γ -Strahlung wurde als ein enger Verwandter der Röntgenstrahlung erkannt. Die β -Strahlen werden im Magnetfeld sehr stark abgelenkt in eine Richtung entgegengesetzt zu der der α -Strahlung, was auf ein leichtes Teilchen mit negativer Ladung schließen lässt. In einer Isotopenkarte wandern die Nuklide nach dem Zerfall in einer typischen, von der Art des Zerfalls abhängigen Weise (vgl. Abb. 15.2 und die folgenden Abschnitte).

Der radioaktive Zerfall beruht darauf, dass sich ein instabiler Kern in einen stabilen umwandelt. Entscheidend ist dabei die Minimierung der Energie, d.h. ob ein Zerfall auftritt hängt ebenso von der semi-empirischen Massenformel (bzw. der ihr zugrunde liegenden physikalischen Realität) ab, wie die Art des Zerfalls.

15.1.1 α -Zerfall

Beim α -Zerfall wird ein ${}^4_2\text{He}$ -Kern emittiert. Da dieser eine sehr hohe Bindungsenergie hat, ist die Energiefreisetzung für den Kern maximal. Für den typischen α -Strahler ${}^{232}\text{U}$ (Halbwertszeit 72 y) gibt Tab. 15.1 die Energien, die bei der Emission verschiedener leichter Teilchen freigesetzt würden. Für die in der Tabelle angegebenen Teilchen ist nur der α -Zerfall beobachtet. Etwas schwerere Kerne wie ${}^8\text{B}$ oder ${}^{12}\text{C}$ wären energetisch ebenfalls möglich. Diese Zerfallsarten sind so selten, dass sie praktisch überhaupt nicht beobachtet werden. Obwohl

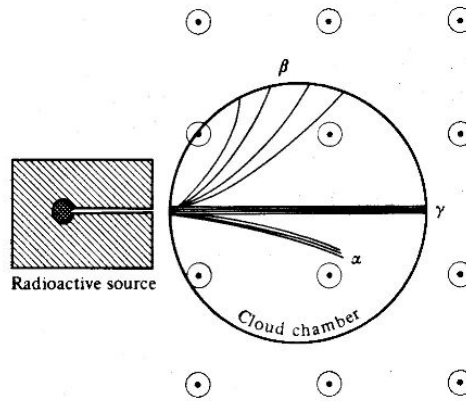


Abbildung 15.1: Die drei Haupt-Komponenten des radioaktiven Zerfalls, wie sie sich in einer Nebelkammer darstellen würden. Das Magnetfeld weist senkrecht aus der Papierebene heraus [8].

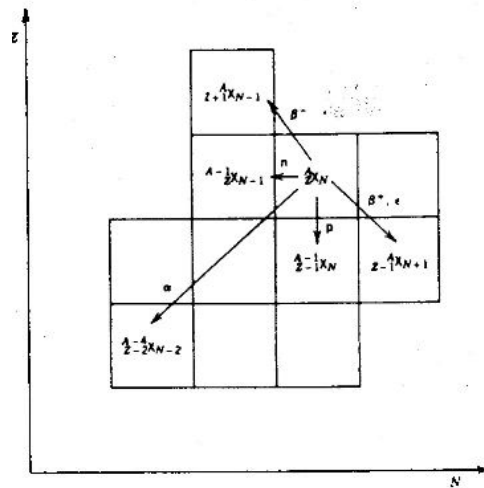


Abbildung 15.2: Darstellung von Zerfallstypen in der Isotopenkarte [23].

die meisten der Kerne mit $A > 190$ (und viele mit $150 < A < 190$) energetisch instabil sind gegen α -Zerfall, zerfällt nur die Hälfte von ihnen auf diese Weise. Da der β -Zerfall eine wesentlich größere partielle Zerfallskonstante (d.h. eine größere Zerfallswahrscheinlichkeit) hat, kann der α -Zerfall oftmals dadurch überdeckt sein.

α -Zerfall findet statt, wenn das Verhältnis von Neutronen zu Protonen zu klein ist, d.h. die starke Wechselwirkung (WeWi) die Coulomb-Abstoßung nicht ausreichend kompensieren kann. Zwar gehen dem Kern durch die Aussendung des α s auch zwei Neutronen verloren, jedoch ist das Verhältnis $(n - 2)/(p - 2)$ etwas günstiger als n/p , da die Zahl der Neutronen mit zunehmender Masse überproportional wächst. α -Zerfall findet erst ab $A > 82$ statt.

Die typischerweise beim α -Zerfall freiwerdende Energie beträgt 5 MeV, wobei ca. 98% der Energie auf das α -Teilchen übergehen, die anderen 2% auf den Kern. Die kinetische Energie des α -Teilchens lässt sich mit Hilfe der mittleren Bindungsenergie E_b des Isotops abschätzen [28] zu

$$E_\alpha \approx \frac{A - 4}{A} \cdot E_b. \tag{15.1}$$

α -Zerfall hat eine Eigenschaft, die so auffallend ist, dass sie bereits 1911, vor der Entde-

emittiertes			
Teilchen	Energie (MeV)	Teilchen	Energie (MeV)
n	-7.26	⁴ He	+5.41
¹ H	-6.12	⁵ He	-2.59
² H	-10.70	⁶ He	-6.19
³ H	-10.24	⁶ Li	-3.79
³ He	-9.92	⁷ Li	-1.94

Tabelle 15.1: Energiefreisetzung für verschiedene Annahmen über die Emission leichter Teilchen aus einem ²³²U-Kern, auf der Basis von [27].

Isotop	E_α (MeV)	$T_{1/2}$	λ (1/s)
²³² Th	4.01	$1.4 \cdot 10^{10}$ y	$1.6 \cdot 10^{-18}$
²³⁸ U	4.19	$4.5 \cdot 10^9$ y	$4.9 \cdot 10^{-18}$
²³⁰ Th	4.69	$8.0 \cdot 10^4$ y	$2.8 \cdot 10^{-13}$
²⁴¹ Am	5.64	433 y	$5.1 \cdot 10^{-11}$
²³⁰ U	5.89	20.8 d	$3.9 \cdot 10^{-7}$
²¹⁰ Rn	6.16	2.4 h	$8.0 \cdot 10^{-5}$
²²⁰ Rn	6.29	56 s	$1.2 \cdot 10^{-2}$
²²² Ac	7.01	5 s	0.14
²¹⁵ Po	7.53	1.8 ms	$3.9 \cdot 10^2$
²¹⁸ Th	9.85	0.11 μ s	$6.3 \cdot 10^6$

Tabelle 15.2: Beispiele für natürliche α -Strahler. Die Isotope sind in der Tabelle so geordnet, dass die Geiger-Nuttall-Regel deutlich wird.

ckung des Atomkerns durch Rutherford, bemerkt wurde: α -Strahler mit kurzer Halbwertszeit emittieren hohe Energien, bei langer Halbwertszeit sind die Energien geringer (*Geiger-Nuttall-Regel*). Grenzfälle sind ²³²Th mit einer Halbwertszeit von $1.4 \cdot 10^{10}$ y und einer α -Energie von 4.08 MeV und ²¹⁸Th mit einer Halbwertszeit von $1 \cdot 10^{-7}$ s und einer α -Energie von 9.85 MeV: ein Faktor 2 in der Energie entspricht 24 Größenordnungen in der Lebensdauer!

Die theoretische Erklärung der Geiger-Nuttall Regel im Jahre 1928 durch Gamow einerseits und durch Gurney und Condon andererseits war einer der ersten Erfolge der Quantenmechanik. Dabei wird von der Idee ausgegangen, dass sich innerhalb des Kerns ein α -Teilchen formt¹. Dieses α -Teilchen befindet sich innerhalb des Potentialtopfes ‘Kern’ und muss eine hohe Energie erreichen, um sich daraus zu befreien. Dies geschieht durch das ‘Leihen’ von Energie von anderen Nukleonen mit Hilfe der Heisenberg’schen Unschärferelation und führt zum Verlassen des Kerns mit Hilfe des *Tunneleffekts*. Der Tunneleffekt erklärt auch, warum nicht alle Kerne sofort zerfallen: ein α -Teilchen muss sich immer und immer wieder an der Barriere zeigen, bevor es irgendwann einmal die Chance zum Entweichen erhält – α -Zerfall ist daher, wie jeder radioaktive Zerfall, ein statistischer Prozess.

Tabelle 15.2 gibt einige α -Strahler mit der kinetischen Energie des entstehenden α s, der Halbwertszeit $T_{1/2}$ und der Zerfallskonstante λ .

15.1.2 β -Zerfall

β -Zerfall dient der Korrektur eines Protonen- oder Neutronenüberschusses, d.h. es wird ein Neutron in ein Proton umgewandelt oder umgekehrt. Drei Prozesse sind möglich:

¹Es gibt keinen Grund, die Existenz von kleinen Einheiten wie α -Teilchen innerhalb eines Kerns anzunehmen. Der Erfolg der Erklärung besagt nicht, dass es wirklich α -Teilchen im Kern gibt, sondern nur, dass sie sich so verhalten, als wären sie im Kern geformt worden.

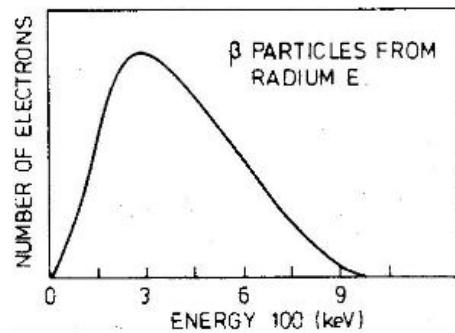
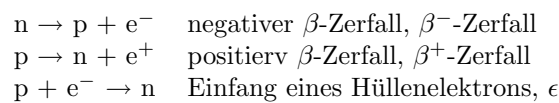


Abbildung 15.3: Kontinuierliches Spektrum der Energieverteilung der Elektronen beim Zerfall von Radium E, Ellis und Wooster (1927) in [23].



Die Emission eines Elektrons aus dem Kern war eines der ersten beobachteten Phänomene des radioaktiven Zerfalls. Die Emission eines positiven Elektrons (Positrons) wurde erstmalig 1934 von den Juliot-Curies beobachtet, zwei Jahre nachdem das Positron in der kosmischen Strahlung entdeckt worden war. Der Einfang eines Hüllenelektrons wurde erst 1938 von Alvarez durch die charakteristische Röntgenstrahlung entdeckt, die beim Auffüllen der Lücke des eingefangenen Elektrons emittiert wird.

Während sich beim α -Zerfall ein Linienspektrum ergibt, ist die Verteilung der β -Energien kontinuierlich bis zu einem Maximalwert E_{max} , vgl. Abb. 15.3. Anfangs wurde angenommen, dass der Kern wie beim α -Zerfall β s ausschließlich bei einer festen Energie emittiert und die gemessene Energieverteilung durch die Wechselwirkung des Elektrons mit den Hüllenelektronen bzw. anderen Atomen entsteht. Genauere kalorimetrische Messungen legten jedoch den Schluss nahe, dass der Materie auf diese Weise keine Energie zugeführt wurde, das Energiespektrum daher das Spektrum der Quelle ist. Pauli schlug 1931 vor, dass beim β -Zerfall ein zweites Teilchen emittiert werden sollte, das *Neutrino*². Das Neutrino sollte die fehlende Energie tragen und aufgrund seines großen Durchdringungsvermögens nicht in Materie (d.h. innerhalb des Kalorimeters) gestoppt werden. Die Ladungserhaltung fordert, dass das Neutrino elektrisch neutral sein muss, die Drehimpulserhaltung fordert einen Spin von $1/2$. Beim β -Zerfall werden unterschiedliche Neutrinos emittiert, das Antineutrino $\bar{\nu}$ beim β^- -Zerfall und das Neutrino ν beim β^+ -Zerfall. Das Neutrino ist masselos³.

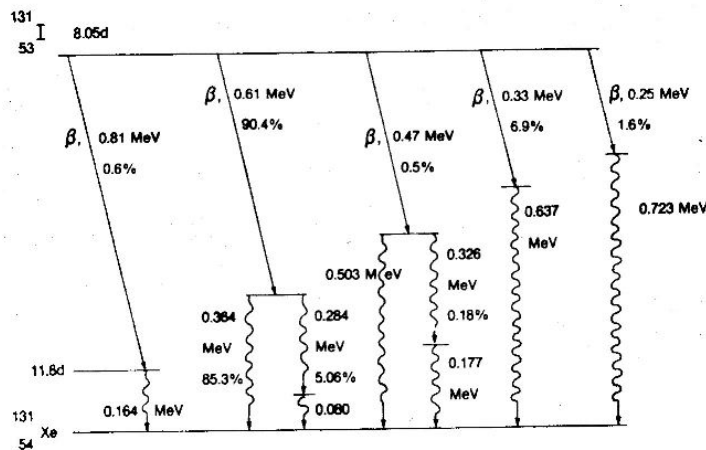
Die theoretische Beschreibung des β -Zerfalls muss auf andere Weise erfolgen als beim α -Zerfall. Dabei sind die folgenden Randbedingungen zu berücksichtigen: (1) das Elektron und das Neutrino existieren vor dem Zerfall nicht innerhalb des Kerns, sie müssen daher erzeugt werden. (2) Elektron und Neutrino müssen relativistisch behandelt werden. (3) Die kontinuierliche Verteilung der Elektronenenergien muss sich ergeben. 1934 stellte Fermi auf der Basis von Pauli's Neutrino-Hypothese eine erfolgreiche Theorie zum β -Zerfall auf. β -Zerfall soll dabei durch eine relativ schwache Störung des Grundzustandes erfolgen (*Fermi's goldene Regel*). Dabei ergibt sich ein statistischer Prozess, ähnlich wie er beim α -Zerfall durch den Tunneleffekt bewirkt wird. Die Zerfallszeiten ergeben sich aus der Art der Störung, die Störung selbst wird durch die schwache Wechselwirkung (vgl. Tab. 15.5) vermittelt.

Abbildung 15.3 gibt Beispiele für verschiedene Typen von β -Zerfällen zusammen mit der maximal erreichbaren Energie des β s und der Halbwertszeit des zerfallenden Isotops.

²Der Name selbst wurde erst etwas später von Fermi eingeführt.

³Die Aussage ist nicht ganz korrekt. Mit bestehenden Messtechniken kann man nur aussagen, dass die Ruhemasse des Neutrinos sehr klein sein muss; so wird für die Ruhemasse des Elektronenneutrinos ν_e eine Obergrenze von ca. 10 eV angegeben [28]. Für eine Vielzahl kosmologische Fragestellungen ist es von Interesse, ob das Neutrino nicht doch eine kleine Restmasse hat; in jüngster Zeit verstärken sich die Hinweise, dass das Neutrino massenbehaftet ist.

Zerfall	Art	E_β (MeV)	$T_{1/2}$
$^{19}\text{O} \rightarrow ^{19}\text{F} + e^- + \bar{\nu}$	β^-	4.82	27 s
$^{176}\text{Lu} \rightarrow ^{176}\text{Hf} + e^- + \bar{\nu}$	β^-	1.19	$3.6 \cdot 10^{10}\text{y}$
$^{25}\text{Al} \rightarrow ^{25}\text{Mg} + e^+ + \nu$	β^+	3.26	7.2 s
$^{124}\text{I} \rightarrow ^{124}\text{Te} + e^+ + \nu$	β^+	2.14	4.2 d
$^{15}\text{O} + e^- \rightarrow ^{15}\text{N} + \nu$	ϵ	2.75	122 s
$^{170}\text{Tm} + e^- \rightarrow ^{170}\text{Er} + \nu$	ϵ	0.31	129 d

Tabelle 15.3: Beispiele für β -Zerfälle unterschiedlicher Art.Abbildung 15.4: Zerfallschema des ^{131}Jod [7].

15.1.3 γ -Zerfall

γ -Strahlung wird in der Folge radioaktiver Zerfallsprozesse (meist α - oder β -Zerfall) emittiert⁴. Dabei geht der Kern des Zerfallsproduktes vom angeregten in den Grundzustand oder einen energetisch niedriger liegenden angeregten Zustand über (vgl. Abb. 15.4). Die Halbwertszeiten beim γ -Zerfall sind sehr kurz (kleiner 10^{-9}s), es können sich gelegentlich auch Halbwertszeiten von Stunden oder gar Tagen ergeben. Diese Übergänge werden als *isomere Übergänge* bezeichnet, die langlebigen angeregten Zustände als *isomere Zustände* oder *metastabile Zustände*. Metastabile Zustände werden oftmals durch ein hochgestelltes m markiert: $^{110}\text{Ag}^m$ oder ^{110m}Ag .

γ -Emission hat häufig mit *interner Konversion* zu konkurrieren. Hier transferiert der angeregte Kern seine Energie direkt auf ein Hüllenelektron, dass anschließend als ein freies Elektron (*Konversionselektron*) nachgewiesen werden kann. Dieser Prozess unterscheidet sich vom β -Zerfall dadurch, dass das N und das Z des Kerns nicht geändert werden, dafür aber das Atom ionisiert wird. Die kinetische Energie des Konversionselektrons entspricht der Energie des γ -Quants, vermindert um die Bindungsenergie des Hüllenelektrons. Interne Konversion kann man sich daher als eine Art internen Photoeffekt vorstellen. Der freie Platz in der Elektronenhülle wird von Elektronen aus äußeren Schalen aufgefüllt, wobei charakteristische Röntgenstrahlung emittiert wird. Werden diese Röntgenstrahlen innerhalb der Atomhülle absorbiert, so wird ein Elektron mit geringer kinetischer Energie emittiert (*Auger-Elektron*).

^{137}Cs ist ein Beispiel für interne Konversion: durch β -Zerfall entsteht ein angeregter Zustand des ^{137}Ba , der durch die Emission eines 0.661 MeV Photons in den Grundzustand übergeht. In 11% der Fälle wird statt des γ -Quants ein Konversionselektron emittiert.

Von den natürlichen radioaktiven Isotopen haben die γ -Strahler in der Medizin die weites-

⁴Während beim α -Zerfall starke WeWi und Tunneleffekt bzw. beim β -Zerfall die schwache WeWi die entscheidenden Kräfte vermitteln, ist es beim γ -Zerfall die elektromagnetische Wewi.

Strahlung	typische Energie	Reichweite in Luft	Abschirmung	Beispiel
α -Strahler	5 MeV	4 cm	1 Blatt Papier	Radon-222, Radium-226 Plutonium-Isotope
β -Strahler	1 MeV	3 m	0.5 cm Plexiglas	Kalium-40, Cäsium-137 Strontium-90
γ -Strahler	1 MeV	700 m	10 cm Blei	nahezu alle Radionuklide

Tabelle 15.4: Strahlungsarten, -eigenschaften und -abschirmung.

te Verbreitung: sie werden in der Nuklearmedizin und der Single-Photon-Emission-Computer-Tomographie SPECT zur Darstellung von Körper- oder Organfunktionen verwendet. Ein anderer Anwendungsbereich ist die Strahlentherapie, hier aufgrund der eher geringen Aktivitäten und Energien meist die Brachytherapie.

15.1.4 Zusammenfassung

Tabelle 15.4 fasst die wesentlichen Arten radioaktiver Strahlung zusammen. Angegeben sind die typischen Energien, die Reichweite der Strahlung in Luft, die Abschirmmöglichkeiten und Beispiele für entsprechende Strahler. Bei der Abschirmung von β -Strahlen sollten leichte Materialien verwendet werden (im Beispiel Plexiglas), da die Elektronen in schweren Materialien wie dem gerne für Abschirmungen genutzten Blei zu Röntgenstrahlung führen würden. Dies ist insbesondere beim Umgang mit Strahlern zu beachten, die sowohl γ s als auch β s emittieren!

Diese Eindringtiefen können wir auch mit menschlichem Gewebe in Beziehung setzen. α -Strahlung aus natürlichen Zerfällen gibt ihre gesamte Energie in der Oberhaut ab und hat eine Eindringtiefe von einigen Zehntel mm. β -Strahlen verteilen die abgegebene Energie auf ein längeres Wegstück: sie haben eine Eindringtiefe von einigen mm und dringen bis in die Unterhaut vor. γ -Quanten wechselwirken ebenfalls mit Körpergewebe, jedoch lässt sich für sie keine Reichweite (Eindringtiefe) angeben, in der die Strahlung vollständig absorbiert wird, sondern nur eine Halbwerttiefe.

15.2 Kerne und Isotope

Der einfachste Kern, der eines Wasserstoffatoms, besteht aus einem Proton. Mit zunehmender Ordnungszahl der Atome muss aufgrund elektrischer Neutralität auch die Zahl der Protonen zunehmen. Da die Protonen die massetragenden Teilchen des Atoms sind, muss die Masse mit der Zahl der Protonen zunehmen. Weist man dem Protonenkern eine Masse von 1 zu⁵, so zeigt sich, dass die Massen der schwereren Kerne ungefähr doppelt so gross sind wie aus der Zahl der Protonen zu erwarten. Ein weiteres Problem des Atomkerns besteht darin, dass die gravitative Anziehung zwischen den Protonen nicht stark genug ist, um der elektrostatischen Abstoßung entgegenzuwirken.

Beide Probleme lassen sich durch Berücksichtigung des 1932 von Chadwick entdeckten Neutrons umgehen: seine Anwesenheit im Atomkern erklärt die großen Massen und liefert gleichzeitig eine kohäsive Kraft, die die Kernbauteile zusammenhält. Diese starke Wechselwirkung hat eine sehr kurze Reichweite (vgl. Tabelle 15.5).

⁵Die Massen von Atomen können in kg oder in relativen Massen, der *atomaren Masseneinheit* amu bzw. *atomic mass unit* amu, angegeben werden. ¹²C ist dabei das Atomgewicht von 12 zugewiesen worden. Damit ergibt sich für eine atomare Masseneinheit (auch als Dalton bezeichnet) $1.6601 \cdot 10^{-24}$ g. Auf dieser Basis ist das Gewicht eines Neutrons 1.008665 amu, das eines Protons 1.007276 amu und das Gewicht eines Elektrons 0.000549 amu. Das Energieäquivalent einer atomaren Masseneinheit beträgt 931 MeV.

Wechselwirkung	Dauer τ/sec	Querschnitt σ/cm^2	Kopplungs- konstante α	Reichweite cm
starke WeWi	10^{-23}	$10^{-23} - 10^{-26}$	1 - 10	10^{-13}
elektromag. WeWi	$10^{-18} - 10^{-16}$	$10^{-23} - 10^{-33}$	1/137	∞
schwache WeWi	$10^{-10} - 10^{-3}$	10^{-44}	10^{-14}	10^{-15}
Gravitation			10^{-41}	∞

Tabelle 15.5: Die vier Wechselwirkungen, nach [49].

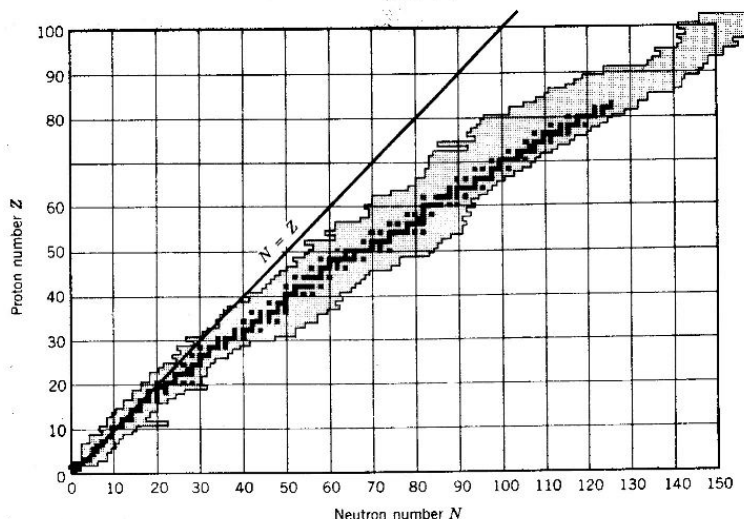


Abbildung 15.5: Nuklidkarte: Zusammenhang zwischen der Protonen- und der Neutronenzahl. Stabile Isotope sind in schwarz gezeichnet, instabile in grau [27]

In Analogie zu gewöhnlichen geladenen Teilchen kann man sich vorstellen, dass Neutronen und Protonen nukleare Ladungen tragen. Daraus ergibt sich ein Kraftfeld um den Kern, wobei alle Kräfte anziehend sind. Diese Anziehung ist in der Lage, die abstoßenden elektrostatischen Kräfte zu überwinden. Da die Reichweite der starken Wechselwirkung wesentlich geringer ist als die der elektromagnetischen, wechselwirken die Neutronen nur mit den Nukleonen in unmittelbarer Nachbarschaft, während Protonen auch mit weiter entfernten Protonen des Kerns wechselwirken können. Daher nimmt die Zahl der Neutronen schneller zu als die Zahl der Protonen (vgl. Abb. 15.5). Die Elementarkräfte unterscheiden sich nicht nur in den in Tabelle 15.5 gegebenen Reichweiten und Stärken, sondern auch in den Teilchenarten, auf die sie wirken: Die starke WeWi wirkt auf Hadronen⁶, die elektromagnetische WeWi auf geladene Teilchen, die schwache WeWi auf Leptonen⁷ und Hadronen, die Gravitation wirkt auf alle Teilchen.

Allerdings ist die Zahl der Neutronen innerhalb verschiedener Kerne eines bestimmten Elements nicht konstant, sondern es bilden sich *Isotope*⁸, deren Kerne jeweils aus der gleichen

⁶Oberbegriff für alle Teilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen; die gehören als mit einem Spin in ungeradzahigen Vielfachen von $1/2$ zur Untergruppe der *Fermionen*.

⁷Oberbegriff für Teilchen mit Spin $1/2$, die nicht der starken Wechselwirkung unterliegen; zu den Leptonen zählen Elektronen, Myonen, das τ -Lepton und deren Neutrinos.

⁸Nuklide mit gleicher Ladungszahl Z werden als *Isotope* bezeichnet, Nuklide gleicher Massenzahl A als *Isobare*, Nuklide gleicher Neutronenzahl N als *Isotone*. Nuklide mit gleichem Neutronenüberschuss $A - 2Z$ werden als *Isodiophere* bezeichnet, Nuklide mit gleicher Anregungsenergie bei konstantem N und Z als *Isomere*. Meistens werden Nuklide eines Elements X über die Massenzahl A gekennzeichnet als ${}^A X$, in einigen Fällen werden auch die Schreibweisen ${}^A_Z X$ oder ${}^A_Z X_N$ verwendet. *Spiegelkerne* sind Paare von Isobaren, in denen die Neutronenzahl des einen Nuklids gleich der Protonenzahl des anderen ist.

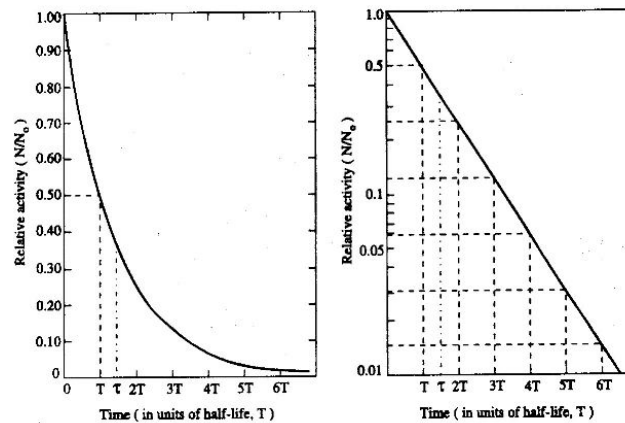


Abbildung 15.6: Zerfallsgesetz im linearen (links) und halb-logarithmischen (rechts) Maßstab [27].

Zahl Protonen aber leicht variierenden Zahlen von Neutronen bestehen. Die elektronische Struktur dieser Isotope ist identisch, d.h. sie sind mit chemischen Mitteln nicht voneinander zu trennen, ihre Massen dagegen unterscheiden sich aufgrund der unterschiedlichen Nukleonenzahlen. Das Atomgewicht des Elements ist das gewichtete Mittel der Atomgewichte der einzelnen Isotope. So gibt es vom Kohlenstoff (Protonenzahl 6) Isotope mit Nukleonenzahlen zwischen 9 und 15, wobei ^{12}C und ^{13}C die stabilen Isotope sind. Das radioaktive ^{14}C wird in der Altersbestimmung verwendet, ^{11}C in der Positronen-Emissions-Tomographie PET. Die große Zahl unterschiedlicher Isotope zeigt sich in der Breite des Bandes in Abb. 15.5.

15.3 Zerfallsgesetz

Drei Jahre nach der Entdeckung des radioaktiven Zerfalls im Jahre 1896 stellte man fest, dass die Zerfallsrate reiner radioaktiver Substanzen im Laufe der Zeit abnimmt. Etliche Jahre später erkannte man, dass Radioaktivität eine Eigenschaft einzelner Atome ist, nicht jedoch der gesamten Materieprobe. Noch einige weitere Jahre vergingen bis man die *statistische* Natur des radioaktiven Zerfalls erkannte: es ist nicht möglich vorherzusagen, wann welcher Kern zerfallen wird. Hieraus ergibt sich direkt das exponentielle Zerfallsgesetz, zuerst von Rutherford und Soddy formuliert.

Ein radioaktives Isotop kann durch die Rate, mit der die darin befindlichen Kerne zerfallen, charakterisiert werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kern in einem Zeitintervall dt zerfällt ist gegeben durch $\lambda \cdot dt$, worin $\lambda [\text{T}^{-1}]$ die *Zerfallskonstante* ist. Da der Zerfall ein statistischer Prozess ist, macht es keinen Sinn, einzelne Teilchen zu betrachten. Stattdessen gehen wir von einer Zahl von N_0 Teilchen zum Zeitpunkt t_0 aus. Die Zahl der zerfallenden Kerne ist gegeben durch

$$dN = -\lambda N dt, \quad (15.2)$$

bzw. nach Integration (vgl. Abschn. 6.2.3)

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}. \quad (15.3)$$

Die Zerfallzeit τ gibt an, in welcher Zeit die Zahl der zerfallenden Kerne auf $1/e$ abgesunken ist. Alternativ kann die Halbwertszeit T

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \ln 2 = 0.69 \dots \cdot \tau \quad (15.4)$$

eingeführt werden, die angibt, wann die Hälfte der Kerne zerfallen ist, vgl. Abb. 15.6.

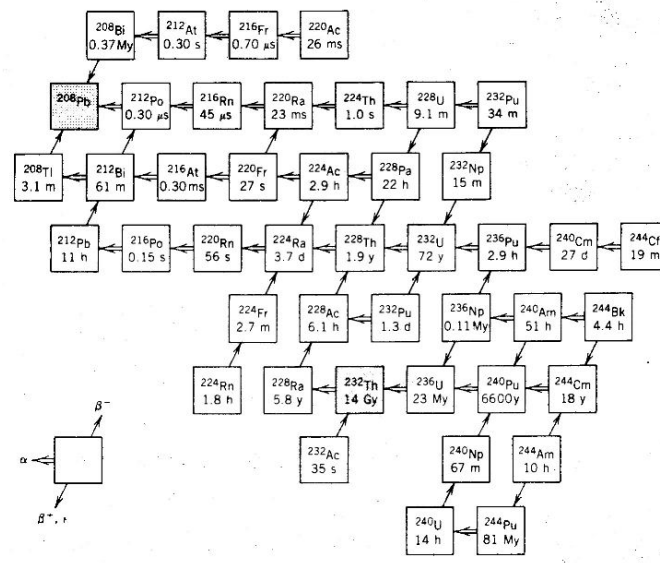


Abbildung 15.7: Thorium-Kette der natürlichen Zerfälle. Einige Halbwertzeiten sind angegeben (My = 10^6 Jahre, Gy = 10^9 Jahre), die Art des Zerfalls ergibt sich aus der Richtung des Pfeils, vgl. auch Abb. 15.2 [27].

Für die biologischen Konsequenzen ebenso wie messtechnisch von größerer Bedeutung ist die *Aktivität*, definiert als die Rate, mit der eine radioaktive Substanz Zerfallsprodukte erzeugt:

$$dN_a = -dN = \lambda N(t) dt. \quad (15.5)$$

Diese werden im Detektor nachgewiesen mit einer Rate

$$\frac{dN_a}{dt} = \lambda N(t) = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \quad (15.6)$$

oder

$$A = A_0 e^{-\lambda t}. \quad (15.7)$$

Die Aktivität zerfällt mit dem gleichen Exponentialgesetz, mit dem auch die aktive Substanz zerfällt. Die Aktivität ist jedoch über $\lambda N(t)$ definiert, nicht über $dN(t)/dt$. Für den einfachen radioaktiven Zerfall sind beide Größen gleichwertig.

Die Maßeinheit für die Aktivität ist das Becquerel. 1Bq entspricht einem Zerfall pro Sekunde. 10^6 Bq werden in älteren Arbeiten als 1R (R für Rutherford) bezeichnet. Die alte Einheit der Aktivität ist das Curie. 1Ci entspricht $3.7 \cdot 10^{10}$ Bq.

Aktivitäten, Halbwertzeiten und Zerfallskonstanten werden auch dann eingeführt, wenn ein Kern auf verschiedene Weisen zerfallen kann. In diesem Falle ist die Gesamtzerfallswahrscheinlichkeit λ_T die Summe über die Einzelwahrscheinlichkeiten

$$\lambda_T = \sum \lambda_i$$

und das Zerfallsgesetz wird zu

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda_T t} = N_0 e^{-(\sum \lambda_i)t}.$$

Führt man Verzweungsverhältnisse (branching-ratios) λ_i/λ_T ein, so ergeben sich *partielle Aktivitäten* zu

$$A_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_T} \cdot A_T \quad (15.8)$$

und die Gesamtaktivität zu

$$A_T = A_o e^{-\lambda_T t}. \quad (15.9)$$

Ein radioaktives Isotop zerfällt nicht zwingend in einen stabilen Kern, sondern kann in ein anderes aktives Isotop zerfallen, das seinerseits in ein aktives Isotop zerfällt usw. Abb. 15.7 zeigt die Thorium-Kette als ein Beispiel für eine sehr lange, natürliche Kette⁹. Hier wird das Ausgangsnuklid als Mutternuklid bezeichnet, die folgenden Nuklide als Tochter- bzw. Enkelnuklide usw.

15.4 Wechselwirkung energiereicher Strahlung mit Materie

Energereiche Strahlung ionisiert Materie, d.h. ein einzelnes Quant kann soviel Energie übertragen, dass ein Elektron aus dem Material ausgelöst wird. Je nachdem, ob es sich um Teilchenstrahlung oder elektromagnetische Strahlung handelt, folgt die Wechselwirkung unterschiedlichen Gesetzen.

Bei der Untersuchung der Wechselwirkung energiereicher Strahlung mit Materie bewegen wir uns in einem Grenzbereich zwischen Atom- und Kernphysik. Energereiche Strahlung wird häufig in Prozessen im Atomkern erzeugt, die Wechselwirkung dieser Strahlung mit Materie findet jedoch meistens in der Hülle der Atome statt (Ausnahme: Paarerzeugung und hadronische Wechselwirkung).

15.4.1 Elastische Streuung (Streuung ohne Energieabgabe)

Bei der *elastischen Streuung* regt das Photon ein Atomelektron zu Schwingungen mit der entsprechenden Frequenz an. Das Elektron strahlt die gleiche Photonenenergie wieder ab, wobei es an seinem Platz verbleibt, die Ausstrahlung des Photons allerdings in einer anderen Richtung erfolgt (vgl. Abb. 15.8a). Bei diesem Prozess kommt es insgesamt nur zu einer Richtungsänderung, Anregung oder Ionisation finden nicht statt. Elastische Streuung hat bei Photonenenergien oberhalb 10 keV keine Bedeutung mehr.

15.4.2 Photoeffekt

Beim *Photoeffekt* löst das auftreffende Photon ein Hüllenelektron aus der Materie. Das Photon wird dabei vollständig absorbiert (vgl. Abb. 15.8c), seine Energie geht über in die kinetische Energie der Elektrons abzüglich der Bindungsenergie E_B :

$$E_{kin} = h\nu - E_B. \quad (15.10)$$

Das Photon verschwindet bei diesem Prozess vollständig, jedoch steht nun ein energiereiches Elektron zur Verfügung, das in der Materie für weitere Ionisation sorgen kann. Der Photoabsorptionskoeffizient τ sinkt mit wachsender Photonenenergie, weist aber auch Sprünge auf: an diesen Stellen übersteigt die Photonenenergie den Wert, der für die Ionisation in der nächst-tieferen Schale benötigt wird.

15.4.3 Compton-Effekt

Der Compton-Effekt beschreibt die inelastische Streuung eines Photons an einem Hüllenelektron. Die Streuung an Atomelektronen kann als reiner Compton-Effekt angesehen werden, wenn deren Bindungsenergie klein ist gegen die des einfallenden Photons. Die ist für die äußeren Schalen in der Regel gegeben. Das Photon überträgt einen Teil seiner Energie auf das Elektron. Dieses wird dadurch aus dem Atom gelöst (Ionisation). Das Photon ändert seine Richtung

⁹Lange Zerfallsketten ergeben sich insbesondere bei den Aktiniden, vgl. Abb.en 15.7.

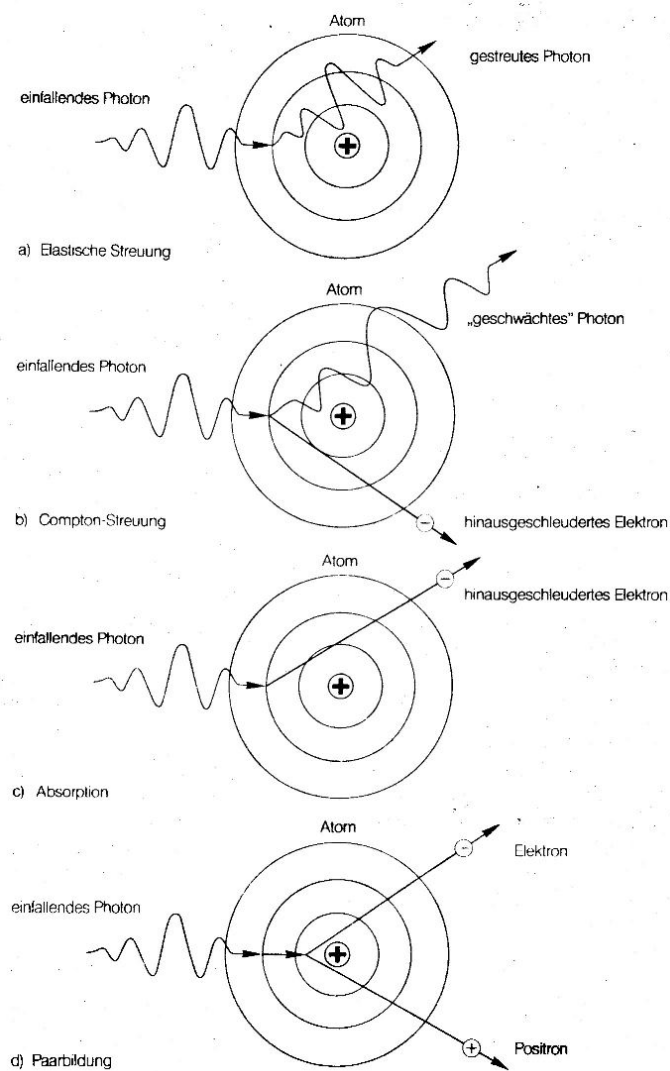


Abbildung 15.8: Wechselwirkung von Photonen mit Materie. Dargestellt sind (a) elastische Streuung, (b) Compton-Streuung, (c) Absorption durch Photoeffekt und (d) Paarbildung [18].

und fliegt unter einem Winkel θ_γ relativ zu seiner ursprünglichen Richtung mit verminderter Energie weiter, vgl. Abb. 15.8b.

Bei diesem Stoß verschiebt sich die Wellenlänge λ des Photons um die vom Streuwinkel θ_γ abhängige Größe

$$\delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta_\gamma) \quad (15.11)$$

mit

$$\lambda_c = \frac{h}{mc} \quad (15.12)$$

als der *Compton-Wellenlänge* des Elektrons. Das Verhältnis aus Photonenenergie vor und nach dem Stoß ist

$$\frac{h\nu^*}{h\nu} = \frac{1}{1 + \epsilon(1 - \cos\theta_\gamma)} \quad (15.13)$$

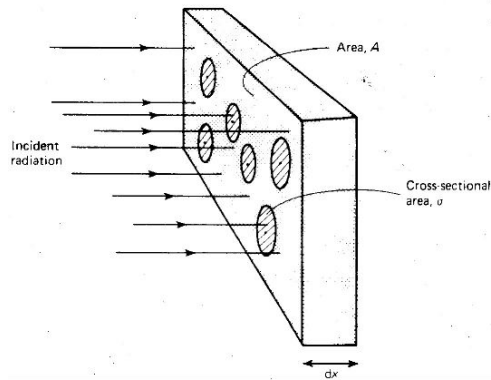


Abbildung 15.9: Veranschaulichung des Wirkungsquerschnitts [47].

mit

$$\epsilon = \frac{h\nu}{mc^2}. \quad (15.14)$$

Die Energieabgabe ist um so größer, je größer die Anfangsenergie und der Streuwinkel des Photons sind. Bei kleinen Photonenenergien wird nahezu keine Energie abgegeben und die Streuung ist elastisch.

Die vom Photon abgegebene Energie $h\nu - h\nu^*$ wird in die kinetische Energie des Elektrons (abzüglich der nahezu zu vernachlässigenden Bindungsenergie) umgesetzt. Energetisch gesehen schließt sich der Compton-Effekt an den Photoeffekt an. Würde man die Bindungsenergie des Elektrons berücksichtigen, so würde sich der Wirkungsquerschnitt für Compton-Streuung bei kleinen Photonenenergien etwas verringern.

15.4.4 Paarerzeugung

Mit weiter zunehmender Energie überwiegt die Paarbildung den Compton-Effekt. Dabei werden aus der Photonenenergie zwei Teilchen, ein Elektron und ein Positron¹⁰, gebildet. Für Paarbildung muss die Energie des Photons mindestens das Doppelte der Ruhemasse des Elektrons (511 keV) betragen. Steht ein Kern als ein schwerer Partner zur Impulserhaltung zur Verfügung, so ist diese Energie zur Paarbildung ausreichend. Steht kein Rückstoßpartner zur Verfügung, so beträgt die Minimalenergie für Paarerzeugung das Vierfache der Ruhemasse des Elektrons.

Bei Paarbildung verschwindet das Photon und steht damit nicht für weitere Wechselwirkung zur Verfügung. An seiner Stelle entsteht jedoch ein Elektron, das ionisierend wirkt, sowie ein Positron, dass in Materie durch Aussendung von Vernichtungsstrahlung mindestens zwei neue Photonen erzeugt, die ihrerseits auch wieder ionisierend sind.

15.4.5 Absorptionsgesetz

Die Abschwächung eines γ - oder Röntgenstrahls beim Durchgang durch Materie lässt sich analog zu der von Licht in Materie durch ein Abschwächungs- oder Absorptionsgesetz beschreiben.

Die Wechselwirkungen energiereicher elektromagnetischer Strahlung und geladener Teilchen mit Materie sind statistisch, d.h. die einzelnen Reaktionen sind nicht im Detail vorhersehbar, sondern es lässt sich nur eine Wahrscheinlichkeitsaussage treffen bzw. über eine Viel-

¹⁰Das Positron ist das Anti-Teilchen des Elektrons und unterscheidet sich von diesem durch das Ladungsvorzeichen. In Materie vereinigt sich das Positron schnell wieder mit einem Elektron und sendet dabei zwei bis drei Photonen mit einer Gesamtenergie von 1.022 MeV, dem Doppelten der Ruheenergie, als Vernichtungsstrahlung aus. Entstehen zwei Photonen, so fliegen sie in entgegengesetzte Richtung. Auf diesem Prinzip basiert die Positronen-Emissions-Tomographie.

zahl von Quanten/Teilchen eine Verteilungsfunktion angeben. Zur anschaulichen Darstellung ordnet man jedem Atom des Targets eine zur Wahrscheinlichkeit des Prozesses proportionale Fläche σ_w , den Wirkungsquerschnitt¹¹, zu. Die jeweilige Reaktion findet genau dann statt, wenn ein Quant/Teilchen innerhalb dieser Fläche σ_w einfällt; außerhalb findet keine Wechselwirkung statt.

Trifft ein homogener Photonenstrahl auf die Grundfläche A eines Targets der Dicke Δx und der Teilchendichte n_o pro Einheitsvolumen, so ergibt sich mit dem Wirkungsquerschnitt σ_w eine aktive Fläche

$$A_{aktiv} = \sigma_w N = \sigma_w n_o A \Delta x, \quad (15.15)$$

innerhalb derer eine Reaktion stattfindet¹². Die Reaktionswahrscheinlichkeit ist der Quotient aus aktiver Fläche zu gesamter Fläche

$$P = \frac{A_{aktiv}}{A} = \frac{n_o \sigma_w A \Delta x}{A} = n_o \sigma_w \Delta x, \quad (15.16)$$

d.h. die Wahrscheinlichkeit einer Reaktion ist proportional dem Wirkungsquerschnitt σ_w . Wird das Photon vollständig absorbiert, so lässt sich die Reduktion der Strahlintensität bei Durchqueren einer Materieschicht schreiben als

$$-dI = \mu I(x) dx \quad (15.17)$$

mit $\mu = n_o \sigma$ als dem linearen Abschwächungskoeffizienten. Für konstantes μ hat diese Differentialgleichung die Lösung¹³

$$I(x) = I_o \exp\left(-\frac{\mu}{\rho} \rho x\right). \quad (15.18)$$

Dieses Gesetz ist äquivalent zum Lambert-Bouguer-Beer'schen Gesetz (vgl. Abschn. 13.3) für elektromagnetische Strahlung im sichtbaren Bereich. Im Gegensatz zum sichtbaren Licht ist jedoch die Annahme eines von der durchquerten Schichtdicke unabhängigen Absorptionskoeffizienten etwas problematischer: wir können aus den bisher gemachten Betrachtungen nicht annehmen, dass ein Strahlungsquant seine Eigenschaften bis zum Ausscheiden aus dem Strahlenbündel nicht verändert. Stattdessen müssten wir berücksichtigen, dass die Abnahme der Energie beim Durchsetzen der Materie zu einer Verschiebung der wahrscheinlichsten Wechselwirkungsprozesse führt und damit μ nicht konstant bleibt. Trotzdem ist das durch (15.18) gegebene Abschwächungsgesetz eine brauchbare Näherung.

Im Zusammenhang mit der Absorption elektromagnetischer Strahlung in Materie können wir noch den Begriff der *Eindringtiefe* angeben. Die Eindringtiefe ist diejenige Dicke x_e , in der die Strahlintensität auf 1/e des Anfangswertes abgesunken ist:

$$x_e = \frac{1}{\mu} \quad (15.19)$$

Der Ausdruck Eindringtiefe ist in Anlehnung an die optische Tiefe im Strahlungstransport gewählt und ist hier wie dort irreführend: die Strahlung selbst durchdringt beliebige Schichtdicken wobei ihre Intensität exponentiell abnimmt. Die Eindringtiefe ist nur ein ungefähres und handliches Maß, ähnlich wie die Halbwertszeit beim radioaktiven Zerfall nur ein grobes Maß für die Lebensdauer der Teilchen ist. In einigen älteren Büchern wird anstelle des Begriffes Eindringtiefe noch der Begriff *Halbwerttiefe* verwendet als die Tiefe, in der die Intensität der Strahlung auf die Hälfte abgeklungen ist.

Der in (15.18) verwendete lineare Abschwächungskoeffizient μ/ρ setzt sich zusammen aus der Summe der Abschwächungskoeffizienten der einzelnen Prozesse:

$$\mu = \mu_{photo} + \mu_{Compton} + \mu_{paar} + \mu_{elastisch} = \tau + \sigma + \kappa + \mu_a \quad (15.20)$$

¹¹Die Einheit für den Wirkungsquerschnitt ist das barn. $1\text{b(arn)} = 10^{-28}\text{m}^2 = 10^{-24}\text{cm}^2$.

¹²In der Gleichung gibt N die Zahl der Targetatome im Volumen $A \Delta x$.

¹³In der Gleichung wird nicht der Abschwächungskoeffizient μ verwendet sondern der *Massenabschwächungskoeffizient* μ/ρ , der mit der Dichte ρ des Targetmaterials gewichtet wird. Entsprechend wird statt der linearen Schichtdicke x eine Massenbedeckung ρx verwendet, deren Einheit g/cm^2 ist.

bzw. als Massenabschwächungskoeffizient

$$\frac{\mu}{\rho} = \frac{\tau + \sigma + \kappa + \mu_a}{\rho}. \quad (15.21)$$

Den Abschwächungskoeffizienten kann man in einen Energieabschwächungs- und einen Streukoeffizienten zerlegen:

$$\mu = \eta + \mu_{streu} \dots \quad (15.22)$$

15.4.6 Ionisation durch energiereiche Teilchen

Geladene Teilchen mit Energien im MeV-Bereich verlieren ihre Energie im wesentlichen durch inelastische Stöße mit Elektronen der Atomhülle. Die Energieverluste dieser Teilchen werden durch die Bethe-Bloch-Formel beschrieben.

Durchsetzt ein geladenes Teilchen Materie, so werden die Atome und Moleküle angeregt oder ionisiert. Dabei erleidet das Teilchen einen Energieverlust¹⁴. Bei der Herleitung der Energieverlustbeziehung ist zwischen leichten Teilchen (Elektronen und Positronen) und schweren Teilchen (alle Teilchen mit $m > m_e$, z.B. Myonen, Pionen, Protonen, α -Teilchen) zu unterscheiden: bei schweren Teilchen sind die Massen von stoßendem und gestoßenem Teilchen unterschiedlich, bei den leichten Teilchen dagegen gleich.

Beginnen wir mit schweren Teilchen. Ist Ze die Ladung des einfallenden Teilchens, so gilt für den Energieverlust

$$-\frac{dE}{dx} \sim z^2 f(\beta), \quad (15.23)$$

d.h. der Energieverlust¹⁵ des Teilchens hängt von seiner Ladung Z und seiner Geschwindigkeit $\beta = v/c$ ab, nicht jedoch von der Teilchenmasse m . Das einfallende Teilchen wechselwirkt mit einem Hüllenelektron über sein Coulomb-Feld. Da wir schwere Teilchen betrachten, wird das Teilchen bei dem Einzelprozess nicht wesentlich von seiner Bahn abgelenkt, d.h. es fliegt nahezu gradlinig weiter. Der Impulsübertrag auf das Hüllenelektron lässt sich über den Stoßparameter b abschätzen, dh. über den Abstand, in dem das Teilchen am Atom vorbei fliegt. Damit lässt sich der Energieverlust einer einzelnen Wechselwirkung beschreiben. Den Gesamtenergieverlust erhält man durch Integration über die einzelnen Energieverluste, wobei die unterschiedlichen Stoßparameter b zu berücksichtigen sind.

Führt man diese Rechnung durch und berücksichtigt relativistische Effekte, so ergibt sich die *Energieverlust-* oder *Bethe-Bloch-Beziehung*

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi N e^4 Z^2}{c^2 m_e \beta^2} \left\{ \ln \left(\frac{2m_e v^2}{\langle I \rangle} \right) - \ln(1 - \beta^2) - \beta^2 \right\}. \quad (15.24)$$

Der Energieverlust hängt also nur von den Teilchenparametern Z und β ab, sowie von den Materieparametern N und $\langle I \rangle$. Die mittlere Ionisationsenergie $\langle I \rangle$ kann mit Hilfe des Fermi-Thomas-Modells des Atoms angenähert werden als

$$\langle I \rangle = 9.1 Z (1 + 1.9 \cdot Z^{-2/3}) [\text{eV}]. \quad (15.25)$$

Die Energieverlustbeziehung hängt nicht von der Masse des einfallenden Teilchens ab und ist daher für alle Teilchen, die schwerer sind als Elektronen, eine universelle Kurve in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit (alternativ auch aufgetragen als Energie in Einheiten der Ruheenergie). Für kleine Geschwindigkeiten ist der Term vor dem Logarithmus der bestimmende Term und der Energieverlust ist proportional zu $1/v^2$, vgl. Abb. 15.10. Physikalisch können wir das so verstehen, dass mit zunehmender Geschwindigkeit die *Wechselwirkungszeit* abnimmt und sich damit die Wahrscheinlichkeit verringert, Energie zu übertragen. In dem Augenblick,

¹⁴Der Energieverlust eines relativistischen Protons in Luft beträgt z.B. rund 2 MeV/(g cm²).

¹⁵Der Energieverlust pro Wegstück, wie er durch die Bethe-Bloch-Beziehung beschrieben wird, wird auch als *linearer Energietransfer* LET bezeichnet.

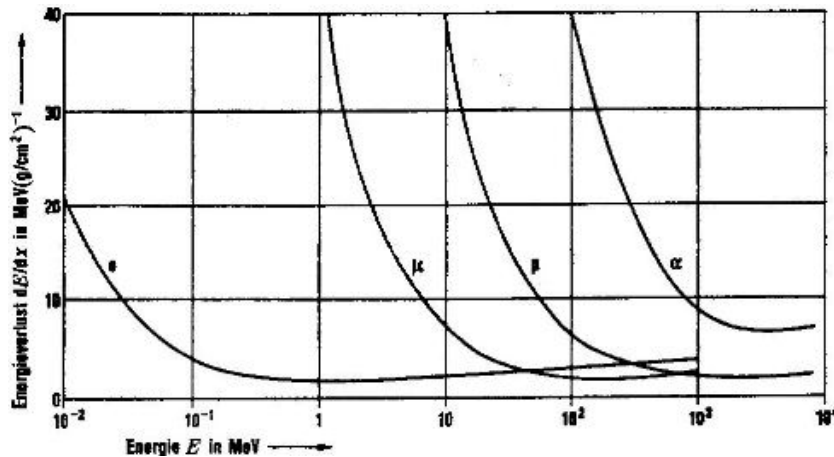


Abbildung 15.10: Energieverlustbeziehung (Bethe-Bloch) in Abhängigkeit von der Energie der einfallenden Teilchen für Elektronen, Myonen, Protonen und α -Teilchen [1].

in dem die Teilchen relativistisch werden, ist die Wechselwirkungszeit konstant und damit entfällt diese Abhängigkeit. Dann wird der logarithmische Term wirksam, der zu einem leichten Anstieg mit zunehmender Geschwindigkeit führt.

Da in Abb. 15.10 der Energieverlust gegen die Teilchenenergie aufgetragen ist, ergeben sich für verschiedene Teilchensorten unterschiedliche Kurven. Ab einer bestimmten Energie, ca. dem zwei- bis dreifachen der Ruheenergie, sind die Teilchen *minimalionisierend*. Würde man nicht gegen die Teilchenenergie sondern Teilchenenergie in Einheiten der Ruhemasse auftragen, so würden die Kurven der verschiedenen schweren Teilchen zusammenfallen. Die Energieverlustbeziehung für Elektronen würde bei entsprechender Darstellung nicht mit den anderen Kurven zusammenfallen, da bei den Elektronen die *Vielfachstreuung* zu berücksichtigen ist.

Fällt ein geladenes Teilchen in Materie ein, so erleidet es entlang seiner Wegstrecke ständig Energieverluste und kommt schließlich zur Ruhe. Jedes Teilchen hat somit eine genau bestimmte¹⁶ *Reichweite*, die sich aus der Energieverlustbeziehung bestimmen lässt. Dazu setzt man

$$-\frac{dE}{dx} = f(E). \quad (15.26)$$

Die Reichweite des Teilchens ergibt sich daraus zu

$$A = \int_0^R dx = - \int_E^0 \frac{dE}{f(E)} = \int_0^E \frac{dE}{f(E)}. \quad (15.27)$$

Für hoch-relativistische, d.h. minimal-ionisierende, Teilchen kann man $f(E)$ konstant setzen, so dass sich für die Reichweite des Teilchens ergibt

$$R = \text{const} \cdot E. \quad (15.28)$$

Für nicht-relativistische Teilchen gilt

$$f(E) \sim \frac{1}{v^2} \sim \frac{1}{E} \quad (15.29)$$

und damit für die Reichweite

$$R = \text{const} \cdot E^2. \quad (15.30)$$

¹⁶Genau bestimmt' ist nicht ganz der richtige Ausdruck, da die Wechselwirkung der Teilchen mit Materie ein statistischer Prozess ist und somit die genaue Bahn eines Teilchens nicht vorhersagbar ist. Trotzdem lässt sich die Reichweite als ein Mittel über ein Teilchenensemble definieren. Die einzelnen Teilchen weichen in ihrer Reichweite nur relativ geringfügig davon ab.

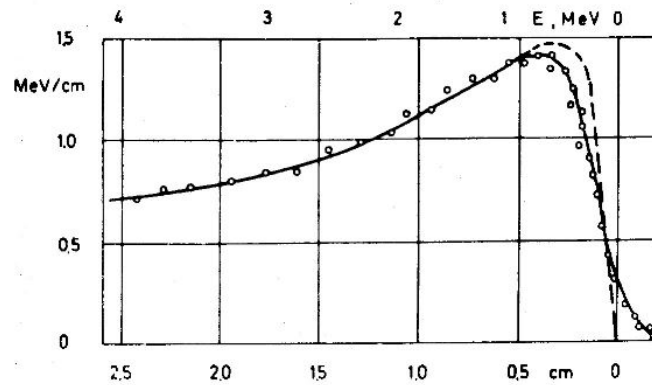


Abbildung 15.11: Bragg-Kurve eines α -Teilchens in Luft. Die Ionisationsdichte ist in Abhängigkeit vom Weg in Materie dargestellt. Die Punkte sind experimentelle Werte, die gestrichelte Linie zeigt die Kurve eines einzelnen Teilchens [13].

Die Bethe-Bloch-Formel und damit auch die in Abb. 15.10 gezeigten Kurven sind nicht ganz exakt: zum Ende der Reichweite des Teilchens, d.h. für kleine Teilchenenergien, wird der Energieverlust wieder geringer, da sich Elektronen an dem geladenen Teilchen anlagern und damit die Ladung Z und auch der Energieverlust geringer werden.

Eine Folge der Energieverlustbeziehung ist die Zunahme der spezifischen Ionisation am Ende der Reichweite. Durch den Energieverlust verlangsamt sich ein Teilchen ständig. Dabei wird im nicht-relativistischen Bereich der Energieverlust immer größer entsprechend $-dE/dx \sim 1/E$. Am Ende der Bahn ist daher der Energieverlust des Teilchens sehr groß und es wird eine maximale Zahl von Ionenpaaren pro Streckeneinheit erzeugt. Diese Zunahme der Ionisationsdichte zum Ende der Reichweite wird durch die *Braggkurve*, vgl. Abb. 15.11, beschrieben.

15.5 Dosisbegriffe und Einheiten

Der Dosisbegriff in der Radiologie ist analog dem in der Pharmakologie definiert als verabreichte Menge pro Gramm Materie. Ziel ist es, die biologische Wirkung der ionisierenden Strahlung zu charakterisieren.

Die biologische Wirkung ionisierender Strahlen hängt u.a. ab von

- der im Gewebe absorbierten Energie,
- der Dichte der Ionisierungsprozesse, und
- modifizierenden Faktoren, wie z.B. der zeitlichen Verteilung der Bestrahlung¹⁷.

Zusätzlich ist zu berücksichtigen, dass sich die Dosis in einem Strahlenfeld räumlich rasch verändern kann. Daher wird die Dosis stets im Bezug auf kleine Raumbereiche bzw. Massenelemente definiert.

Zur Dosis trägt nur der im Körper absorbierte Anteil der energiereichen Strahlung bei. Photonen oder energiereiche Teilchen, die den Körper ohne Wechselwirkung wieder verlassen, tragen nicht zur Dosis bei, vgl. Abb. 15.12.

Die wichtigsten Dosisbegriffe sind die *Ionendosis*, die *Energiedosis* und die *Äquivalentdosis*. Die Ionendosis ist die am einfachsten messbare Größe, der aber aus strahlenbiologischer Sicht die geringste Bedeutung zukommt. Die verschiedenen Dosisbegriffe sind in Tabelle 15.6 zusammengefasst.

¹⁷Dieser Punkt wird im Zusammenhang mit der Fraktionierung bei der Strahlentherapie noch genauer besprochen werden.

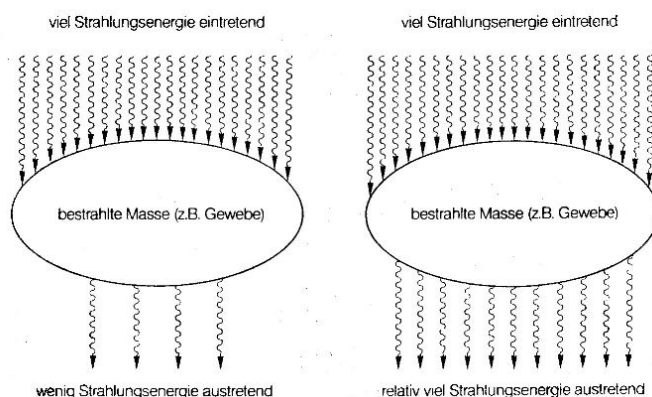


Abbildung 15.12: Energiedosis: Je mehr Strahlungsenergie pro (bestrahlte) Materie absorbiert wird, desto größer ist - selbst bei gleicher auftretender Strahlungsenergie - die Energiedosis [18].

Größe		Einheit	alte Einheit
Aktivität	A	Bequerel Bq	Curie, $1\text{Ci} = 3.7 \cdot 10^{10}\text{Bq}$
Ionendosis	J	C/kg	Röntgen, $1\text{R} = 2.58 \cdot 10^{-4}\text{C/kg}$
Energiedosis	D	Gray Gy (J/kg)	Rad, $1\text{rd} = 0.01\text{Gy}$
Äquivalentdosis	H	Sievert Sv (J/kg)	Rem, $1\text{rem} = 0.01\text{Sv}$

Tabelle 15.6: Dosisbegriffe und Umrechnungen auf alte Einheiten.

Die Ionisationsdosimetrie ist die in der Praxis am weitesten verbreitete Messmethode. Früher wurde dabei die Anzahl der durch die energiereiche Strahlung erzeugten Ladungen eines Vorzeichens pro Gramm Luft bestimmt. Die Einheit der Ionendosis, das Röntgen, war an diese Messmethode geknüpft. Heute ist die Einheit der *Ionendosis* als der Quotient aus Ladung und Masse definiert als C/kg.

Da zur Bildung eines Ionenpaares eine bestimmte Energie notwendig ist, lässt sich die der Ionendosis entsprechende äquivalente Energiedosis leicht berechnen. Dafür wurde der Begriff KERMA (kinetic energy released in material) eingeführt. Bremsstrahlungsverluste oder andere Verluste als Ionisation werden dabei nicht berücksichtigt.

KERMA ist in der Radiologie, insbesondere im englischsprachigen Raum - eine vielverwendete Einheit. KERMA in Luft hat sich als Nachfolgeeinheit der Ionendosis durchgesetzt. In Luft wird zur Bildung eines Ionenpaares eine Energie von 33.85 eV benötigt. Die Ionendosis (gemessen in Röntgen) lässt sich dann in Luftkerma umrechnen gemäß $1\text{R} = 8.73 \cdot 10^{-3}\text{Gy}$.

Anstelle von KERMA wird heute der Begriff der *Energiedosis* verwendet. Die Energiedosis ist definiert als die absorbierte Energie pro Masseneinheit.

Die Energiedosis ist, von Ausnahmen (Kalorimetrie) abgesehen, nicht direkt messbar. Sie wird aus der Energiedosis in Luft, die über die Ionendosis und KERMA messbar ist, unter Berücksichtigung der Absorptionskoeffizienten für die verschiedenen Materialien berechnet. Diese Proportionalitätskonstante, auch als *Dosisumrechnungsfaktor K* bezeichnet, ist von der Materialsorte und der Art und Energie der einfallenden Strahlung abhängig. Bei biologischer Materie kann er sich gerade im Bereich geringer Energien für die verschiedenen Körpergewebe erheblich unterscheiden.¹⁸

Caveat: Die Angabe, eine Dosis von 1 Gy sei appliziert worden, sagt alleine noch nichts über die Strahlenwirkung aus. 1 Gy kann als *Teilkörperbestrahlung* appliziert werden, z.B.

¹⁸Diese Unterschiede im Bereich von Photonenenergien bis 200 keV bilden die Grundlage der Röntgendiagnostik. Die vergleichbaren Absorptionen der verschiedenen Gewebe bei höheren Photonenenergien geben gleichzeitig auch eine Obergrenze für die Energie der Röntgenphotonen.

Strahlungsart	RBW [Sv/Gy]
Röntgen - und γ -Strahlung	1
β -Strahlung	1
schnelle Neutronen	10
langsame Neutronen	5
α -Teilchen	10
schwere Rückstoßkerne	20

Tabelle 15.7: Qualitätsfaktoren für verschiedene Typen von Strahlung, aus [49].

auf 1 Gramm der Fingerspitze, oder als *Ganzkörperbestrahlung*. In letzterem Fall hätte jedes Gramm Gewebe des gesamten Körpers eine Strahlenbelastung von 1 Gy erhalten. Die gesamte absorbierte Strahlenmenge unterscheidet sich in beiden Fällen erheblich, ebenso wie die biologische Wirkung. Daher muss bei einer Strahlenbelastung nicht nur die Dosis angegeben werden, sondern auch deren räumliche Verteilung. Umgekehrt lassen sich Teildosen bei Teilkörperbestrahlung auch nicht einfach addieren: Summation ist nur dann zulässig, wenn die Dosis im gleichen Gebiet abgegeben wurde, sonst gelten die Einzeldosen!

Bei gleicher Energiedosis und Dosisverteilung können die Auswirkungen ionisierender Strahlung in Abhängigkeit von der Strahlenart sehr unterschiedlich sein. Für die biologische Auswirkung einer Strahlenexposition ist weniger die Energiedosis von Bedeutung als vielmehr die Äquivalentdosis H , angegeben in Sievert¹⁹ Sv. Die Äquivalentdosis ergibt sich aus der Energiedosis unter Berücksichtigung eines Qualitätsfaktors q zu

$$H = q \cdot D. \quad (15.31)$$

Die Äquivalentdosis ist die Dosis, die bei der Festlegung von Grenzwerten im Strahlenschutz betrachtet wird!!

Der Qualitätsfaktor q wird als relative biologische Wirksamkeit RBW bezeichnet. Er ist festgelegt im Bezug auf die Strahlenschädigung, die Röntgenstrahlung hervorruft: die RBW ist

$$\text{RBW} = \frac{D_X}{D} \quad (15.32)$$

mit D als der Dosis der interessierenden Strahlung, die eine bestimmte biologische Wirkung hervorruft, und D_X als der Dosis Röntgenstrahlung, die benötigt wird, um die gleiche Wirkung hervorzurufen.

Für die RBW werden in vielen Büchern einfache Standardwerte angeboten. Im neuen Gerthsen [49] finden sich z.B. die in Tabelle 15.7 gegebenen Qualitätsfaktoren. Wenn Sie in ein anderes Buch gucken, werden Sie andere Werte finden, insbesondere bei den α -Teilchen noch den alten Qualitätsfaktor von 20, und bei den Neutronen sehr unterschiedliche Werte, die bis zu 30 gehen können.

Auf den ersten Blick sind diese Unterschiede beunruhigend: was bedeutet ein Grenzwert in der Strahlenschutzverordnung, wenn man die Dosis aufgrund des inkonsistent definierten Qualitätsfaktors nicht richtig bestimmen kann? Als erstes: der Qualitätsfaktor ist eine Definitionssache, er kann sich daher mit der Zeit ändern (vgl. auch Abb. 15.14), was einen Teil der Unterschiede zwischen verschiedenen Tabellen erklärt. Trotzdem hat der Qualitätsfaktor eine physikalisch-chemisch-biologische Basis, kann also nicht beliebig manipuliert werden. Und zweitens kann es so etwas wie einen universellen Qualitätsfaktor für α -Teilchen gar nicht geben.

Die wichtigsten biologischen Wirkungen energiereicher Strahlung sind Schäden an der DNS. Einzelstrangbrüche können dabei relativ gut und sicher repariert werden, Doppelstrangbrüche hingegen nicht. Strahlung, die einen Doppelstrangbruch erzeugen kann, hat also eine größere biologische Wirksamkeit als Strahlung, die nur einen Einzelstrangbruch

¹⁹Die Einheiten Sv und Gy entsprechen einander bei einem Qualitätsfaktor q von 1.

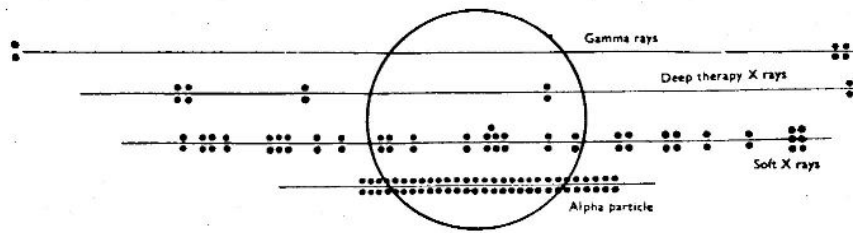


Abbildung 15.13: Ionisationsdichte entlang der Teilchenspur für verschiedene Strahlungsarten [5]. Der Kreis entspricht einem Durchmesser von einem 27 millionstel eines mm und markiert die relevante räumliche Skala für Doppelstrangbrüche.

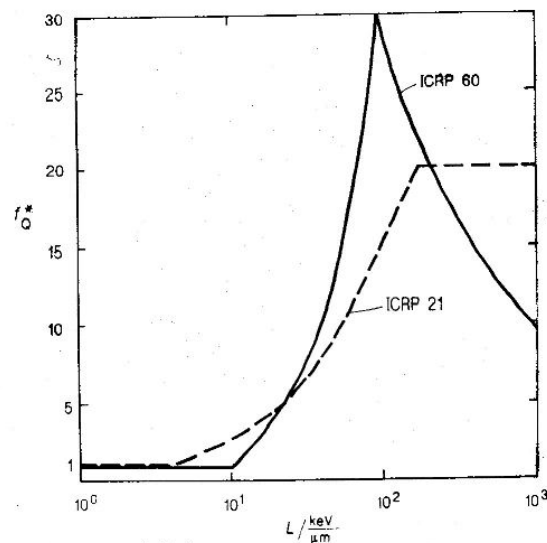


Abbildung 15.14: Qualitätsfaktor in Abhängigkeit vom linearen Energietransfer nach älteren (gestrichelt, von 1987) und neueren (durchgezogen, 1991) Richtlinien der internationalen Strahlenschutzorganisation ICRP [11].

erzeugt. Außer der Dosis der einfallenden Strahlung ist für einen Doppelstrangbruch auch die räumliche Ionisationsdichte entscheidend: ist der Energieverlust (linearer Energie-Transfer LET, für energiereiche Teilchen gegeben durch die Bethe-Bloch-Beziehung 15.24) groß, so folgen die Ionisationen entlang der Teilchenspur dicht aufeinander. Betrachtet man natürliche radioaktive Strahler oder gängige medizinische Geräte, so lässt sich die Dichte der Ionisationsspuren mit der typischen räumlichen Skala für Doppelstrangbrüche vergleichen, siehe Abb. 15.13. Man erkennt deutlich, dass für α -Teilchen die Ionisationsdichte sehr groß ist und damit auch die RBW. Harte elektromagnetische Strahlung hinterlässt wesentlich geringere Ionisationsdichten, die mit abnehmender Photonenenergie zunehmen.

Aus der Bethe-Bloch-Beziehung können wir erkennen, dass der lineare Energietransfer eine Funktion der Teilchenenergie ist. Für α -Teilchen aus natürlichen Strahlern ist der LET groß, mit zunehmender α -Energie nimmt der LET jedoch ab und steigt erst zum Ende der Reichweite, eben wenn die Energie bereits deutlich geringer geworden ist, wieder an (Bragg-Peak). Der LET hängt also nicht nur von der Art der Strahlung sondern auch von ihrer Energie ab. Typische LETs in Standardgewebe²⁰ sind in Tab. 15.8 gegeben.

Der Qualitätsfaktor wird in Abhängigkeit vom LET definiert. Abb. 15.14 zeigt die alten

²⁰Das ist ein homogenes Gewebe, dessen Absorptionseigenschaften an den gewichteten Mittelwert über menschliches Gewebe angepasst sind.

Energie [MeV]	LET [keV/ μm]		
	Elektronen	Protonen	α -Teilchen
0.0001	55.2		
0.001	7.48		
0.01	0.98		
0.1	0.152		
1.	0.060	13.9	182
2.		7.60	101
4.		4.12	55.4
6.		2.87	38.9
8.		2.23	30.1
10.		1.83	24.7

Tabelle 15.8: Linearer Energietransfer LET in Standardgewebe in Abhängigkeit von der Teilchensorte und -energie, nach [11].

(1987, gestrichelte Kurve) und neuen (1991, durchgezogene Kurve) Definitionen nach den Richtlinien der International Commission on Radiation Protection ICRP. Für kleinen LET (unterhalb 10 keV/ μm) ist der Qualitätsfaktor gleich 1. Seinen Maximalwert von 30 erreicht der Qualitätsfaktor bei einem LET von 100 keV/ μm (z.B. α -Teilchen mit einer Energie von 2 MeV, vgl. Tabelle 15.8). Steigt der LET weiter, so wird der Qualitätsfaktor wieder geringer. Dieses Abfallen der RBW bei hohen LETs ist in früheren Richtlinien nicht berücksichtigt, dort war der Qualitätsfaktor selbst bei hohen LETs konstant. Das Abknicken wird als Overkill erklärt: zwar steigt mit zunehmendem LET die Wahrscheinlichkeit des Doppelstrangbruches, jedoch ist ab einem bestimmten LET die Schädigung der DNS und der gesamten Zelle bereits so groß, dass die Zelle abstirbt. Damit ist sie im Hinblick auf stochastische Schäden (d.h. die Möglichkeit der Ausbildung von Krebs in späteren Jahren) jedoch bedeutungslos. Mit dieser Argumentation können Sie auch verstehen, warum bei den akuten Strahlenschäden nur die Energiedosis, nicht jedoch die Äquivalentdosis angegeben wird; entsprechendes gilt auch in der Strahlentherapie.

15.6 Messung energiereicher Strahlung

Zum Nachweis energiereicher Strahlung steht eine Vielzahl von Instrumenten zur Verfügung. Diese lassen sich nach verschiedenen Kriterien unterscheiden:

- Art der Strahlung (elektromagnetische, geladene energiereiche Teilchen, ungeladene Teilchen, leichte oder schwere Kerne).
- Energie der Strahlung (z.B. natürliche radioaktive Strahlung, energiereiche Teilchen in einem Beschleuniger, kosmische Strahlung).
- Auflösungsvermögen:
 - Energieauflösung, d.h. welche Energieunterschiede können noch aufgelöst werden?, lässt sich ein Energiespektrum aufnehmen?;
 - räumliche Auflösung: lässt sich die Einfallrichtung der Strahlung reproduzieren oder wird über die gesamte Strahlung integriert, egal aus welcher Richtung sie einfällt.
 - ist die Teilchenbahn vermessbar oder wird nur der Teilcheneinfall registriert?
 - Totzeit (zeitliche Auflösung): wie lange dauert es, bis der Detektor das nächste Signal verarbeiten kann? Lange Totzeiten erlauben es nicht, hohe Aktivitäten zu messen.

Effekt	Instrumententyp	Detektor
elektrisch	Ionisationskammer	Gas
	Proportionalzähler	Gas
	Geiger-Zähler	Gas
	Halbleiter-Zähler	Halbleiter
chemisch	Film	photographische Emulsion
	chem. Dosimeter	Flüssigkeit oder feste Substanz
Licht	Cerenkov-Zähler	Kristall oder Flüssigkeit
	Szintillationszähler	Kristall oder Flüssigkeit
Thermolumineszenz	Thermolumineszenz-D.	Kristall
Wärme	Kalorimeter	Flüssigkeit oder feste Substanz

Tabelle 15.9: Strahlungseffekte, die im Nachweis und der Messung energiereicher Strahlung verwendet werden, nach [7].

- Ansprechschwelle: was ist die Minimalenergie bzw. der minimale LET den die Strahlung haben muss, damit der Detektor anspricht?
- Nachweiswahrscheinlichkeit: ein Detektor registriert nicht zwingend jedes Teilchen. Soll der Detektor z.B. Röntgenstrahlung beim CT oder bei konventionellen Röntgenaufnahmen aufzeichnen, so sollte die Nachweiswahrscheinlichkeit groß sein, da sonst zur Verringerung der statistischen Fehler zu hohe Dosen verwendet werden müssen.
- Auswertbarkeit: wie lassen sich die Signale am Detektor ‘ablesen’ und auswerten (automatisch, ‘Handarbeit’). Sind Realtime-Messungen möglich oder muss der Detektor nach Strahlenexposition erst ‘bearbeitet’ werden, bevor die Informationen zugänglich sind (z.B. Festkörperspurdetektoren).
- arbeitet der Detektor ständig oder ist er ‘triggerbar’?

Unter Berücksichtigung dieser Anforderungen lassen sich unterschiedliche Typen von Instrumenten entwickeln. Das Skript wird sich auf Instrumente beschränken, die in dem Energiebereich messen, der für den Strahlenschutz relevant ist. Eine Möglichkeit, diese Instrumente zu klassifizieren, besteht darin, dass man sie nach den von der Strahlung ausgelösten Effekten in der Materie klassifiziert, vgl. Tab. 15.9.

15.6.1 Gasgefüllte Teilchendetektoren

Ein gasgefüllter Teilchendetektor besteht aus einem gasgefüllten Raum und zwei Elektroden (eine ist das Gehäuse, die andere ist ein Draht entlang der Zentralachse. Zwischen diesen Elektroden liegt eine variable Spannung an. Ist ein derartiger Detektor ionisierender Strahlung ausgesetzt, so ändert sich die Leitfähigkeit des Gases in der Kammer.

Ist die Zeitkonstante RC des Detektorkreises wesentlich größer als die zur Sammlung aller beim Durchgang eines Teilchens entstehender Ionenpaare benötigte Zeit, so ergibt sich ein Spannungspuls der Größe

$$V = \frac{Q}{C}. \quad (15.33)$$

Darin ist Q die gesamte gesammelte Ladung. Dieser Spannungsimpuls läuft innerhalb von einigen $10 \mu\text{s}$ auf seinen Maximalwert V . Ein derartig langer Impuls macht die Unterscheidung schnell aufeinanderfolgender Spannungspulse schwierig. Daher macht man die Zeitkonstante des Detektorkreises kleiner, so dass sich ein zwar niedrigerer, dafür aber auch wesentlich schmalerer Spannungsimpuls ergibt. So können auch relativ schnell aufeinanderfolgende Pulse getrennt werden.

Das Ausgangssignal eines Gaszählers hängt von der angelegten Spannung ab, mit der die Ionenpaare aufgesammelt werden. Man unterscheidet die Bereiche Ionisationskammer, Proportionalzähler und Geiger-Zähler.

Im Bereich relativ kleiner Spannungen²¹ ist die Zahl der an der Anode gesammelten Elektronen gleich der Zahl der vom einfallenden Teilchen erzeugten Ionenpaare. Die Höhe des Ausgangsimpulses hängt daher nicht von der angelegten Spannung ab sondern nur von den Eigenschaften des einfallenden Teilchens, nämlich der Zahl der von ihm erzeugten Ionisationen.

In der Ionisationskammer lässt sich zwischen α - und β -Teilchen unterscheiden: ein α -Teilchen erzeugt in einer Ionisationskammer ungefähr 10^5 Ionenpaare, entsprechend einer Ladungsmenge von $1.6 \cdot 10^{-14} \text{C}$. Mit einer Kapazität von 10 pF ergibt sich ein Spannungspuls von $1.6 \cdot 10^{-3} \text{V}$. Ein β -Teilchen produziert aufgrund seines wesentlich kleineren LET (vgl. Abb. 15.13) nur ca. 1000 Ionenpaare, entsprechend einem Spannungsimpuls von $1.6 \cdot 10^{-5} \text{V}$. Setzt man eine Schwelle fest (Diskriminator), die nur Pulse oberhalb einer bestimmten Spannung zählt, so lässt sich zwischen α - und β -Strahlung unterscheiden.

Ein Nachteil der Ionisationskammer sind die relativ kleinen Ausgangsimpulse, die entweder eine recht große Verstärkung oder eine große Empfindlichkeit des Diskriminators erforderlich machen. Im Proportionalzähler verwendet man höhere Spannungen als bei der Ionisationskammer, so dass sich ein Gasverstärkungsfaktor größer 1 ergibt, da durch Stöße Sekundärelektronen²² erzeugt werden. Die Spannung ist so zu wählen, dass eine Vervielfachung der Ionen (Lawineneffekt) nur in der Nähe der Primärionisation stattfindet und sich nicht entlang der Kathode ausbreitet. Der Proportionalzähler erlaubt eine Unterscheidung zwischen α - und β -Strahlung.

Bei sehr hohen Spannungen geht der Gaszähler in den Zustand eines Geiger-Zählers, wobei eine Unterscheidung zwischen α - und β -Strahlung nicht mehr möglich ist. Hier werden Elektronen und Ionen so stark beschleunigt, dass Elektronen große Zahlen von Sekundärelektronen erzeugen und Ionen einen Lawineneffekt über den gesamten Zähler auslösen. Dadurch ist die Größe des Spannungsimpulses unabhängig von der Art des einfallenden Teilchens. Allerdings haben die hohen Ausgangsimpulse (ca. 1/4 V) den Vorteil, dass keine weitere Verstärkung des Ausgangssignals benötigt wird. Der Geiger-Zähler hat, ebenso wie der Proportionalzähler, einen Betriebsbereich, in dem die Zählrate nahezu unabhängig von der angelegten Betriebsspannung ist.

15.6.2 Dosimeter

Dosimeter dienen dazu, ein zeitliches Integral der Bestrahlung festzustellen. Sie werden zur Überwachung der Strahlenschutzbestimmungen eingesetzt, die Anforderungen sind wesentlich geringer als an die bisher besprochenen Instrumente zur Messung und zum Nachweis energiereicher Strahlung.

Das Füllhalterdosimeter arbeitet nach dem Prinzip der Ionisationskammer: energiereiche Strahlung ionisiert die Luft zwischen zwei Kondensatorplatten, die Abnahme der Spannung am Kondensator ist proportional der Gesamtdosis. Nachweisen lassen sich γ -Strahlung und β -Strahlung mit hoher Energie, α -Teilchen bleiben in der Wandung stecken.

Füllhalterdosimeter sind für die eigene Kontrolle geeignet, da sie jederzeit abgelesen werden können. Im Strahlenschutz sind sie jedoch nicht zulässig, da sie zu unzuverlässig sind (Entladung des Kondensators, Empfindlichkeit gegen Stoß, Temperatur und Feuchte).

In der Personendosimetrie hauptsächlich eingesetzt wird das Filmdosimeter²³ (Filmpla-

²¹Kleine Spannung bedeutet hier, dass die Spannung zwar groß genug ist, um alle ionisierten Teilchen an die Elektroden zu ziehen, aber andererseits nicht so groß ist, dass die Ionen nennenswert beschleunigt werden und in den Elektroden Sekundäreffekte machen. Aufgrund der fehlenden Sekundäreffekte werden nur die primär erzeugten Elektronen und Ionen gezählt, der Gasverstärkungsfaktor beträgt 1.

²²Die Zahl der Elektronen an der Anode ist es, die das Ausgangssignal bestimmen. Die Ionen werden nur abgesaugt, ihr Signal wird jedoch nicht ausgewertet.

²³Auch historisch ist der Nachweis energiereicher Strahlung mit Hilfe eines Films eine der ältesten Methoden. Röntgen selbst benutzte sowohl Fluoreszenz-Schirme als auch Photoemulsionen zum Nachweis der nach ihm benannten Strahlung.

Quelle	mSv/a	mSv/a	mSv/a
Natürliche Strahlenbelastung			2.5
kosmische Strahlung in Meereshöhe		0.3	
terrestrische Strahlung von außen		0.5	
durch Aufenthalt im Freien	0.43		
bei dauerndem Aufenthalt in Häusern	0.57		
inkorporierte radioaktive Stoffe		0.3	
Inhalation von Radon-Folgeprodukten		1.3	
Künstliche Strahlenbelastung			1.5
Anwendung energiereicher Strahlung in der Medizin		1.4	
Röntgendiagnostik	1.3		
Nuklearmedizin	0.07		
Strahlentherapie	<0.03		
Fallout von Atombombenversuchen		<0.01	
Gebrauchsgüter, Forschung, Technik		< 0.03	
technische Strahlenquellen	< 0.01		
Industrieprodukte	< 0.01		
Störstrahler (Fernsehen)	< 0.01		
beruflich strahlenexponierte Personen		< 0.01	
friedliche Nutzung der Kernenergie		< 0.01	
Effektive Dosis			4

Tabelle 15.10: Strahlenexposition in der BRD, aufgeschlüsselt nach natürlichen und künstlichen Quellen [33]. Glaser [16] gibt als Belastung aufgrund von Tschernobyl eine Äquivalentdosis von 0.02 mSv/a.

kette). Es ist empfindlich für Röntgen- und γ -Strahlung zwischen 5 keV und 40 MeV und β -Strahlen oberhalb 300 keV. Durch die Verwendung von Filtern unterschiedlicher Dicke lässt sich eine gewisse Richtungsabhängigkeit feststellen sowie eine Energieabhängigkeit.

Die Filmplakette hat aber auch zwei Nachteile: (a) das Auswertverfahren (Filmentwicklung) ist umständlich und erlaubt kein direktes Ablesen, und (b) im unteren Messbereich sind die Fehler relativ groß, so dass bei gleichmäßiger Verteilung die halbe Jahresdosis (1.2 mSv) unerkant aufgenommen werden könnte.

15.7 Strahlenbelastung

Energereiche Strahlung kann natürlich oder künstlich sein. Natürliche energiereiche Strahlung findet sich in Form von α -, β -, γ - und n -Strahlung beim Zerfall instabiler Isotope und in der kosmischen Höhenstrahlung. Die resultierende Strahlenexposition wird als *natürliche Strahlenexposition* bezeichnet. Ihre Größe richtet sich nach dem Aufenthaltsort (Höhenstrahlung in Meereshöhe geringer als in größeren Höhen; terrestrische Strahlung hängt vom Untergrundgestein ab²⁴ und ist im Freien geringer als in Häusern) und nach den Lebensumständen und -gewohnheiten (radioaktive Substanzen können mit Nahrung oder Atemluft aufgenommen

²⁴Die terrestrische Strahlung im Freien kann in Abhängigkeit vom Untergrundgestein sehr unterschiedlich sein. Sie beträgt in der BRD im Mittel 0.4 mSv/a mit einem Maximalwert von 2.0 mSv/a (Boden im wesentlichen Kalk, Sand, Ton). In Kenia dagegen (Granit, Gneis) beträgt sie im Mittel 3.5 mSv/a, der Maximalwert kann 14 mSv/a erreichen.

werden). Den größten Einzelposten an der natürlichen Strahlenbelastung hat die Aufnahme von Radon durch die Atemluft.

Die *künstliche Strahlenbelastung* stammt hauptsächlich aus der medizinischen Anwendung ionisierender Strahlung, wobei der größte Anteil durch die Röntgendiagnostik entsteht: von den 1.5 mSv/a²⁵ der künstlichen Strahlenbelastung entfallen 1.3 mSv/a auf die Röntgendiagnostik, vgl. Tabelle 15.10. Bei den Werten für die medizinische Diagnostik handelt es sich um über die Gesamtbevölkerung gemittelte Werte, d.h. für die einzelnen Individuen können sehr unterschiedliche Belastungen auftreten. So kommt es in der Strahlentherapie zu Belastungen bis zu etlichen Gy (z.B. Abtötung der Stammzellen vor einer Knochenmarkstransplantation, Strahlentherapie). Da aber nur wenige Menschen so behandelt werden, ergibt sich für die Gesamtbevölkerung ein relativ geringer Mittelwert von 0.03 mSv/a. Ähnliches gilt - in geringerer Ausprägung -, auch für die Röntgendiagnostik: bei der Mammographie, einer häufig vorgenommenen Untersuchung, treten Belastungen von ca. 20 mSv auf, bei einem CT des Kopfes von 10 - 20 mSv.

Die künstlichen Strahlenbelastung zeigt, ebenso wie die natürliche, große lokale bzw. nationale Unterschiede. So ergibt sich für die USA eine mittlere Strahlenbelastung, die zu 82% aus natürlichen Quellen stammt (gegenüber 62% in der BRD). Umgekehrt entstehen nur 11% der Strahlenbelastung durch Röntgendiagnostik, verglichen mit 33% in der BRD. Der Unterschied erklärt sich dadurch, dass die BRD der Spitzenreiter in Röntgenuntersuchungen ist, verbunden mit einem gewissen Risiko in Folge dieser Untersuchungen an Krebs zu erkranken [10].

15.8 Biologische Wirkung ionisierender Strahlung

Als physikalische Grundprozesse bei der Wechselwirkung energiereicher Strahlung mit Materie haben wir Ionisation und Anregung kennen gelernt. Während wir uns bisher auf die atomare Ebene beschränkt haben, sollen hier die Folgen der Wechselwirkungsprozesse auf zunehmend höheren Ebenen betrachtet werden: chemische Veränderungen auf molekularer Ebene (d.h. das Aufbrechen chemischer Bindungen), Veränderungen der Erbinformation auf zellulärer Ebene und Strahlenschäden auf der Ebene des lebenden Organismus. Um diese Einteilung in verschiedene Ebene zu verstehen, ist es sinnvoll, sich zuerst mit der Struktur biologischer Materie und dem zeitlichen Ablauf der biologischen Wirkung ionisierender Strahlung auseinanderzusetzen.

15.8.1 Zeitlicher Ablauf der Strahlenwirkung

Die energiereiche Strahlung tritt in Wechselwirkung mit der durchstrahlten Materie. Sie überträgt Energie auf die Atome, sie ionisiert Atome und Moleküle, und kann damit insbesondere in komplizierten Molekülen und schließlich auch in Zellen zu weitreichenden Folgen führen. Vier charakteristische Phasen können unterschieden werden:

- In der *physikalischen Phase* ist der Primärvorgang die Dosisabsorption. Sie bewirkt Ionisation, Anregung und Erwärmung. Dies erfolgt auf Zeitskalen zwischen 10^{-18} und 10^{-14} s. Die Anregung/Ionisation erfolgt in einem biologisch wichtigen Molekül selbst oder in dessen unmittelbarer Umgebung, z.B. dem Wasser.
- *Physikalisch-chemische Phase*: Die Energieabsorption kann Primärschäden im Molekül (direkte Strahlenwirkung) oder die Bildung von Radikalen, vorwiegend Wasserradikale, bewirken. Diese Radikale können ihrerseits das Molekül schädigen (indirekte Strahlenwirkung). Diese Vorgänge laufen auf Zeitskalen von 10^{-14} bis 10^{-6} s ab.

²⁵Die Einheiten zur Strahlungsmessung werden in Kapitel 7 - Dosimetrie - besprochen. Das Sievert Sv beschreibt die Energieabgabe der ionisierenden Strahlung pro kg Gewebe, gewichtet mit einem Gütefaktor (relative biologische Wirksamkeit), der die biologische Schädigung charakterisiert. Die Größe, die zu der Einheit Sievert gehört, ist die *Äquivalentdosis*. Mit der Einheit Gy wird die Energiedosis angegeben, die relative biologische Wirksamkeit der verschiedenen Strahlenarten ist nicht berücksichtigt.

- Die *biochemische Phase* umfasst eine Vielzahl chemischer und bio-chemischer Folgeprozesse: Oxidation, Reduktion, Decarboxylierungen, Hydroxylierungen etc. Die Folge dieser Prozesse sind Veränderungen am organischen Molekül. Die Vorgänge laufen auf Zeitskalen von 10^{-6} bis 10^{-2} s ab.
- In der *biologischen Phase* machen sich die Auswirkungen der einzelnen physikalischen und chemischen Prozesse morphologisch bemerkbar und zeigen sich in den Vitalfunktionen des Organismus durch Ausfälle wie Stoffwechselveränderungen, Mutationen und submikroskopische Schäden, Zelltod²⁶, Kanzerogenese bis hin zum Tod des Organismus. Dies kann innerhalb von Sekunden eintreten (akuter Strahlenschaden), aber auch Minuten, Tage, Jahre oder sogar Jahrhunderte²⁷ dauern.

15.8.2 Strahlenempfindlichkeit und Zellzyklus

Die Zellteilungsvorgänge in einem Kollektiv von Zellen, z.B. in einem Organ oder einem Tumor, verlaufen asynchron, d.h. die proliferierenden Zellen befinden sich zufällig über den gesamten Generationszyklus verteilt. Ein Teil der Zellen macht Mitose, ein anderer Teil die G_1 -Phase, wieder ein anderer Teil die S -Phase durch. Als *Wachstumsfraktion* bezeichnet man dabei diejenigen Zellen, die sich nicht in der G_0 -Phase²⁸ befinden. Von allen Phasen dauert die S -Phase am längsten, die Mitose ist am kürzesten. Die Länge der G_1 -Phase variiert für verschiedene Gewebe beträchtlich, auf ihr Konto gehen die unterschiedlichen Zellebensdauern und damit auch die unterschiedliche Strahlenempfindlichkeit verschiedener Zellarten.

Innerhalb dieses Zyklus zeigen die einzelnen Zellen eine unterschiedliche Strahlenempfindlichkeit. Befindet sich die Zelle in Ruhe, so ist ihre Strahlenempfindlichkeit relativ gering. Am strahlenempfindlichsten sind Zellen, die sich direkt innerhalb der Teilung befinden (Mitose) bzw. solche, in denen die Teilung vorbereitet wird, d.h. Zellen, die sich in der Synthese- oder Zwischenphase befinden. In diesen Phasen liegt die DNS nicht als dichtgepackter dauerhafter Doppelstrang vor, sondern als Einzelstränge, die kopiert und reorganisiert werden. Daher ist eine Reparatur nicht bzw. nicht korrekt möglich.

Die Strahlenempfindlichkeit von Zellen wird durch die Dosis-Effektkurven dargestellt, die durch die Bestrahlung von Zellkulturen bestimmt werden.

Physikalisch-Chemische Strahlenwirkung

Bei der physikalisch-chemischen Strahlenwirkung unterscheidet man zwischen direkter und indirekter Strahlenwirkung.

²⁶Zelltod ist - solange er individuelle Zellen betrifft und nicht große Funktionsbereiche - der wesentlich harmlosere Strahlenschaden als eine Mutation, die zur Kanzerogenese führt. Die einzelnen Zellen können vom Körper relativ leicht ersetzt werden, eine entartete Zelle dagegen kann kaum wieder aus dem Organismus entfernt werden. Flapsige Merkregel: nur eine tote Zelle ist auch eine gute Zelle.

²⁷Im Hinblick auf die Lebensspanne eines Menschen erscheint es etwas widersinnig über Zeitskalen von Jahrhunderten zu diskutieren. Aber genau an dieser Stelle zeigt sich eines der generellen Merkmale entarteter Zellen: zwischen der Schädigung und dem Ausbruch einer Krebserkrankung können Jahrzehnte liegen. Dies hat drei Konsequenzen: (a) es ist kaum möglich, einen kausalen Zusammenhang zwischen einer (Strahlen)Schädigung und einer Tumorerkrankung herzustellen, (b) die Rate der Tumorerkrankungen steigt mit dem Lebensalter T wie T^4 [30], so dass sich mit der steigenden Lebenserwartung eine immer größere Zahl typischer 'Alterstumore' zeigt, und (c) ein 'erfolgreich' behandelter Tumor kann bereits mit einer einzelnen entwichenen entarteten Zelle den Kern zu Metastasen gelegt haben, die erst nach Jahren oder Jahrzehnten erkennbar (und biologisch bedeutsam) werden.

Ein Strahlenschaden kann aber auch erst in der folgenden Generation manifest werden: während Körperzellen auf das Individuum beschränkt sind und letztendlich mit diesen Aussterben, besteht bei Schädigungen in den Keimzellen die Möglichkeit, diese Schäden auf die folgende Generation zu vererben, so dass eine Strahlenschädigung nicht am geschädigten Individuum sondern an dessen Nachfahren klinisch manifest wird. Deutlich wurde dies an den Kindern der Hiroshima- und Nagasaki-Opfer; auch bei nach dem Reaktorunfall in der Umgebung von Tschernobyl geborenen Kindern zeigen sich heute erhöhte Raten für Missbildungen und Tumorerkrankungen.

²⁸Die G_0 -Phase ist eine Wartephase, in der die Zellen nicht aktiv am Zellzyklus teilnehmen. Diese Phase ist relativ strahlenresistent.

Die Absorption der Strahlungsenergie kann direkt in den einzelnen Biomolekülen, insbesondere in der DNS, erfolgen. Dabei werden ein oder mehrere Bindungselektronen aus einem organischen Molekül herausgeschossen. Dadurch zerbricht das Molekül und verliert seine biologische Funktion. Bei diesem Vorgang spricht man auch von Treffern. Es gibt Ein- oder Mehrtrefferprozesse. Je höher die Strahlendosis, um so mehr Treffer entstehen und um so größer ist die Wahrscheinlichkeit für *Mehrtrefferprozesse* (s.u.). Die bedeutsamsten Veränderungen sind Einzel- und Doppelstrangbrüche der DNS. Man schätzt, dass eine Dosis von 1 - 2 Gy zu etwa 1 000 Einzelstrangbrüchen und etwas 40 Doppelstrangbrüchen führt [34].

Die indirekte Strahlenwirkung wird durch die Begriffe 'indirekte Strahlenchemie' und 'Strahlenchemie des Wassers' beschrieben. Da Wasser der Hauptbestandteil des Organismus und der Zelle ist, ist die Ionisation von Wassermolekülen die häufigste Strahlenwirkung. Die organischen Moleküle werden größtenteils indirekt über Bildung von Wasserradikalen ionisiert und verändert. Die beiden Hauptprozesse sind Anregung und Ionisation von Wasser.

Bei der Ionisation zerfällt das Wassermolekül in das Radikal H_2O^+ und ein Elektron e^- . Beide Reaktionsprodukte reagieren sofort mit dem im Überschuss vorhandenen Wasser, wobei sich OH- und H-Radikale bilden. Freiwerdende Elektronen umgeben sich sofort mit einer Wasserhülle, d.h. sie werden hydratisiert. Die zur Ionisation erforderliche Energie beträgt 12.56 eV.

Bei der Anregung zerfällt das Wassermolekül ebenfalls in die beiden Radikale H und OH. Diese Radikale können weiter mit der Zelle reagieren, wobei sie sich durch Rekombination teilweise neutralisieren können. Unter Sauerstoffsättigung können auch Sauerstoffradikale und Peroxyde entstehen.

Radikale und Peroxyde sind Zellgifte. Radikale können mit organischen Makromolekülen reagieren. Dabei werden lockere Elektronenbindungen aufgebrochen. Dies führt zu Strukturveränderungen der Moleküle und zu Einzelstrangbrüchen der DNS. Jede Substanz, die im Laborversuch der Lösung eines Biomoleküls zugesetzt die Radikale auffangen kann, erweist sich als Schutzsubstanz. Auch in vivo wirken Moleküle, die bevorzugt mit freien Radikalen reagieren, als Radikalfänger und damit als Schutzsubstanzen.

Biochemische Strahlenwirkung

Durch die direkte oder indirekte Wirkung ionisierender Strahlung kann es zu einer Vielzahl von Schädigungen der DNS oder anderer Biomoleküle bzw. Zellbausteine kommen. Die wichtigsten Schäden sind die an der DNS, da diese von einer Zelle an alle folgenden Generation weitergegeben wird, während Schäden in anderen Biomolekülen auf die Zelle beschränkt bleiben.

Die Nukleotid-Ketten können durch die Spaltung einer Phosphat-Ester-Bindung oder eine Zerstörung der Desoxyribose zerbrechen. Von *Einzelstrangbrüchen* spricht man, wenn nur eine Kette oder eine Sprosse gebrochen ist. Liegen zwei oder mehr Brüche nahe beieinander, so werden die Bruchstücke getrennt, es handelt sich um einen *Doppelstrangbruch*.

Die Dosisabhängigkeit für diese beiden Formen von Brüchen ist unterschiedlich: **die Zahl von Einzelstrangbrüchen nimmt mit dem Quadrat der Dosis zu, die Zahl der Doppelstrangbrüche dagegen steigt linear mit der Dosis.** Bei locker ionisierender Strahlung²⁹ ist das Verhältnis von Einzel- zu Doppelstrangbrüchen ungefähr 20:1. Dicht ionisierender Strahlung verursacht eine deutlich größere Zahl von Doppelstrangbrüchen.

Direkte Treffer können Radikale der Basen Thymin oder Guanin induzieren. Bei indirekter Strahlenwirkung schädigen OH-Radikale und e^-_{aq} das DNS-Thymin, OH-Radikale verändern auch das DNS-Guanin. Die Strahlenempfindlichkeit der Basen nimmt ab in der Reihenfolge: Thymin - Cytosin - Adenin - Guanin.

Vernetzungen der DNS-Ketten können nur bei sehr hohen Strahlendosen auftreten. Hauptsächlich entstehen dabei Verbindungen zwischen Thymin und Thymin oder Cytosin und Cytosin. Dies

²⁹Locker ionisierende Strahlung bedeutet, dass der Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ionisation entlang der Teilchenbahn relativ groß ist; die Ionisationen folgen locker aufeinander. Locker ionisierende Strahlung hat daher einen kleinen linearen Energietransfer LET und somit eine geringe relative biologische Wirksamkeit, vgl. Abb. 15.14.

kann in Mikroorganismen zu einer Blockierung der DNS-Synthese führen. Ob dieser Effekt auch in Säugetieren auftritt, ist ungeklärt.

Reparaturvorgänge

Schäden an der DNS können - zumindest in einem gewissen Rahmen - wieder repariert werden. Verantwortlich ist dafür wieder die geniale Konstruktion der komplementären Basen, die auch für die Replikation der DNS von entscheidender Bedeutung ist. Dadurch lassen sich Einzelstrangbrüche fast immer wieder reparieren. Bei Doppelstrangbrüchen dagegen ist die Reparatur riskanter, häufig ist das Resultat nicht eine Wiederherstellung des Ursprungszustandes sondern eine *Mutation*³⁰.

Ein Einzelstrangbruch kann auf verschiedene Weisen repariert werden. Die einfachsten Brüche können durch einen einzigen enzymatischen Schritt wiederhergestellt werden (Poly-Nukleotid-Ligase).

Komplizierte Einzelstrangbrüche oder Basenschäden erfordern zur Heilung ein System von aufeinander abgestimmten Schritten, an denen unterschiedliche Enzyme beteiligt sind. Gängigste Vorstellung ist die *Exzisions-Repair (Cut-and-Catch Modell)*. Der Vorgang läuft in vier Stufen ab:

1. die Endonuklease schneidet das schadhafte Stück heraus.
2. die Exonuklease baut die Randbezirke teilweise ab.
3. die DNS-Polymerase synthetisiert nach dem Muster des Komplementärstranges das fehlende Teilstück der gestörten Kette und stellt so die ursprüngliche Basensequenz wieder her.
4. die Ligase verbindet das neue Stück mit dem verbliebenen Strang.

Diese Reparaturmechanismen laufen z.T. sehr schnell ab. Sind sie bis zur nächsten Zellteilung nicht beendet, so werden die Schäden als Mutation an die Tochterzelle weitergegeben. Die meisten Reparaturgänge sind innerhalb von 2 Stunden beendet, um alle möglichen Reparaturen bei komplexeren Schädigungen innerhalb einer Zelle zu bewältigen, werden jedoch mindestens sechs bis acht Stunden benötigt³¹.

Deutlich wird die Reparatur, wenn man z.B. Zellkulturen statt in einer Sitzung in zwei oder mehreren Sitzungen (fraktioniert) bei gleicher Gesamtdosis bestrahlt: es überleben mehr Zellen, da sich ein Teil der Zellen im Bestrahlungsintervall vom subletalen Schaden erholen kann (Elkind-Erholung). Untersucht man die Überlebensrate einer Zellkultur zu unterschiedlichen Zeitpunkten nach einer Strahlenexposition, so wird deutlich, dass sich mit zunehmendem zeitlichen Intervall ein größerer Zellanteil wieder erholt hat. Man spricht von einem potentiell letalen Schaden, der vor allem von Zellen, die sich nicht in der Wachstumsphase befinden, repariert werden kann.

Schäden in anderen Bereichen der Zelle

Schäden in anderen Bereichen der Zelle können zwar für die individuelle Zelle fatal sein, sie haben jedoch den Schaden an der DNS gegenüber den Vorteil, dass sie nicht an die folgenden Generationen weitergegeben werden können.

³⁰Eine Mutation ist eine bleibende Veränderung genetischen Materials. Punktmutationen entstehen durch Austausch, Verlust oder Einschub eines Basenpaares. Chromosomenmutationen entstehen durch Veränderung der Chromosomenstruktur, bei denen ganze Abschnitte von Chromosomen verloren gehen oder vertauscht werden.

³¹Die Zeitskalen der Reparaturvorgänge sind an zwei Stellen von Bedeutung: (a) bei der Ausbildung von Mutationen in bestimmten Zelltypen, vgl. Strahlenempfindlichkeit der unterschiedlichen Gewebe und die Abhängigkeit von der Lebensdauer der Zelle, und (b) bei der zeitlichen Verteilung der Strahlung in der Strahlentherapie (Fraktionierung).

Strahlenschäden an der Zellmembran führen zu einer Veränderung der Permeabilität (Durchlässigkeit). Diese Veränderungen werden durch Schäden an den Membranbausteinen (Lipide, Proteine) und durch Veränderungen der Membranpotentiale hervorgerufen. Die gestörten Stoffaustauschvorgänge durch die Zellmembran beeinträchtigen den Stoffwechsel der gesamten Zelle, stören den Wasserhaushalt und die Funktion der Organellen im Zytoplasma. Insgesamt bleibt eine in ihren Vitalfunktionen eingeschränkte Zelle zurück.

Die wichtigste Strahlenwirkung im Zytoplasma besteht in einer Änderung der Viskosität. Diese entsteht in erster Linie durch Eiweiß-Denaturierung, weiterhin durch Fettablagerungen und durch Bildung von Vakuolen. Die Strahlenschädigung der Enzyme der Atmungskette in den Mitochondrien beeinträchtigt den Energiestoffwechsel direkt. Strahlenschäden der Ribosomen des endoplasmatischen Retikulums führen zu Störungen der Protein-Synthese. Die Fettsäure-Synthese wird durch Strahlenbeeinflussung teilweise erhöht, was im weiteren zur Organverfettung führen kann. Die Stufen des Kohlehydrat-Stoffwechsels dagegen sind weitgehend strahlenresistent.

Biologische Strahlenwirkung

Eine Bestrahlung kann nach Ablauf der bisher beschriebenen physikalischen, physikalisch-chemischen und bio-chemischen Prozesse verschiedene Konsequenzen haben. Als wichtigste sind zu nennen:

- die Zelle gleicht den Strahlenschaden aus (Reparaturmechanismus), überlebt die Bestrahlung und kann sich weiterhin teilen und fortpflanzen. In diesem Fall tritt kein dauerhafter Schaden auf.
- Die Zelle überlebt die Bestrahlung und teilt sich weiter. Die Reparaturmechanismen waren jedoch nicht gut oder schnell genug, so dass es zu Veränderungen im genetischen Material der Zelle (Mutation) gekommen ist. Die Zelle hat dann andere Eigenschaften als vor der Bestrahlung. Beispiele sind die Auslösung von Tumoren oder Erbkrankheiten bei Bestrahlung.
- Die Zelle stirbt innerhalb weniger Stunden nach der Bestrahlung ab (z.B. durch einen der schon bei den bio-chemischen Auswirkungen beschriebenen Prozess) und erreicht die nächste Mitose nicht mehr. Einen solchen *Interphase-Tod* kann man z.B. bei Lymphozyten beobachten, die besonders strahlenempfindlich sind. Ursache des Interphase-Todes scheint jedoch weniger die direkte Strahlenwirkung zu sein (bei anderen Körperzellen würden hierzu Dosen oberhalb 100 Gy benötigt) als vielmehr der programmierte Zelltod (Apoptose), der u.a. über p53, ein Tumorsuppressorgen (s.u.), vermittelt wird.
- Die Zelle überlebt zwar die Bestrahlung und ist auch noch zu einer oder mehreren Zellteilungen fähig, stirbt dann aber im Laufe der Zeit ab. Dieses Phänomen bezeichnet man als *reproduktiven Zelltod*. Er ist u.a. dafür verantwortlich, dass ein Tumor während der Bestrahlung nicht sofort schrumpft sondern u.U. weiter wächst und sich erst später, oftmals nach vielen Wochen, zurückbildet.

Den Zusammenhang zwischen der Strahlendosis und den oben beschriebenen Prozessen kann man in Zellkulturen (in vitro) oder an lebenden Organismen (in vivo) untersuchen. Dabei erhält man *Überlebenskurven*, die sogenannten *Dosis-Effekt-Kurven*.

15.8.3 Strahlenempfindlichkeit und Gewebetypus

Die Strahlenempfindlichkeit der einzelnen Gewebe ist sehr unterschiedlich. Sie ist einerseits bestimmt von der Fähigkeit zur Reparatur des Schadens vor der nächsten Zellteilung und andererseits durch das Risiko des Gewebes während der Zellteilung einen Strahlenschaden zu erleiden. Als Faustregel gilt daher: schnell sich teilende Zellen haben ein höheres Risiko als die sich langsam teilenden. Tabelle 15.11 gibt die Strahlenempfindlichkeit verschiedener Gewebetypen.

Blutkörperchen	hohe Strahlenempfindlichkeit
Spermien, Eizellen	↓
Haarfollikel	↓
Speicheldrüsen	↓
Talg- und Schweißdrüsen	↓
Magen	↓
Knorpelzellen	↓
Nebeniere	↓
Schilddrüse	↓
Leber	↓
Niere	↓
Bindegewebe	↓
Knorpelgewebe	↓
Muskelzellen	↓
Nervenzellen	geringe Strahlenempfindlichkeit

Tabelle 15.11: Empfindlichkeit der Körperzellen gegenüber Strahlenschäden, nach [32].

15.9 Anwendungen energiereicher Strahlung in der Medizin

In diesem Kapitel werden Verfahren vorgestellt, in denen mit Hilfe energiereicher Strahlung zwei- oder dreidimensionale Abbildungen erzeugt werden. Klassische Abbildungsverfahren beschränken sich auf die Darstellung von Strukturen (Anatomie). Moderne Verfahren erlauben zusätzlich die Untersuchung der Funktion verschiedener Bereiche des Gehirns oder der Funktion von Organen. Diese Verfahren basieren auf nuklearmedizinischen Methoden.

‘Bildgebende Verfahren in der Medizin’ heißt nicht nur Röntgenaufnahmen (mittleres Teilbild in Abb. 15.15). Geht man von der Anatomie zum Studium von Funktionen, so werden zunehmend Verfahren eingesetzt, bei denen die Strahlung im Patienten entsteht (PET, SPECT, MRI; vgl. unteres Teilbild in Abb. 15.15). Alle diese Verfahren existieren nebeneinander: sie stehen nicht in Konkurrenz sondern sie bieten, da die ihnen zugrundeliegenden Wechselwirkungen zwischen Strahlung und Gewebe verschieden sind, unterschiedliche Möglichkeiten und sind mit unterschiedlichen Belastungen für den Patienten verbunden.

Die Anwendung bildgebender Verfahren in der Medizin hat sich in den vergangenen Jahrzehnten grundlegend gewandelt. Waren Röntgenaufnahmen ein rein diagnostisches Hilfsmittel³² (z.B. Knochenbrüche, Kugeln oder Metallsplitter im Körper, einige feste Tumore), so werden sie heute aufgrund ihres deutlich verbesserten Auflösungsvermögens (es lassen sich sowohl kleinere Details erkennen als auch verschiedene Organe unterscheiden) und der drei-dimensionalen Darstellungsmöglichkeiten verstärkt auch in der Therapieplanung und -überwachung eingesetzt. Verfahren, die eine Beobachtung der Funktion erlauben (PET, SPECT), finden zudem in Neuropsychologie und -physiologie Anwendungsmöglichkeiten zum Studium der Hirnfunktionen. Beispiele finden sich in [9] (Anatomie) und [41] (Funktion).

15.9.1 Röntgendiagnostik

Konventionelle Röntgenaufnahmen sind ein Musterbeispiel für Transmissionsaufnahmen: energiereiche Strahlung wird - gleichsam als Probe - durch Gewebe geschickt. Inhomogenitäten im Körper bewirken, dass an einigen Stellen mehr, an anderen weniger Photonen absorbiert werden. In Transmissionsverfahren kann nur Strahlung verwendet werden, die zwei Bedingungen erfüllt:

³²Aufgrund der schlechten räumlichen Auflösung und der geringen Unterschiede im Absorptionsverhalten verschiedener Organe waren sie für anatomische Studien ungeeignet. Hier wurde stets die klassische Methode der Sektion verwendet.

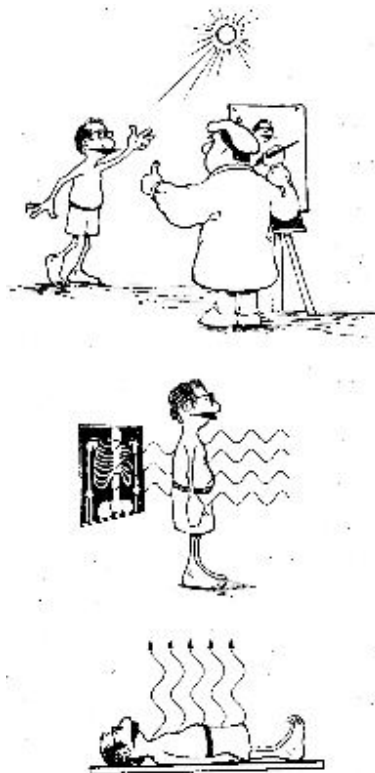


Abbildung 15.15: Verschiedene bildgebende Verfahren entstehen durch Reflektion, Transmission und Emission elektromagnetischer Strahlung [6]. Welche Methoden eingesetzt werden können, hängt von der Photonenenergie ab: Reflektion bei Ultraschall; Transmission bei konventionellen und digitalen Röntgenaufnahmen ebenso wie bei der Computer-Tomographie (CT); Emission bei der Positronen-Emissions-Tomographie (PET), der Einzelphotonen-Emissions-Tomographie (SPECT: single photon emission tomography), der Kernspinnresonanztomographie (MRI: magnetic resonance imaging) und natürlich auch der Thermographie.

1. das Gewebe muss für diese Strahlung teilweise transparent sein, so dass die Strahlung nach Durchdringen des Gewebes aufgezeichnet werden kann. Sichtbares Licht, Infrarot und Ultraschall sind daher nicht geeignet.
2. das Gewebe muss mit der Strahlung wechselwirken, so dass Abschwächungen im Austrittsstrahl auf Eigenschaften des durchstrahlten Gewebes schließen lassen. Neutrinos erfüllen zwar Bedingung (1), jedoch machen sie keine Wechselwirkung im Gewebe und liefern daher keine Informationen über das Körperinnere.

Röntgenaufnahmen werden mit Röntgenröhren mit Beschleunigungsspannungen von 200 bis 300 kV gemacht. Im Bereich von Photonenenergien von einigen 10 bis zu ca. 100 keV³³ weisen die verschiedenen Gewebe im menschlichen Körper die größten Unterschiede auf. Bei höheren Photonenenergie würde alles Gewebe gleichmäßig absorbieren. Wird die Wellenlänge zu groß, so werden die Photonen vollständig innerhalb des Körpers absorbiert. Die den Patienten durchsetzende Strahlung wird auf der Austrittsseite mit einer photographischen Emulsion aufgezeichnet.

Der zeitintegrierte Fluss³⁴ der einfallenden Röntgenstrahlung - und damit indirekt auch die im Patienten absorbierte Dosis - muss so angepasst sein, dass die Zahl der aus dem Körper

³³Die Beschleunigungsspannung gibt die Maximalenergie der Photonen an, die häufigste Energie liegt bei deutlich geringeren Werten.

³⁴Die Intensität bzw. der Fluss der Röntgenstrahlung sind ein Maß für die pro Zeiteinheit einfallenden Photonen. Der zeitintegrierte Fluss dagegen gibt die Gesamtzahl der während der Belichtung auftretenden

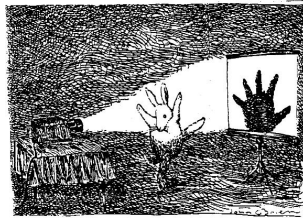


Abbildung 15.16: Konventionelle Röntgenaufnahmen gleichen einem Schattenspiel: sie geben Umrissinterne Strukturen, die jedoch falsch interpretiert werden können.

wieder austretenden Photonen groß genug ist, um auf der Filmplatte eine Schwärzung mit ausreichendem Kontrast zu erzeugen. Die Absorption von Röntgenstrahlen ist am größten für dichtes Gewebe (Muskel stärker als Lunge) und für Gewebe mit hoher Atomzahl (Knochen stärker als Muskel). Auch nimmt die Abschwächung mit zunehmender Photonenenergie ab.

15.9.2 CT

Konventionelle Röntgenaufnahmen gleichen einem Schattenspiel: sie geben Umrissinterne Strukturen, die leicht missinterpretiert werden können (vgl. Abb. 15.16). Die Computertomografie³⁵ (CT) schafft hier Abhilfe: es wird mit einem sehr dünnen und homogenen Röntgenstrahl durch Abtasten eine drei-dimensionale Aufnahme erstellt, die ein hervorragendes räumliches Auflösungsvermögen hat. Sie kann Details in bisher ungekannter Genauigkeit darstellen kann, da die Aufnahmetechnik den Einfluss der Streustrahlung reduziert und die unterschiedlichen Abbildungsmaßstäbe, Kontraste fokussnaher und fokussferner Objekte ausgleicht, und ein besseres Auflösungsvermögen für die Absorptionskoeffizienten hat, so dass im Gegensatz zur konventionellen Röntgenaufnahme auch verschiedene Weichteilgewebe/Organe unterschieden werden können. Letzteres wird allerdings um den Preis einer hohen Strahlenbelastung erkauft (die Zählstatistik muss ja stimmen, um kleine Unterschiede im Absorptionskoeffizienten zu erkennen).

CT wurde 1972 erstmals klinisch verwendet, das Konzept geht jedoch auf eine Arbeit von Radon aus dem Jahre 1917 [43] zurück. Die Verwirklichung dieses Konzeptes musste so lange auf sich warten lassen, da CT wirklich eines Computers bedarf: das Bild liegt nicht nur digitalisiert vor, wie z.B. beim Röntgenscanner, sondern es muss erst errechnet werden, da die Aufnahmetechnik keine aussagefähige konventionelle Abbildung auf Film erlauben würde. Selbst trickreiche Analogverfahren, wie ursprünglich für die Subtraktionsangiographie verwendet, sind bei der Computer-Tomographie nicht möglich.

Die Computer-Tomographie folgt dem Prinzip des Röntgenscanners insofern, als dass der Patient in Schichten zerlegt wird, die einzeln durchstrahlt werden. Während der Röntgenscanner jede Schicht einmal vollständig durchstrahlt, verwendet die Computer-Tomographie innerhalb jeder Schicht ein komplexes Abtastmuster. Abbildung 15.17 gibt einen Überblick über die verschiedenen Abtastverfahren.

Die Unterschiede in den Abtastverfahren liegen in der Bewegung von Röhre und Detektor. Sie haben sich im Laufe der Zeit mit verbesserter Detektortechnik und Datenverarbeitung in der in Abb. 15.17 gegebenen Reihenfolge entwickelt. Die einzelnen Verfahren werden daher als erste (a) bis vierte (d) Generation der Computer-Tomographie bezeichnet.

Bei Verfahren der ersten Generation stehen sich Röntgenquelle und Detektor in festem Abstand auf einem Gantry montiert direkt gegenüber. Verwendet wird ein bleistiftdünnes Strahlbündel. Die Abtastung erfolgt in zwei Richtungen: in jeder Winkelposition können die

Photonen.

³⁵Tomographie ist eine allgemeine Bezeichnung für Schichtbildaufnahmeverfahren. Der Computer hat sich hier in den Namen eingeschlichen, da die Aufnahmetechnik kein direktes Bild liefert wie z.B. bei den Mehrschicht-Aufnahmen in der Nuklearmedizin, sondern das Bild mit relativ rechenintensiven Algorithmen zurückgerechnet werden muss .

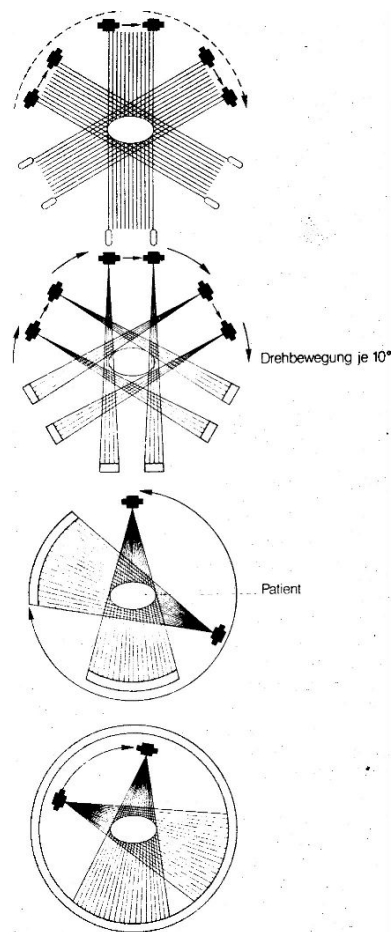


Abbildung 15.17: Abtastverfahren in der Computer-Tomographie. Die Weiterentwicklung der Geräte und der Datenverarbeitung haben zu vier verschiedenen Abtastprinzipien bezüglich der Röhren- und der Detektorbewegung geführt. Man bezeichnet diese Verfahren als erste (a) bis vierte (d) Generation [18].

Röhre und der Detektor in kleinen Schritten (Gesamtschrittzahl 160) linear über den Patienten bewegt werden. Dann wird das Detektorsystem in 1° -Schritten gedreht, so dass eine Abtastung über den gesamten Bereich erfolgt. Insgesamt werden $160 \times 180 = 28\,000$ Messungen der Strahlabschwächung gemacht, aus denen ein Bild von 160×160 -Pixeln erzeugt wird. Geräte der ersten Generation haben den Nachteil einer sehr langen Messzeit: für die 28 000 Messungen jeder einzelnen Schicht werden einige Minuten benötigt, die Gesamtmesszeit ergibt sich durch Multiplikation mit der Zahl der gewünschten Schichten. Tomographen der ersten Generation lassen sich daher nicht auf Körperteile anwenden, die durch Atembewegung beeinflusst werden. Hauptanwendungsgebiet ist Schädel und Gehirn.

Computer-Tomographen der zweiten Generation haben eine deutlich höhere Aufnahme-geschwindigkeit (ca. 10 sek pro Schicht). Hier wird statt eines einzelnen Detektors eine Zeile von bis zu 30 Detektoren verwendet, die gleichzeitig von einem Röntgenstrahlfächer getroffen werden. Die Abtastung erfolgt weiterhin durch eine Kombination aus Translation und Rotation.

Bei Tomographen der dritten und vierten Generation erfolgt die Abtastung nur durch eine Rotationsbewegung. Bei der dritten Generation wird ein Strahlfächer mit einem Öffnungswinkel von 45° verwendet, der auf ein Kreissegment mit bis zu 500 Detektoren fällt. Röntgenröhre und Detektor bewegen sich gemeinsam um den Patienten, der Strahl ist gepulst. In der vierten Generation wird ein vollständiger Ring von Detektoren (meist 1024 oder mehr) ver-



Abbildung 15.18: Anatomische Studien [6]

Isotop *	Energie	Reichweite	Auflösungsvermögen
^{11}C	0.959 MeV	0.28 mm	1.3 mm
^{18}F	0.633 MeV	0.22 mm	1.2 mm
^{68}Ga	1.898 MeV	1.35 mm	2.0 mm

Tabelle 15.12: Einfluss der Positronenreichweite in Gewebe auf das Auflösungsvermögen bei der PET. Das Auflösungsvermögen ist hier für ideale Detektoren in einem Abstand von 50 cm angegeben [52].

wendet, der Strahl ist nicht gepulst. Hier rotiert nur die Röntgenröhre um den Patienten. Tomographen der dritten und vierten Generation haben noch größere Aufnahmegeschwindigkeiten (drei bzw. eine Sekunde pro Schicht). Die hohen Geschwindigkeiten werden mit einer Erhöhung des Streustrahlanteils im Strahlfächer erkauft.

Die größte Herausforderung beim CT ist die Rekonstruktion des Bildes: die Aufnahme liefert die Abschächung des Röntgenstrahls entlang vieler Geraden, gesucht werden jedoch die Abschwächungskoeffizienten (als Maß für den Gewebetyp) für die verschiedenen Volumenelemente. In Gegensatz zur konventionellen Röntgenaufnahme erhalten wir beim CT also kein direktes Bild sondern einen Datensatz, der mit rechnergestützten Verfahren in ein Bild umgewandelt werden muss.

15.9.3 PET und SPECT

Die modernen radiologischen Verfahren, insbesondere die Computer-Tomographie, haben Einblicke in die Anatomie des Körpers gegeben, die man früher nur bei Operationen oder Sektionen erhalten konnte, vgl. Abb. 15.18. Einige Verfahren erlauben außer dem Studium der Strukturen auch eine Untersuchung der Funktionen. Mit PET und SPECT z.B. kann man dem Gehirn soweit bei der Arbeit zu sehen, dass man erkennen kann, welche Teile bei verschiedenen Tätigkeiten aktiv sind. Beispiele hierfür sind in [41] vorgestellt.

Beide Verfahren basieren nicht mehr darauf, dass der Körper von elektromagnetischer Strahlung durchsetzt wird, sondern sie detektieren im Körper erzeugte Strahlung, vgl. unteres Teilbild in Abb. 15.15. Beide Verfahren könnten bei der nuklearmedizinischen Diagnostik ebenso beschrieben werden wie in diesem Kapitel, da sie auf den Grundprinzipien der Nuklearmedizin beruhen: dem Patienten wird eine radioaktive Substanz zugesetzt, die der Körper in seinen Stoffwechsel einbaut. Durch Detektoren kann von außen verfolgt werden, wie sich diese Substanz im Körper verteilt.

Bei der Positronen-Emissions-Tomographie wird ein Radionuklid verabreicht, indexPET das Positronen emittiert. Diese Positronen haben in Gewebe nur eine sehr kurze Reichweite (vgl. Tabelle 15.12) bevor sie mit einem Elektron unter Aussendung zweier nahezu antiparallel fliegender γ -Quanten von 511 keV wechselwirken. Diese Gammaquanten werden durch Szintillationsdetektoren außerhalb des Patienten nachgewiesen.

Z	Isotop	τ
6	Kohlenstoff-11	20.3 min
7	Stickstoff-13	10.0 min
8	Sauerstoff-15	2.1 min
9	Flour-18	110 min
29	Kupfer-64	12.7 h
31	Gallium-68	68 min
33	Arsen-72	26 h
35	Brom-76	16.1 h
37	Rubidium-82	1.3 min
53	Jod-122	3.5 min

Tabelle 15.13: Halbwertzeiten einiger Positronenemitter.

Im unteren Teil von Abb. 15.19 ist das Prinzip der PET dargestellt: die beiden bei der Positronen-Anihilation entstehenden γ -Quanten müssen in einander gegenüberliegenden Detektoren nachgewiesen werden (Koinzidenz-Schaltung). Wird nur eines der γ s detektiert, so wird das Signal nicht verwendet. Einander gegenüberliegende Detektoren lassen sich in einem ringförmigen (Mitte) oder hexagonalen System (oberer Teil in Abb. 15.19) realisieren. Als Szintillatormaterial kann Natrium-Jodid verwendet werden. Um ein gutes räumliches Auflösungsvermögen zu erreichen, muss eine große Zahl von Detektoren verwendet werden, d.h. die einzelnen Detektoren sind relativ klein. Um die Photonen zuverlässig nachweisen zu können, werden daher bevorzugt Detektormaterialien mit hoher Dichte und hoher Atomzahl verwendet. Durchgesetzt haben sich Wismuthgermanat BGO und Bariumfluorid BaF₂.

Das Auflösungsvermögen beim PET ist prinzipiell durch zwei Faktoren begrenzt: (a) die Positronen legen ein kurzes Wegstück zurück bevor sie zerfallen, vgl. Tabelle 15.12. 'Sichtbar' wird daher die Zerfallsort des Positrons, nicht aber sein Emissionsort. (b) Selbst der Zerfallsort des Positrons lässt sich nicht genau bestimmen: die beiden Vernichtungs- γ s fliegen nicht exakt antiparallel auseinander sondern unter einem kleinen Winkel, so dass die Linie, die die beiden getroffenen Detektoren verbindet, nur ungefähr die Achse angibt, entlang derer die Positronenvernichtung erfolgte. Der Vernichtungsort wird auf dieser Linie aus der Laufzeitdifferenzen der beiden Photonen bestimmt.

Tabelle 15.12 gibt als Beispiele für in der Positronen-Emissions-Tomographie verwendete Isotope ¹¹C, ¹⁸F und ⁶⁸Ga an. Andere beim PET verwendete Positronenstrahler sind ¹³N und ¹⁵O. Ebenso wie das ¹¹C lassen sich diese Isotope in eine Vielzahl organischer Moleküle einbauen. So zeigen radioaktiv markierte Glukosemoleküle die Bereiche an, in denen gerade ein erhöhter Energieumsatz stattfindet. Auf diese Weise lassen sich z.B. im Gehirn die Bereiche lokalisieren, die bei bestimmten Tätigkeiten aktiv sind. Je nach verwendetem Isotop ist die Positronen-Emissions-Tomographie in der Lage, alle in der Nuklearmedizin auftretenden Fragestellungen zu untersuchen.

Die in der PET verwendeten Positronemitter haben kurze Halbwertzeiten im Bereich von wenigen Minuten bis zu wenigen 10 min, vgl. Tabelle 15.13. Dadurch können bei niedriger Strahlenbelastung innerhalb relativ kurzer Zeit ausreichend viele Positronen emittiert und detektiert werden, um eine Abbildung mit hoher Auflösung zu liefern (denken Sie dabei immer an die Zählstatistik!). Die kurze Halbwertzeit der Isotope bedeutet auch, dass diese nicht gelagert werden können, sondern erst kurz vor ihrer Anwendung erzeugt werden müssen. Abgesehen von ⁶⁸Ga und ⁸²Ru können die in Tabelle 15.13 gegebenen Isotope nur durch Bombardierung stabiler Isotope mit schnellen leichten Kernen (Protonen, Deuterium- oder Helium-Kerne) erzeugt werden. Da für die Beschleunigung dieser Kerne ein Zyklotron benötigt wird, ist die Positronen-Emissions-Tomographie auf wenige Zentren beschränkt.

Die Single-Photon-Emissions-Computer-Tomographie (SPECT) folgt ähnlichen Prinzipien wie die Positronen-Emissions-Tomographie. Die wesentlichen Unterschiede liegen im verwendeten Isotop und im Nachweis der Strahlung. Während im PET Positronenemitter

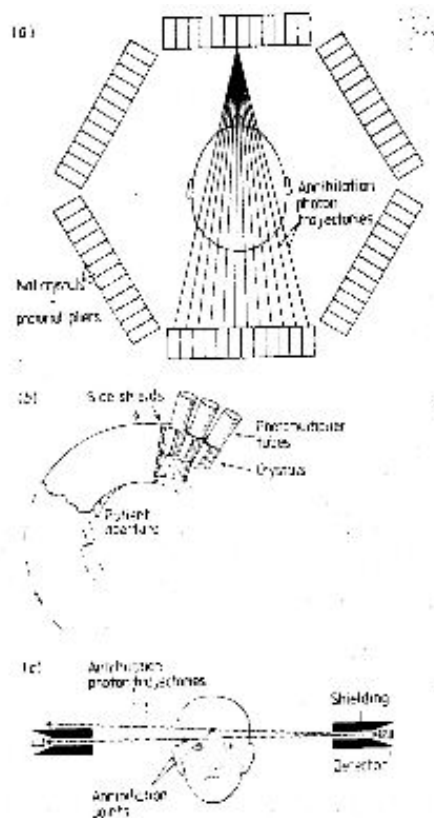


Abbildung 15.19: Konfiguration einer PET-Kamera zur Aufnahme einer Einzelschicht. Im oberen Teil ein hexagonales System aus NaJ-Szintillatoren, in der Mitte ein Ringsystem. Im unteren Teilbild ist ein Schnitt durch beide Systeme dargestellt, der auch das Prinzip des PET verdeutlicht: beide γ -Quanten müssen in gegenüberliegenden Detektoren nachgewiesen werden. Trifft nur eines der γ s den Detektorring, wird das Ereignis verworfen [52].

verwendet werden, werden im SPECT Isotope verwendet, die starke γ -Strahlung aussenden. Diese γ s werden direkt von einer γ -Kamera aufgefangen, die den Körper des Patienten in einer Schnittebene umkreist. Die Auswertung erfolgt, wie bei der Computer-Tomographie, nach dem Verfahren der gefilterten Rückprojektion.

Ebenso wie bei der PET werden auch hier relativ kurzlebige Isotope benötigt, allerdings liegen die Halbwertszeiten eher im Bereich von Stunden als von Minuten, so dass eine beschränkte Lagerung bzw. ein begrenzter Transport der Isotope möglich ist. Außerdem gibt es viele natürliche Gamma-Strahler bzw. Isotope, die sich relativ einfach in einem Generator herstellen lassen. Zusammen mit dem einfacheren Detektorsystem macht dies SPECT zu einem einfacheren und billigeren Verfahren, das eine relativ weite Verbreitung gefunden hat. SPECT ist mit längeren Aufnahmezeiten verbunden als PET, was in Abhängigkeit von den Zeitskalen der zu untersuchenden Phänomene ein Vor- oder ein Nachteil sein kann. Für Untersuchungen von kleinen Funktionsbereichen im Gehirn ist das schnellere PET zu bevorzugen, für Untersuchungen, die mit langsameren Stoffumsatzzeiten (z.B. Speicherdefekte in Organen) verbunden sind, ist dagegen das billigere und einfachere SPECT zu bevorzugen.

15.10 Aufgaben

1. Charakterisieren Sie die verschiedenen Formen radioaktiven Zerfalls.
2. Wenn sich eine radioaktive und eine stabile Substanz chemisch verbinden, ist das Pro-

dukt radioaktiv oder stabil?

3. Was sind die Bestandteile des Atomkerns?
4. Welche Bedeutung haben Neutronen für die Stabilität eines Atomkerns?
5. Was haben Isotope gemeinsam?
6. Warum sind die atomaren Massen viele Elemente keine ganzzahligen Vielfachen des atomaren Masseneinheit?
7. Wie verändert sich die Kernladung eines Atoms beim α -Zerfall?
8. Wie verändert sich die Kernladung eines Atoms beim β -Zerfall?
9. Wie verändert sich die Kernladungszahl eines Atoms, wenn es durch Elektroneneinfang zerfällt?
10. Ein radioaktives Material hat eine Halbwertszeit von 50 Tagen. Wie lange müssen Sie einen bestimmten Atomkern beobachten, wenn Sie ihn beim Zerfall beobachten wollen?
11. Wie lange benötigt ein radioaktives Material bis es vollständig zerfallen ist?
12. Ist es möglich, etwas vollständig gegen γ -Strahlung abzuschirmen?
13. Warum sind radioaktive Substanzen, die α -Strahlung emittieren, innerhalb des Körpers gefährlicher als außerhalb?
14. Warum ist es so schwierig, die Effekte niedriger Dosen radioaktiver Strahlung zu bestimmen?
15. Szintigraphie:
Bei einer Schilddrüsenuntersuchung wird dem Patienten radioaktives ^{123}J verabreicht. Dieses hat eine Halbwertszeit von 13,1 Stunden. Berechnen Sie die Zerfallswahrscheinlichkeit λ . Es werden 10^{18} Atome injiziert, bestimmen Sie wieviele radioaktive Atome nach 1 h, 1 Tag, 1 Woche und 1 Jahr übrig sind. Innerhalb welcher Zeit klingt die Zahl der Atome auf $1/e$ ab?
16. Eine Materialprobe hat eine Aktivität von 20 mCu. Welche Aktivität ergibt sich nach 2 Halbwertszeiten?

Anhang A

Anhang

A.1 Formelzeichen (mit ihren Einheiten)

α	s^{-2}	Winkelbeschleunigung
α		Neigung
β	kg/s	Zähigkeitskoeffizient
γ	$N\ m^2/kg^2$	universelle Gravitationskonstante
η		Zähigkeit
μ_{Haft}		Haftreibungskoeffizient
μ_{Gleit}		Gleitreibungskoeffizient
ω	s^{-1}	Winkelgeschwindigkeit
ω	s^{-1}	Kreisfrequenz
φ		Drehwinkel
ρ	kg/m^3	Dichte
a, \vec{a}	m/s^2	Beschleunigung
A	m^2	Fläche
b	m	Bildweite
c	m/s	Schallgeschwindigkeit
c	m/s	Lichtgeschwindigkeit
c_w		Widerstandsbeiwert
C	F	Kapazität
\vec{e}		Einheitsvektor
$\vec{e}_{\vec{v}}$		Einheitsvektor in Richtung \vec{v}
e	$C = A\ s$	Elementarladung
E	$J = N\ m$	Energie
E_{ges}	J	Gesamtenergie
E_{kin}	J	kinetische Energie
E_{pot}	J	potentielle Energie
$E_{\text{pot, Feder}}$	J	potentielle Energie in einer gespannten Feder
E, \vec{E}	V/m	elektrische Feldstärke
f	m	Brennweite
f	s^{-1}	Frequenz
F, \vec{F}	$N = m\ kg/s^2$	Kraft
F_{Feder}	N	Federkraft
F_g	N	Gewichtskraft
F_{Gleit}	N	Gleitreibungskraft
F_{Hang}	N	Hangabtriebskraft
F_{Haft}	N	Haftreibungskraft
F_{Luftw}	N	Luftwiderstandskraft

F_{Normal}	N	Normalkraft
F_{Stokes}	N	Stokes'sche Reibungskraft
F_Z	N	Zentrifugalkraft
g	m/s^2	Gravitationsbeschleunigung
g	m	Gegenstandsweite
k	N/m	Federkonstante
l	m	Länge
L, \vec{L}		Drehimpuls
m	kg	Masse
M_E	kg	Masse der Erde
M_{Mars}	kg	Masse des Mars
M_S	kg	Masse der Sonne
n		Brechungsindex
N		Anzahl
O	m^2	Oberfläche
p, \vec{p}	kg m/s	Impuls
P	$\text{W} = \text{J/s}$	Leistung
r	m	Radius
r	m	Krümmungsradius
r_E	km	Radius der Erde
r_{Mars}	km	Radius des Mars
r_{Sonne}	km	Radius der Sonne
\vec{r}	m	Ortsvektor
\vec{s}	m	Ortsvektor
s	m	Länge
T	s	Schwingungsdauer
U	m	Umfang
U	V	Spannung
v, \vec{v}	m/s	Geschwindigkeit
v_{end}	m/s	Endgeschwindigkeit
V	m^3	Volumen
W	$\text{J} = \text{N m}$	Arbeit
W_{Beschl}	J	Beschleunigungsarbeit
W_{Feder}	J	Arbeit beim Spannen einer Feder
W_{Hub}	J	Hubarbeit
W_{verform}	J	Verformungsarbeit

A.2 Konstanten

Lichtgeschwindigkeit	c	
Schallgeschwindigkeit	c	
Erdbeschleunigung	g	9.81 m/s^2
universelle Gravitationskonstante	γ	$6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2$
Masse der Erde	M_E	$5.69 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Masse des Mars	M_{Mars}	$7.35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
Masse der Sonne	M_{Sonne}	$1.99 \cdot 10^{31} \text{ kg}$
Radius der Erde	r_E	6350 km
Radius des Mars	r_{Mars}	3397 km
Radius der Sonne	r_{Sonne}	696 000 km
Elementarladung	e	

A.3 Kurze Formelsammlung

Die folgenden Formelsammlung ist repräsentativ für den Spickzettel, den Sie zu Klausur erhalten.

1. Beschreibung von Bewegungen (Kinematik); Grundgrößen (SI-Einheiten): Weg s [m], Zeit t [s]

- Geschwindigkeit v als Verhältnis aus Weg s und der zum zurück legen des Weges benötigten Zeit t :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (\text{A.1})$$

- Beschleunigung a als Änderung der Geschwindigkeit v innerhalb eines Zeitintervalls t :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (\text{A.2})$$

- allgemeines Weg-Zeit-Gesetz

$$\vec{s}(t) = \vec{v}_0 \cdot t + \frac{1}{2} \vec{a} \cdot t^2 \quad (\text{A.3})$$

- allgemeines Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \quad (\text{A.4})$$

2. Kräfte als Ursachen von Bewegung (Dynamik); Grundgröße: Masse m [kg]

- Aktionsgesetz, beschreibt den Zusammenhang zwischen einer auf einen Körper der Masse m wirkenden Kraft \vec{F} und der sich daraus ergebenden Beschleunigung \vec{a}

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad [\text{N}] = [\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}^2] \quad (\text{A.5})$$

- Impuls \vec{p} (oder Bewegungsgröße) definiert als das Produkt aus der Masse m des Körpers und seiner Geschwindigkeit \vec{v}

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad [\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}] \quad (\text{A.6})$$

- Kraftstoß

$$\vec{F} \cdot t = \vec{p} \quad [\text{kg} \cdot \text{m}/\text{s}] \quad (\text{A.7})$$

- Hangabtriebskraft

$$F_{\text{Hang}} = F_g \sin \alpha \quad [\text{N}] \quad (\text{A.8})$$

- Gleitreibung

$$F_{\text{Gleit}} = \mu F_N \quad [\text{N}] \quad (\text{A.9})$$

- Federkraft

$$F_F = -kx \quad [\text{N}] \quad (\text{A.10})$$

- Radialkraft

$$F_{\text{ZP}} = \frac{mv^2}{r} \quad [\text{N}] \quad (\text{A.11})$$

- allgemeines Gravitationsgesetz

$$F_G = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} \quad \text{mit} \quad \gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 \quad (\text{A.12})$$

- Stokes'sches Reibungsgesetz

$$\vec{F}_{\text{Stokes}} = -\beta \vec{v} \quad [\text{N}] \quad (\text{A.13})$$

- Luftwiderstand

$$F_{\text{Luft}} = \frac{1}{2} c_w A \rho v^2 \quad [\text{N}] \quad (\text{A.14})$$

- Impulserhaltung (elastischer Stoß)

$$m_1 v_{1,v} + m_2 v_{2,v} = m_1 v_{1,n} + m_2 v_{2,n} \quad (\text{A.15})$$

- Impulserhaltung (inelastischer Stoß)

$$m_1 v_{1,v} + m_2 v_{2,v} = (m_1 + m_2) v_n \quad (\text{A.16})$$

3. Arbeit, Energie, Leistung

- Arbeit

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos \alpha = F_{\parallel} s \quad [\text{Nm}] = [\text{J}] \quad (\text{A.17})$$

- Hubarbeit (potentielle Energie)

$$W_{\text{Hub}} = E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h \quad [\text{J}] \quad (\text{A.18})$$

- Beschleunigungsarbeit (kinetische Energie)

$$W_{\text{Beschl}} = E_{\text{kin,transl}} = \frac{1}{2} m v^2 \quad [\text{J}] \quad (\text{A.19})$$

- Arbeit beim Spannen einer Feder (potentielle Energie in einer Feder)

$$W_{\text{Feder}} = E_{\text{Feder}} = \frac{1}{2} k s^2 \quad [\text{J}] \quad (\text{A.20})$$

- Energieerhaltung (mechanische Energie)

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} = \text{const} \quad (\text{A.21})$$

- Energieerhaltung beim elastischen Stoß

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1,v}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,v}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1,n}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2,n}^2 \quad (\text{A.22})$$

- Leistung

$$P = W/t = E/t \quad [\text{W}] = [\text{J/s}] \quad (\text{A.23})$$

4. Drehbewegung; Grundgröße: Drehwinkel ϕ (im Bogenmaß)

- Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{\phi}{t} \quad \left[\frac{1}{\text{s}} \right] \quad (\text{A.24})$$

- Winkelbeschleunigung

$$\vec{\alpha} = \frac{\vec{\omega}}{t} \quad \left[\frac{1}{\text{s}^2} \right] \quad (\text{A.25})$$

- Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit der Translation und der Rotation

$$v = \omega \cdot r \quad (\text{A.26})$$

- Winkelgeschwindigkeit und Frequenz

$$\omega = 2\pi f \quad (\text{A.27})$$

- Drehimpuls

$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (\text{A.28})$$

- Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad M = r F \sin \alpha = r F_{\perp} \quad (\text{A.29})$$

- Massenmittelpunkt

$$\vec{r}_{\text{MM}} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} \quad (\text{A.30})$$

- Rotationsenergie

$$E_{\text{kin,rot}} = \frac{I}{2} \omega^2 \quad [\text{J}] \quad (\text{A.31})$$

- Erhaltung der mechanischen Energie:

$$E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} + E_{\text{rot}} = \text{const} \quad (\text{A.32})$$

5. Kontinuierliche Medien in Ruhe

- Dichte

$$\rho = m/V \quad [\text{kg/m}^3] \quad (\text{A.33})$$

- Druck

$$p = F/A \quad [\text{N/m}^2] = \text{Pa} \quad (\text{A.34})$$

- hydrostatische Grundgleichung

$$p = p_o + \rho g h \quad [\text{Pa}] \quad (\text{A.35})$$

- barometrische Höhenformel

$$p = p_o \cdot e^{-\frac{\rho g h}{p_o}} \quad [\text{Pa}] \quad (\text{A.36})$$

- hydrostatischer Auftrieb

$$F_A = m_f \cdot g = \rho_f \cdot V \cdot g \quad [\text{N}] \quad (\text{A.37})$$

6. Kontinuierliche Medien in Bewegung

- Kontinuitätsgleichung (Konstanz des Volumenstroms)

$$Av = \dot{V} = \text{const} \quad \text{oder} \quad A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (\text{A.38})$$

- Bernoulli-Gleichung (Energieerhaltung)

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_o = \text{const} \quad \text{oder} \quad p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (\text{A.39})$$

- hydrodynamischer Auftrieb (ruhender Boden)

$$F_A = \frac{1}{2} \rho_{\text{Luft}} v^2 A \quad (\text{A.40})$$

- hydrodynamischer Auftrieb (umströmter Körper)

$$F_A = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) A \quad (\text{A.41})$$

- Leistung in einer Strömung

$$P_{\text{strom}} = \frac{1}{2} \rho v^3 A \quad (\text{A.42})$$

- Magnus-Effekt

$$\Delta p = \frac{1}{2} \rho \cdot [(v + \omega r)^2 - (v - \omega r)^2] = 2 \rho v \omega r \quad (\text{A.43})$$

- Volumenstrom in einem Rohr

$$\dot{V} = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8 \mu l} \quad (\text{A.44})$$

- Reynoldszahl

$$\frac{L_1 v_1}{\nu_1} = \frac{L_2 v_2}{\nu_2} = \frac{Lv}{\nu} = Re \quad (\text{A.45})$$

7. Elektromagnetische Felder; Grundgrößen: elektrischer Strom I [A], elektrische Ladung Q [C = As]

- Coulomb-Kraft

$$F_{\text{Coul}} = k \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \quad \text{mit} \quad k = 8.97 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2 \quad (\text{A.46})$$

- elektrische Feldstärke

$$E = \frac{F}{Q} \quad \left[\frac{\text{N}}{\text{C}} \right] = \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \right] \quad (\text{A.47})$$

- elektrisches Potential

$$U = \frac{W_{\text{pot}}}{Q} \quad [\text{V}] = \left[\frac{\text{J}}{\text{C}} \right] \quad (\text{A.48})$$

- kinetische Energie eines durch eine Spannung beschleunigten Teilchens

$$W_{\text{kin}} = Q \cdot U \quad [\text{eV}] \quad \text{mit} \quad 1 \text{ eV} = 1.602 \cdot 10^{-19} \text{ J} \quad (\text{A.49})$$

- elektrische Arbeit

$$W = Q \cdot U \quad (\text{A.50})$$

- elektrische Leistung

$$P = \frac{W}{t} = Q \cdot U/t = I \cdot U \quad (\text{A.51})$$

- Kapazität eines Kondensators

$$C = \frac{Q}{U} \quad [\text{C/V}] = [\text{F}] \quad (\text{A.52})$$

- Plattenkondensator

$$U = E \cdot d \quad C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (\text{A.53})$$

- im Kondensator gespeicherte Energie

$$W = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} Q^2 / C = \frac{1}{2} C U^2 \quad (\text{A.54})$$

- Strom als Ladung pro Zeit

$$I = \frac{Q}{t} \quad [\text{A}] = [\text{C/s}] \quad (\text{A.55})$$

- elektrischer Widerstand

$$R = \frac{U}{I} \quad [\Omega] = [\text{V/A}] \quad (\text{A.56})$$

- Reihenschaltung von Widerständen

$$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2 + \dots \quad (\text{A.57})$$

- Reihenschaltung von Kondensatoren

$$\frac{1}{C_{\text{ges}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots \quad (\text{A.58})$$

- Parallelschaltung von Widerständen

$$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots \quad (\text{A.59})$$

- Parallelschaltung von Kondensatoren

$$C_{\text{ges}} = C_1 + C_2 + \dots \quad (\text{A.60})$$

- Magnetfeld einer von einem Strom durchflossenen Spule

$$H = \frac{nI}{l} \quad [\text{A/m}] \quad (\text{A.61})$$

- Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad [\text{N}] \quad (\text{A.62})$$

8. Schwingungen und Wellen

- Federpendel

$$x(t) = x_{\text{max}} \sin \omega t \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (\text{A.63})$$

- Frequenz

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{A.64})$$

- Periode oder Schwingungsdauer

$$T = \frac{1}{f} \quad (\text{A.65})$$

- Fadenpendel

$$\omega = \sqrt{g/l}, \quad f = \omega/2\pi = \sqrt{g/l}/2\pi \quad \text{und} \quad T = \frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\text{A.66})$$

- Geschwindigkeit einer Welle

$$c = \lambda \cdot f \quad (\text{A.67})$$

- Doppler-Effekt bei bewegter Quelle

$$f = \frac{f_o}{1 \mp \frac{v}{c}} \quad (\text{A.68})$$

- Doppler-Effekt bei bewegtem Beobachter

$$f = f_o \cdot \left(1 \pm \frac{v}{c}\right) \quad (\text{A.69})$$

- Schallpegel

$$L = 10 \cdot \log \left(\frac{I}{I_o} \right) \quad [\text{dB}] \quad \text{mit} \quad I_o = 10^{-12} \text{ W/m}^2 \quad (\text{A.70})$$

- Intensität eines reflektierten Ultraschallsignals

$$\frac{I_r}{I_o} = \left(\frac{\varrho_1 c_1 - \varrho_2 c_2}{\varrho_1 c_1 + \varrho_2 c_2} \right)^2 \quad (\text{A.71})$$

- Mach'scher Kegel

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{c}{v} \quad (\text{A.72})$$

9. Geometrische Optik

- Brechungsindex

$$n = \frac{c_{\text{Vak}}}{c_{\text{Med}}} \quad (\text{A.73})$$

- Brechungsgesetz

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{A.74})$$

- Linsenschleiergleichung

$$f = \frac{r_1 r_2}{(n-1)(r_2 - r_1)} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{f} = \left(\frac{n}{n_m} - 1 \right) \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (\text{A.75})$$

- Abbildungsgesetz

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{b} + \frac{1}{g} \quad \text{und} \quad \frac{b}{g} = \frac{B}{G} \quad (\text{A.76})$$

- Absorption

$$I(x) = I_0 e^{-\kappa x} \quad (\text{A.77})$$

10. Wellenoptik

- Maxima am Doppelspalt

$$n\lambda = d \sin \alpha_n \quad (\text{A.78})$$

- Minima am Doppelspalt

$$(2n-1)\lambda/2 = d \sin \alpha_n \quad (\text{A.79})$$

- Auflösungsvermögen

$$\Delta x = f \Delta \alpha = f 1.22 \frac{\lambda}{d} \quad (\text{A.80})$$

- Newton'sche Ringe

$$\Delta s = 2d \cdot n + \frac{\lambda}{2} \quad (\text{A.81})$$

- Brewster-Winkel

$$\tan \alpha_B = n \quad (\text{A.82})$$

- Intensität

$$I = \frac{E}{Ft} = \frac{P}{F} \quad [\text{W/m}^2] \quad (\text{A.83})$$

- Energie eines Photons

$$E = hf \quad \text{mit} \quad h = 6.6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad (\text{A.84})$$

- Materiewelle (de Broglie-Wellenlänge)

$$\lambda = h/p \quad \text{und} \quad E = hf \quad (\text{A.85})$$

11. Atom- und Kernphysik

- Unschärferelation

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq h/2\pi \quad \text{oder} \quad \Delta E \cdot \Delta t \geq h/2\pi \quad (\text{A.86})$$

- Energieniveaus des Wasserstoffatoms

$$E_n = -\frac{1}{8} \frac{m_e e^4}{\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} \quad (\text{A.87})$$

- Rydbergkonstante

$$R = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^3} = 3.3 \cdot 10^{15} \text{ Hz} \quad (\text{A.88})$$

- Energieübergänge im Wasserstoffatom

$$f = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right) \quad (\text{A.89})$$

- stehende Welle im Wasserstoffatom

$$E = \frac{h^2}{8ma^2} n^2 \quad (\text{A.90})$$

- Zerfallsgesetz

$$N(t) = N_o \cdot e^{-\lambda t} \quad (\text{A.91})$$

- Halbwertzeit

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (\text{A.92})$$

- Aktivität

$$A(t) = \lambda N(t) = A_o \cdot e^{-\lambda t} \quad \text{und} \quad T = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad (\text{A.93})$$

- Absorptionsgesetz

$$I(x) = I_o \cdot e^{-\mu x} \quad (\text{A.94})$$

12. Simple Mathe

- Kreis

$$U = 2\pi r \quad A = \pi r^2 \quad (\text{A.95})$$

- Zylinder

$$V_{\text{Zylinder}} = \pi r^2 \cdot h \quad (\text{A.96})$$

- Kugel

$$O = 4\pi r^2 \quad V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (\text{A.97})$$

- rechtwinkliges Dreieck

$$\begin{aligned} \sin &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothense}} \\ \cos &= \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothense}} \\ \tan &= \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin}{\cos} \end{aligned} \quad (\text{A.98})$$

- Binomische Formeln

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ (a+b)(a-b) &= a^2 - b^2 \end{aligned} \quad (\text{A.99})$$

- Vektoraddition

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{pmatrix} \quad (\text{A.100})$$

- Betrag eines Vektors

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (\text{A.101})$$

- Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (\text{A.102})$$

- Kreuzprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix} \quad (\text{A.103})$$

A.4 Lösungen zu den Aufgaben

A.4.1 Kapitel 1

- $1 \text{ cm} = 1 \cdot 10^{-5} \text{ km} = 0,00001 \text{ km}$
 $1 \text{ cm} = 1 \cdot 10^7 \text{ nm} = 10\,000\,000 \text{ nm}$
 $2 \text{ m}^2 = 2 \cdot 10^6 \text{ mm}^2 = 2\,000\,000 \text{ mm}^2$
 $2 \text{ m}^2 = 2 \cdot 10^4 \text{ cm}^2 = 20\,000 \text{ cm}^2$
 $2 \text{ m}^2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ km}^2 = 0,000\,002 \text{ km}^2$
 $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 0,001 \text{ m}^3$
 $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 1 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$
 $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 1 \cdot 10^6 \text{ mm}^3 = 1\,000\,000 \text{ mm}^3$
 $4 \text{ h und } 4 \text{ min} = (4 \cdot 60 \cdot 60 + 4 \cdot 60) \text{ s} = (14400 + 240) \text{ s} = 14640 \text{ s}$
 $84678 \text{ s} \div 60 \text{ s} \Rightarrow 1411 \text{ min } 18 \text{ s}$
 $1411 \text{ min} \div 60 \text{ min} \Rightarrow 23 \text{ h } 31 \text{ min}$
 $84678 \text{ s} = 23 \text{ h } 31 \text{ min } 18 \text{ s}$
 $34 \text{ cm/min} = 34 \cdot \frac{10^{-2}}{60} \text{ m/s} = 0,00567 \text{ m/s}$
 $34 \text{ cm/min} = 34 \cdot \frac{10^{-5}}{60 \cdot 1} \text{ km/h} = 34 \cdot 60 \cdot 10^{-5} \text{ km/h} = 0,0204 \text{ km/h}$
 $34 \text{ cm/min} = 34 \cdot \frac{10}{60} \text{ mm/s} = 5,67 \text{ mm/s}$
 $64 \text{ km/s} = 64 \cdot \frac{10^3}{3600} \text{ m/s} = 17,78 \text{ m/s}$
- falsch, falsch, richtig, falsch, richtig
- $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$
- falsch, richtig, richtig, falsch
- richtig, richtig, richtig
- 9 Größenordnungen.
- In einem km^2 sind 100 Hektar erhalten.
- $a = 1 \text{ dm}, \quad V = a^3 = 1 \text{ dm}^3$
 $V(\text{mm}^3) = 1 \text{ dm}^3 = 1 \cdot (10^2)^3 \text{ mm}^3 = 1\,000\,000 \text{ mm}^3$
 $V(\text{cm}^3) = 1 \text{ dm}^3 = 1 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$
 $V(\text{l}) = 1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$
 $a = 0,2 \text{ km}, \quad V = a^3 = 0,008 \text{ km}^3$
 $V(\text{mm}^3) = 0,008 \text{ km}^3 = 0,008 \cdot (10^6)^3 \text{ mm}^3 = 0,008 \cdot 10^{18} \text{ mm}^3 = 8 \cdot 10^{15} \text{ mm}^3$
 $V(\text{cm}^3) = 0,008 \text{ km}^3 = 0,008 (10^5)^3 \text{ cm}^3 = 8 \cdot 10^{12} \text{ cm}^3$
 $V(\text{l}) = 0,008 \text{ km}^3 = 0,008 (10^4)^3 \text{ dm}^3 = 8 \cdot 10^9 \text{ dm}^3 = 8 \cdot 10^9 \text{ l}$
 $a = 4 \mu\text{m}, \quad V = a^3 = 64 \mu\text{m}^3$
 $V(\text{mm}^3) = 64 \mu\text{m}^3 = 64 \cdot (10^{-3})^3 \text{ mm}^3 = 64 \cdot 10^{-9} \text{ mm}^3$
 $V(\text{cm}^3) = 64 \mu\text{m}^3 = 64 \cdot (10^{-4})^3 \text{ cm}^3 = 64 \cdot 10^{-12} \text{ cm}^3$
 $V(\text{l}) = 64 \mu\text{m}^3 = 64 \cdot (10^{-5})^3 \text{ dm}^3 = 64 \cdot 10^{-15} \text{ l}$
- $v_S = 0,001 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- $V(\text{See}) = 16 \cdot 10^9 \text{ m}^3, \quad V(\text{Tanks}) = 400 \text{ m}^3, \quad N = 40\,000\,000 \text{ mal}$
- $E \rightarrow \text{kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{N} \cdot \text{m} = \text{J}$

12. $p = mv$
13. $N = 23,33 \cdot 10^{20}$, $V = 25,75 \cdot 10^{-24} \text{m}^3$
14. richtig, richtig, richtig
15. $[\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \text{m}] = [\text{N m}] = [\text{J}]$
16. stimmt; die Größen aus der 1. Klammer kann man nicht summieren, damit kann die Gleichung nicht stimmen.
17. $\rho_1 = 2000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, $\rho_2 = 270 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Der Würfel hat die größere Dichte.
18. $v_1 = 1,49 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_2 = \frac{s_2}{t_2} = 1,33 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_3 = 4 \frac{\text{dm}}{\text{s}} = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$; Reihenfolge: 1. Wüstenrennmaus; 2. Stabheuschrecke; 3. Rennschnecke.
19. $1 \text{ m/s} = 3,6 \text{ km/h}$
 $1 \text{ km/h} = \frac{1}{3,6} \text{ m/s} = 0,2778 \text{ m/s}$
 $1 \text{ m}^2 = 1 \cdot (10^{-3})^2 \text{ km}^2 = 10^{-6} \text{ km}^2$
 $1 \text{ km}^2 = 1 \cdot (10^3)^2 \text{ m}^2 = 10^6 \text{ m}^2$
 $1 \text{ m}^2 = 1 \cdot (10^2)^2 \text{ cm}^2 = 10^4 \text{ cm}^2$
 $1 \text{ cm}^2 = 1 \cdot (10^{-2})^2 \text{ m}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$
 $1 \text{ cm}^3 = 1 \cdot (10^{-2})^3 \text{ m}^3 = 10^{-6} \text{ m}^3$
 $1 \text{ m}^3 = 1 \cdot (10^2)^3 \text{ cm}^3 = 10^6 \text{ cm}^3$
 $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 1 \cdot 10^3 \text{ cm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$
 $1 \text{ cm}^3 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ l} = \frac{1}{1000} \text{ l}$
 $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3 = \frac{1}{1000} \text{ m}^3$
 $1 \text{ m}^3 = 1 \cdot 10^3 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ l}$
 $1 \text{ g/cm}^3 = 1 \cdot \frac{10^{-3}}{(10^{-2})^3} \text{ kg/m}^3 = 10^3 \text{ kg/m}^3 = 1000 \text{ kg/m}^3$
 $1 \text{ kg/m}^3 = 1 \cdot \frac{10^3}{(10^2)^3} \text{ g/cm}^3 = 10^{-3} \text{ g/cm}^3 = 0,001 \text{ g/cm}^3$

A.4.2 Kapitel 2

1.

$$\begin{aligned}
 x &= a \cdot b \\
 x &= \frac{a^2}{b} \\
 x &= \frac{a^2}{b} \\
 x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x &= \frac{ac}{a+b} \\
 x &= \ln \frac{a}{2} \\
 x &= e^{\frac{b}{a}} \\
 x &= 0.
 \end{aligned} \tag{A.104}$$

2.

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= 25 \\
 x_{1,2} &= -5 \\
 x_{1,2} &= -\frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{27}{4}} \quad (\text{keine reelle Lsg}) \\
 x_{1,2} &= 2 \pm \sqrt{20} \\
 x_{1,2} &= -9 \pm \sqrt{121,5} \\
 x_{1,2} &= 9.
 \end{aligned} \tag{A.105}$$

3.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\
 f'(x) &= 6 \cos(3x) \\
 f'(x) &= -2 \sin(2x) \\
 f'(x) &= \sin x + x \cos x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -k \cos(\omega t - kx) \\
f'(x) &= 2e^{2x} \\
f'(x) &= e^{ax}(2x + ax^2) \\
f'(x) &= 2ax + bc \cdot e^{cx}
\end{aligned} \tag{A.106}$$

4.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d \\
f''(x) &= 12ax^2 + 6bx + 2c \\
f'(x) &= \cos x - \sin x \\
f''(x) &= -\sin x - \cos x \\
f'(x) &= 2k \cos(kx + b) - 4k \sin(kx + c) \\
f''(x) &= -2k^2 \sin(kx + b) - 4k^2 \cos(kx + c) \\
f'(x) &= \lambda b e^{\lambda x} - c k e^{-kx} \\
f''(x) &= \lambda^2 b e^{\lambda x} + k^2 c e^{-kx} \\
f'(x) &= 6x e^{2x} (1 + x) \\
f''(x) &= 6e^{2x} (2x^2 + 4x + 1) \\
f'(x) &= 0 \\
f''(x) &= 0 \\
f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \sin x \cos x + 23}{\sqrt{\sin^2 x + 23x}} \\
f''(x) &= \frac{1}{2(\sin^2 x + 23x)} [2(\cos^2 x - \sin^2 x) \sqrt{\sin^2 x + 23x} - \frac{(2 \sin x \cos x + 23)^2}{\sqrt{\sin^2 x + 23}}]
\end{aligned} \tag{A.107}$$

5.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{k}{2} x^2 + C \\
I_2 &= \frac{a}{3} x^3 + C \\
I_3 &= 33 \frac{1}{3} \\
I_4 &= \frac{k}{2} (x_2^2 - x_1^2) \\
I_5 &= -\cos x + C \\
I_6 &= e^x + C \\
I_7 &= \ln |x| + C
\end{aligned} \tag{A.108}$$

6.

$$\begin{aligned}
m &= 234.698 \cdot 10^{18} \text{ g}, \\
l &= 150 \cdot 10^9 \text{ m}, \\
v &= 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \\
q &= 16 \cdot 10^{-12} \text{ As}, \\
r &= 2.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}, \\
s &= 345 \cdot 10^{-15} \text{ m}, \\
l &= 0.01 \text{ km} = 10 \text{ m}, \\
V &= 0.012 \text{ 800 l}, \\
A &= 254 \cdot 10^{12} \text{ cm}^2 = 25.4 \cdot 10^9 \text{ m}^2, \\
F &= 12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2.
\end{aligned} \tag{A.109}$$

7.

$$\begin{aligned}
P_1 &= 2 \cdot 10^8 \\
P_2 &= 10^8 + 10^4 \\
P_3 &= 10^{-2} \\
P_4 &= 10^8 \\
P_5 &= 10^{-8} \\
P_6 &= 10^2.
\end{aligned} \tag{A.110}$$

8. 14 min, 32 min. 24 s

9. $0,096 \text{ h}^{-1}$, 7 h 13 min.
10. $0,5 \text{ s}$, $0,34x_0$, 0 , $-0,59x_0$, $-x_0$
11. 37° , 3
12. $\vec{e}_a = (\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}})$, $\vec{e}_b = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $\vec{e}_c = -\frac{5}{\sqrt{110}}\vec{e}_x + \frac{6}{\sqrt{110}}\vec{e}_y + \frac{7}{\sqrt{110}}\vec{e}_z$
13. Zwei Vektoren sollen einen Vektor bilden, dessen Betrag ihrem gleich ist, damit er zusammen mit dem dritten Vektor Nullvektor ergibt. Alle drei Vektoren bilden ein Dreieck und Ende von einem Vektor ist gleichzeitig Anfang für den Anderen. Die Vektoren kann man zu einem Stern verbinden, indem man deren Anfangspunkte zusammenlegt. Die Winkel zwischen Vektoren sind 120° .
14. $-\vec{e}_a = (-\frac{1}{\sqrt{30}}, -\frac{5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}})$
15. $\vec{r}_1 = (12, 25; 7, 07; 14, 14)$, $\vec{r}_2 = (-7, 5; 12, 99; -25, 98)$, $\vec{r}_1 + \vec{r}_2 = (4, 75; 20, 06; -11, 84)$, $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (19, 75; -5, 92; 40, 12)$
16. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2$, $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (4\vec{c}) = -108$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{c}) = -21$
17. $\vec{s}_3 = \vec{s}_1 - \vec{s}_2 = (0, 100) - (200, 0) = (-200, 100)$
18. $|\vec{s}| = 20,33 \text{ km}$
19. $W = 151 \text{ Nm}$, $\alpha = 75,43^\circ$
- 20.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} -19 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} &= \begin{pmatrix} -11 \\ 34 \\ 63 \end{pmatrix} \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (3\vec{c}) &= \begin{pmatrix} -63 \\ 102 \\ -381 \end{pmatrix} \\ (\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{b} - \vec{c}) &= \begin{pmatrix} -57 \\ -40 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (\text{A.111}) \end{aligned}$$

21. $|\vec{a} \times \vec{b}| = 51$

22.

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= 17, \\ (\vec{a} \times \vec{a}) \times \vec{c} &= 0, \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \\ |(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}| &= 12,7 \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \begin{pmatrix} -51 \\ 17 \\ -85 \end{pmatrix}, \\ |(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c})| &= 100,6 \end{aligned} \quad (\text{A.112})$$

23. Flächeninhalt $|\vec{a} \times \vec{c}| \approx 19$; Volumen des Parallelepipeds: Spatprodukt $V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 2$

24. $\vec{v} = d\vec{r}/dt = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z - gt \end{pmatrix}$, $\vec{a} = d\vec{v}/dt = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$

A.4.3 Kapitel 3

1. $RF = \frac{\sigma_l}{l} \cdot 100\% = 3,65\%$
2. $\sigma_l = 1,58\text{cm}$
3. $l_1 = (123,2 \pm 2,5)\text{ cm}$, $l_2 = (123,2 \pm 4,9)\text{ cm}$; Die 1. Messung hat den kleineren Fehler.
4. Mittelwert $\bar{m} = 22,49\text{ g}$, mittlere Fehler der Einzelwerte $\sigma_m = 0,22\text{ g}$, relative Fehler $RF_m = \frac{\sigma_m}{\bar{m}} \cdot 100\% = 0,98\%$, Fehler des Mittelwertes: $\sigma_{\bar{m}} = 0,007\text{ g}$, relativer Fehler $RF_{\bar{m}} = 0,31\%$
5. Mittelwert $7,45\text{ mm}$, mittlere Fehler der Einzelwerte $0,26\text{ mm}$, Fehler des Mittelwertes $0,08\text{ mm}$, $V = 216,395\text{ mm}^3$; Fehlerfortpflanzung: Multiplikation mit einer Konstanten und Potenzgesetz, daher relative Fehler betrachten: $3,222\%$, liefert absoluten Fehler $6,971\text{ mm}^3$
6. Mittelwert $7,42\text{ mm}$, mittlere Fehler der Einzelwerte $0,12\text{ mm}$, Intervall $7,3\text{ mm} \leq x \leq 7,54$, d.h. 7 von 9 Messwerte liegen in diesem Intervall (ungefähr $2/3$)
7. $V = A \cdot h = 14532,58\text{ mm}^3$, Standardabweichungen für Mittelwerte: $\sigma_{\bar{d}} = 0,10\text{ mm}$, $\sigma_{\bar{h}} = 0,16\text{ mm}$; Fehlerfortpflanzung: Multiplikation mit einer Konstanten, Multiplikation und Potenzgesetz. $\frac{\sigma_V}{V} = 0,0098$, $V = (14,53258 \pm 0,14242)\text{ cm}^3$
8. $\sigma_g = 0,00005\text{ m/s}^2$
9. $\sigma_{\bar{t}} = 0,0018\text{ m}$, Fehlerfortpflanzung: Multiplikation mit einer Konstanten, Multiplikation und Potenzgesetz. $\frac{\sigma_T}{T} = 0,0133$, $T = 2,937\text{ s}$, $\sigma_T = 0,039\text{ s}$, $T = (2,937 \pm 0,039)\text{ s}$
10. Messung 1: $\sigma_{\bar{d}} = 0,041\text{ mm}$, $\frac{\sigma_{\bar{d}}}{\bar{d}} \cdot 100\% = 0,55\%$, $d = (7,4 \pm 0,041)\text{mm}$. Messung 2: $\sigma_{\bar{d}} = 0,065\text{ mm}$, $\frac{\sigma_{\bar{d}}}{\bar{d}} \cdot 100\% = 0,88\%$, $d = (7,4 \pm 0,065)\text{ mm}$. Die 1. Messung ist zuverlässiger, weil relative Fehler da kleiner ist.
11. $l = l_1 + l_2 = 20\text{ m}$, $\sigma_l = 0,5\text{ m}$
12. $E = E_{kin} + E_F = 0,091\text{ J} + 0,1564\text{ J} = 0,2474\text{ J}$, $E = (0,2474 \pm 0,0038)\text{ J}$, maximale Auslenkung $E = (0,2509 \pm 0,0028)\text{ J}$
13. $\frac{\sigma_a}{a} = 0,01$ oder 1%
14. $u = (23,248 \pm 0,314)\text{mm}$, relative Fehler bleibt erhalten
15. $v = (49,05 \pm 0,55)\text{ m/s}$
16. $h = (28,25 \pm 0,40)\text{m}$, $1,42\%$
17. $(12 \pm 1) \cdot [(25 \pm 3) - (10 \pm 1)] = 180 \pm 28$; $\sqrt{16 \pm 4} + (3 \pm 0,1)^3 \cdot (2 \pm 0,1) = 58 \pm 6$; $(20 \pm 2) \cdot e^{-(1,0 \pm 0,1)} = 7,36 \pm 1,04$
18. $V = (4,19 \pm 0,63)\text{ m}^3$
19. $I = (1,23 \pm 0,04)\text{mA}$, $3,25\%$; $R = (2439 \pm 79)\Omega$; $R = (2439 \pm 145)\Omega$
20. $R = (120 \pm 2,64)\Omega$
21. $\frac{\sigma_I}{I} = 5\%$
22. $h = (43,42 \pm 2,27)\text{ m}$, $5,23\%$
23. $q = 0,7811 \pm 0,0495$, $6,34\%$

A.4.4 Kapitel 4

1. $v = v_1 + v_2 = 6 + 1 = 7\text{m/s}$
2. $\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{100}{12} = 8,33\text{m/s}$
3. Die am Ende der Beschleunigung erreichte Geschwindigkeit ist höher als die mittlere Geschwindigkeit über die Gesamtstrecke, weil bei der letzten werden auch niedrigere Geschwindigkeiten während der Beschleunigungsphase berücksichtigt.
4. $s = \frac{at^2}{2} = 2,79\text{m}$; Nein, der Jogger schafft es nicht, vor dem Dachs zum Stillstand zu kommen.
5. $a = \frac{2s}{t^2} = 1,5\text{m/s}^2$, $t = 2,67\text{s}$
6. $t = \frac{\Delta s}{v_1 - v_2} = 6\text{s}$
7. $v = at = 20\text{m/s}$, $s = \frac{at^2}{2} = 50\text{m}$, $s_{1-4} = 32\text{m}$, $s_5 = 18\text{m}$

8. $a_1 = 11,5 \text{ g}$, $a_2 = 1150 \text{ g}$
9. $v = 200 \text{ m/s}$, $h = 2440 \text{ m}$, $t = 24,4 \text{ s}$
10. $h = \frac{v^2}{2g} = 46 \text{ m}$
11. $h = \frac{v_0^2}{g} - \frac{g \cdot (\frac{v_0}{g})^2}{2} = 1,84 \text{ m}$ $t = 2 \cdot \frac{v_0}{g} = 1,22 \text{ s}$
12. $h = \frac{g \cdot (\frac{v}{g})^2}{2} = 2,5 \text{ m}$
13. $v = gt = 49 \text{ m/s}$, $h = \frac{gt^2}{2} = 122,5 \text{ m}$
14. $h = 40,56 \text{ m}$ vs. $h = 44,1 \text{ m}$, oder Fehler 8,7%.
15. $v_1 = 16,8 \text{ m/s}$, $v_2 = 26,6 \text{ m/s}$, $h = 2,5 \text{ m}$
16. $\bar{v} = 14,7 \text{ m/s}$, $t = 1,5 \text{ s}$, $t = 3,5 \text{ s}$
17. $h = \frac{gt^2}{2} = 1102,5 \text{ m}$, $h = v_0 t + \frac{gt^2}{2} = 1402,5 \text{ m}$
18. $H = 305,1 \text{ m}$, $v = 39 \text{ m/s}$ $t = 8,91 \text{ s}$
- 19.
20. $v = 24,25 \text{ m/s}$
21. $\bar{v} = 10,2 \text{ m/s}$
22. $\bar{v} = 7,5 \text{ m/s}$, $\bar{a} = 0$,
23. $h = 20,4 \text{ m}$, $t = 2,04 \text{ s}$, $A = 73,56 \text{ m}$, $X = 141,34 \text{ m}$, $t_G = 4,08 \text{ s}$
24. $v_0 = 8,854 \text{ m/s}$
25. $v_0 = 44,74 \text{ m/s}$
26. $v_0 = 1,77 \text{ m/s}$, $h = 0,4 \text{ m}$
27. $\vec{s} = (8,66, 0, 1) \text{ m}$, $\vec{v} = (8,66; -4,8) \text{ m/s}$, $t = 1,33 \text{ s}$, $x = 11,52 \text{ m}$
28. $x = 41 \text{ m}$
29. $x_{30} = 35,35 \text{ m}$, $x_{60} = 35,35 \text{ m}$, $x_{45} = 40,82 \text{ m}$, $t_{30} = 2,04 \text{ s}$, $t_{60} = 3,54 \text{ s}$, $t_{45} = 2,89 \text{ s}$
30. $\alpha = 33,7^\circ$, $v_o = 25,21 \text{ m/s}$
31. $h_{max} = 20,4 \text{ m}$, $t = 2,04 \text{ s}$, $x_{h_{max}} = 70,67 \text{ m}$, $X_G = 141,34 \text{ m}$ $t_G = 4,08 \text{ s}$
32. $h = 20,4 \text{ m}$, $\vec{s}(x) = (v_x t, -\frac{gt^2}{2})$
33. Beschleunigung – Gleichförmige Bewegung – Negative Beschleunigung; $v_{max} = 12 \text{ m/s}$, Mutter-Biber muss abbremsen nach $t = 6,67 \text{ s}$ oder $s = 68 \text{ m}$; im anderen Fall $t = 6,17 \text{ s}$, $s = 62 \text{ m}$
- 34.
35. $\vec{s} = (15,42; 13,75) \text{ km}$, $|\vec{s}| = 20,66 \text{ km}$. Ohne dem Windrotorfeld auszuweichen:
 $\vec{s} = (15,15) \text{ km}$, $|\vec{s}| = \sqrt{15^2 + 15^2} = 21,21 \text{ km}$

A.4.5 Kapitel 5

1. $m = 52,63 \text{ kg}$
2. $m_f = 8,2 \text{ g}$, $m_f = 10,2 \text{ g}$, $m_f = 61 \text{ g}$
3. 13 N , 3 N
4. $F = 0,92G$
5. $p = 1120 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$ der Geschwindigkeit des Spielers entgegengesetzt
6. $p = 42\,000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$, $F = 6\,000 \text{ N}$
7. $F = 32,625 \text{ N}$
- 8.
9. $F = 3000 \text{ N}$
10. $a = 33\,333,33 \text{ m/s}^2$
11. $\bar{F} = 6000 \text{ N}$
12. $F = 2500 \text{ N}$, $f = \frac{F}{A} = 417 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$, $F = 1400 \text{ N}$, $f = \frac{F}{A} = 14\,000 \text{ N/m}^2$

13. $v = 69\text{m/s}$
14. $a = 16,4 \cdot 10^{-27}\text{m/s}^2$, $t \approx 11\ 000\text{Jahre}$
15. $a_{max} = 3333\text{m/s}^2$, $N = \frac{a_{max}}{g} = \frac{3333}{9,8} \approx 340\text{-fache.}$
16. $v = 40\text{m/s}$
17. $m = 163\text{kg}$, $a = 6\text{m/s}^2$, $F = 978\text{N}$
18. $a = 333\text{m/s}^2$, $a = \frac{10}{0,005} = 2000\text{m/s}^2$
19. $v = 4,43\text{m/s}$, $F = 3598\text{N}$, $F = 1079\text{N}$
20. $g_p = 12\text{m/s}^2$
21. $F = 3857\text{N}$
22. $|p| = 36\ 000\text{kg}\cdot\text{m/s}$, $\vec{p} \uparrow \downarrow \vec{v}$
23. $v = 9,9\text{m/s}$
24. $v = 7,67\text{m/s}$, $F = 1569\text{N}$, $F = 3460\text{N}$
25. $\omega = 1,4\text{s}^{-1}$, $v = 6,93\text{m/s}$, $\tan \alpha = \frac{F_Z}{G} = \frac{mv^2}{mg} = \frac{v^2}{rg}$; Auslenkwinkel ist nicht von der Masse abhängig, daher werden alle Gondeln gleich ausgelenkt.
26. $v = 2,18\ \text{cm/s}$
27. $s = 5,53\text{m}$
28. Gewicht eines Flugpassagieres in der Flughöhe von 12 km ist 0,377% kleiner als am Boden.
29. $r = 3440\ \text{km}$
30. $M = 5,98 \cdot 10^{24}\ \text{kg}$
31. $F_{Hang} = 415,8\text{N}$, $F_{Hang} = 294\text{N}$
32. $a = 0,98\text{m/s}^2$
33. $a = 4,92\text{m/s}^2$
34. Aufprallgeschwindigkeit: $v = 1,98\text{m/s}$; Beschleunigung bei Abbremsung: $a = 66\text{m/s}^2$, $F = 264\ \text{N}$ $\Delta x = 2,97\text{cm}$, weil die Wirbelsäule nur um max. 3 cm zusammengedrückt werden kann, ist so ein Sprung schon riskant; Man soll mit gestreckten Beinen auf das Boden aufprallen und sofort in die Knie gehen. So ist die Bremsstrecke lang und die Beschleunigung reduziert, damit auch Verletzungsgefahr.
35. $F_G = 6,67 \cdot 10^{-7}\ \text{N}$ gegenüber $F_G = 98\ \text{N}$; Die Gewichtskraft einer Kugel ist viel größer als Gravitationskraft zwischen zwei Kugeln, weil sie die Wechselwirkung Kugel - Erde (Masse $5,69 \cdot 10^{24}$) beschreibt.
36. $\mu_{min} = 0,4$, $\mu_{Haft} = 0,8$, $\mu_{Haft} = 0,64$ – falls der Block mit konstanter Geschwindigkeit weiter rutscht.
37. $G_Y = 228,7\ \text{N}$
38. $a = 10\text{m/s}^2$, $F = 10\ 000\ \text{N}$
39. $\mu = 0,867$
40. In Bewegung zu versetzen: $F_{Haft} = 147\text{N}$, In Bewegung zu halten: $F_{Gleit} = 122,5\text{N}$
41. $F_{Haft} = 300\ \text{N}$, $F_{Gleit} = 150\ \text{N}$
42. $h = 35150\ \text{km}$. Ein geostationärer Satelit kann nicht über Moskau stationiert sein, weil die Ebene seiner Bahn durch den Mittelpunkt der Erde gehen muss.
43. $F_{Gleit} = 1000\ \text{N}$, $F = 1510\ \text{N}$
44. $\alpha = 5,89^\circ$
45. $a = 0,64\text{m/s}^2$, die Beschleunigung weist zum Zentrum der Kreisbahn
46. $a = 0,5\text{m/s}^2$, $F = 35\ \text{N}$
47. $v = 41,53\ \text{m/s}$
48. $v = 31,3\ \text{m/s}$
49. $F_Z \sim 10^6 F_G$

50. $\alpha = 70^\circ$
51. $F_{Hang} = 763,8 \text{ N}$, $F_N = 441 \text{ N}$, $\mu_{Haft} = 1,73$, $F_{Haft} = \mu_{Haft} F_N = \mu_{Haft} mg \cos \alpha$ Nein, die Hände zur Hilfe zu nehmen wäre nicht sinnvoll: durch die Gewichtsverlagerung auf die Hände wird die Gesamthaftkraft kleiner.
52. $t = 24,7 \text{ s}$, $v = 242 \text{ m/s}$; mit Reibung/Fallschirm: $v_{end} = 19,8 \text{ m/s}$, $t = 151,5 \text{ s}$
53. $t = 7,68 \text{ s}$, $v = 15,65 \text{ m/s}$, $t = 4,94 \text{ s}$, $v = 5,06 \text{ m/s}$
54. $\vec{F} = (250\text{N}, 0\text{N})$, $\vec{a} = (0,42\text{m/s}^2, 0)$, $\vec{F}_W = -\vec{F} = (-250\text{N}, 0\text{N})$, die Leinen sollten möglichst lang sein, dann wird x-Komponente für die Kräfte größer.
55. $\mu_{Haft} = 0,052$
56. $v_{end} = 9,8 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$, $t = 1,02 \cdot 10^5 \text{ s} \sim 28 \text{ h}$, $s = 1,02 \cdot 10^6 \text{ m} \sim 1000 \text{ km}$; freier Fall: $t = 1,43 \text{ s}$, $s = 14,3 \text{ m}$
57. $v_{end} = 6 \text{ m/s}$, v_{end} wird kleiner, falls $m_2 v_2$ negativ ist, d.h. der Dorsch auf den Adler zu schwimmt: $v_{end} = 5 \text{ m/s}$, der Dorsch kann den Adler zum Absturz bringen.
58. $\vec{v}_3 = (7\frac{1}{3}, 2, 8\frac{2}{3}) \text{ m/s}$
59. $\vec{v} = (3, 25; 3, 75) \text{ m/s}$
- 60.

A.4.6 Kapitel 6

1. $W = 24,38 \text{ kJ}$, $E_{pot} = 5880 \text{ J}$, $E_{pot} < W$, daher nicht konservativ, $\vec{v} = (3,7, 2,5, 0,6) \text{ m/s}$
2. $W_{Hub} = 367,5 \text{ kJ}$
3. $W_{Hub} = 2058 \text{ J}$, $P = 1029 \text{ W}$
4. $W = 56,4 \text{ J}$
5. $W = \mu_{Gleit} F_G s = 80 \text{ J}$
6. $h = 3061 \text{ m}$, $v = 224,8 \text{ m/s}$, $t = 40\,000 \text{ s} \sim 11 \text{ h}$
7. $\Delta E_{pot} = 1470 \text{ J}$
8. $E = 2160 \text{ kJ}$
9. $E_{kin} = 4200 \text{ J}$
10. $W = 11,368 \text{ J}$
11. $E_{kin} = 78,4 \text{ J}$
12. $E_{kin} = 19,6 \text{ J}$
13. $v = 12,52 \text{ m/s}$
14. $\Delta E = 10 \text{ J}$, Energieerhaltung gilt nicht für mechanische Energie, weil beim inelastischen Stoß ein Teil der Energie in Verformungsarbeit übergehen wird.
15. $E = 432 \text{ kJ}$
16. $E = 54000 \text{ J} = 54 \text{ kJ}$
17. $W = 39220 \text{ J}$
18. $h = 5,1 \text{ m}$
19. $v = 14 \text{ m/s}$, $v = 14 \text{ m/s}$, mit Reibung $v_{end} = \frac{mg}{\beta}$
20. von links nach rechts, $v_v = 33,5 \text{ m/s}$, $v_n = 20,9 \text{ m/s}$
21. $h = \frac{5}{2} R$
22. $h = 7 \text{ m}$
23. $W = E_{pot} = 588 \text{ kJ}$, $P_M = 19,6 \text{ kW}$, $t_L = 84\,000 \text{ s}$ - fast 1Tag(24h), $v = 19,8 \text{ m/s}$, $d = 19,9 \text{ m}$
24. $W_{Spann} = 0,2 \text{ J}$, $E_{kin} = 0,2 \text{ J}$, $h = 2,04 \text{ m}$
25. $v = 19,8 \text{ m/s}$
26. $v = 4,85 \text{ m/s}$

27. $W_{Reib} = 6,5 \text{ J}$, $E_{pot} = 2,25 \text{ J}$, $W = 8,75 \text{ J}$
28. $v_{end} = 35,7 \text{ m/s}$
29. 59%
30. $v = 0,82 \text{ m/s}$
31. $P = 209 \text{ W}$
32. $P = 1,8 \text{ W}$, $F = 5,14 \text{ N}$, $W = 1080 \text{ J}$
33. $h = 1,28 \text{ m}$, $v_F = 0,57 \text{ m/s}$, $H = 0,72 \text{ m}$, $v = 3,56 \text{ m/s}$
34. Aus (33) folgt, dass der Lachs eine Strommschnelle mit max. Höhe von 1,28 m hinauf schwimmen kann. $n = \frac{6\text{m}}{1,28\text{m}} = 4,69$ Also sind mindestens 5 Stufen erforderlich.
35. $W = 2816,58 \text{ kJ}$, $P = 3535,75 \text{ W}$
36. $m = 1,469 \text{ Mt}$

A.4.7 Kapitel 7

1. $x = \frac{2\pi}{360^\circ}\varphi$; $\varphi = 60^\circ, x = 1,047 \text{ rad}$; $\varphi = 75^\circ, x = 1,309 \text{ rad}$; $\varphi = 240^\circ, x = 4,189 \text{ rad}$;
 $\varphi = 150^\circ, x = 2,618 \text{ rad}$; $\varphi = \frac{360^\circ}{2\pi}x$; $x = 4,32 \text{ rad}$, $\varphi = 247,5^\circ$
2. $f = 61,67\text{s}^{-1}$, $v = 96,87 \text{ m/s}$
3. $x = 2,5 \text{ rad}$, $\varphi = 143,24^\circ$
4. $\omega = 460080 \frac{\text{Umdr}}{\text{min}} = 48179,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
5. $\alpha = 18,85\text{s}^{-1}$
6. $v = 1,8 \text{ m/s}$
7. viel kleiner als 20 kg m^2
8. Ein Tag wird um etwa 0,555 s länger
9. $L = 90 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}$
10. $L = 4,2 \cdot 10^6 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}^2}{\text{s}}$
11. $v_1 = 57,83 \text{ km/s}$
12. $\frac{L_M}{L_E} = 0,132$
13. $\omega_2 = 5\pi \text{ s}^{-1}$, $\frac{E_{kr1}}{E_{kr2}} = 1,67$
14. $\omega_2 = 1,71 \text{ rad/s}$, $\omega_3 = 2,4 \text{ rad/s}$
15. $m_s = 551,6 \text{ kg}$
16. Um Trägheitsmoment möglichst groß zu machen, muß die Gesamtmasse möglichst weit weg von der Dreheachse. Das kann entweder ein dünner Kreisring oder dünnwandige Hohlzylinder sein. Für beide gilt: $I = mr^2$
17. $E_{trans} = 25 \text{ J}$, $E_{rot} = 25 \text{ J}$, $E_{kin} = 50 \text{ J}$
18. $E_{kin} = 164 \text{ kJ}$, $\frac{E_{Rader}}{E_{kin}} = 0,0488$ oder 4,88%
19. $v = 35 \text{ km/h} = 9,72 \text{ m/s}$, $E_{kin} = 3968,5 \text{ J}$, $\frac{E_{trans}}{E_{kin}} = 0,976$ oder 97,6%, $\frac{E_{rot}}{E_{kin}} = 0,024$ oder 2,4% ; $\Delta E = 236,2 \text{ J}$, $\frac{F_1}{F} = 0,94$ oder 94%; $E_{rot} = 141,7 \text{ J}$, $\frac{F_2}{F} = 1,024$ oder 102,4%
20. $\omega = 173,2 \text{ s}^{-1}$
21. $I = 0,0064 \text{ kg m}^2$, $M = 0,096 \text{ N m}$

A.4.8 Kapitel 8

1. $x_{MM} = 0,2285 \text{ m}$
2. $x_{MM} = 1,14 \text{ m}$
3. $\theta = 26,565^\circ$
4. $x_{MM,h} = 0,091 \text{ m}$, $x_{MM,v} = 1,136 \text{ m}$, $M = 17,647 \text{ kg}$
5. $E_{kin} = 960,4 \text{ J}$

6. $P = 1592,5 \text{ W}$
7. $P = 1000 \text{ W}$
- 8.
9. $M = 30 \text{ N m}$, - nach hinten gerichtet; $M = 23,96 \text{ N m}$ - nach hinten gerichtet; $M = 21,21 \text{ N m}$ - nach vorne gerichtet; Drehmoment ist max. wenn $\vec{r} \perp \vec{F}$, oder $\sin \theta = 1$.
10. $m_2 = 12 \text{ kg}$
- 11.
12. $F_k = 90 \text{ N}$
13. $h = 5,1 \text{ m}$
14. $W = 1,47 \cdot 10^6 \text{ J}$, $\Delta m = 0,193 \text{ kg}$
15. $W = 4,9 \cdot 10^4 \text{ J}$, $E = 24,5 \cdot 10^4 \text{ J}$, $\Delta m = 6,45 \text{ g}$
16. $W = 98 \text{ J}$ (an dem Mann)
17. $v = 0,81 \text{ m/s}$
18. $\omega_2 = 12,5 \text{ rad/s}$, $2T = 1 \text{ s}$, $h = 9,8 \text{ m}$; Ja, weil Sie in aufrechter Position ein größeres Drehmoment hat und deswegen höhere ω in der Tuck-Haltung erreichen kann.
19. $v = 37,6 \text{ m/s}$, $a = 25,25 \text{ m/s}^2$, $t = 1,28 \text{ s}$, $k = 73,5 \text{ N/m}$
- 20.

A.4.9 Kapitel 9

1. $p = 471,1 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $m = 962 \text{ kg}$
- 2.
3. $p = 3,94 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
4. $F_{GL} = 7,742 \text{ N}$, $F_{GW} = 6,762 \text{ N}$
5. $p = 1,49 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
6. $\Delta m = 51 \text{ kg}$
7. $F_2 = 75 \text{ N}$, $\Delta h_2 = 2 \text{ m}$
8. $\frac{V_W}{V_{Eis}} = 0,893$ oder $89,3\%$
9. $m_B = 1,835 \text{ kg}$, $m_B = 1,974 \text{ kg}$
10. $\rho_H = 0,467 \text{ g/cm}^3$
11. $h = 59,43 \text{ cm}$

A.4.10 Kapitel 10

1. $v_{max} = 3,125 \text{ m/s}$
2. $\dot{V} = 94,25 \text{ cm}^3/\text{s}$
3. $\dot{V} = 200 \text{ m}^3/\text{s}$, Volumenstrom verändert sich nicht, $v_2 = 2,78 \text{ m/s}$
4. $\dot{V} = Av = const$ - Volumenstrom bleibt unverändert. $\frac{v_1}{v_2} = 2,2$
5. $v_2 = 22,5 \text{ cm/s}$
6. $\frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} = 0,64$ oder 64%
7. $v_1 = \frac{9}{4}v$
8. $v_1 = 2,06 \text{ m/s}$
9. $v_1 = 3,13$, $x_1 = 7 \text{ m}$, $v_2 = 21,23 \text{ m/s}$, $x_2 = 13,6 \text{ m}$
10. $H = 15 \text{ m}$
11. $\Delta p(10) = 0,00064$ oder $0,064\%$, $\Delta p(20) = 256 \text{ Pa}$ oder $0,256\%$, $\Delta p(30) = 576 \text{ Pa}$ oder $0,576\%$, $\Delta p(40) = 1024 \text{ Pa}$ oder $1,024\%$
12. $F_A = 40\,000 \text{ N}$

13. $m_s = 0,23 \text{ kg} = 230 \text{ g}$
14. $\rho = 5877,55 \text{ kg/m}^3$
15. $F_{\text{Auftrieb}} = F_G$, $F_{\text{Vortrieb}} = F_{\text{Luftwiderstand}}$, $v = 6,5 \text{ m/s}$
- 16.
17. $P_3 = 0$, $P_4 = 72 \frac{\text{kW}}{\text{h}}$, $P_5 = 140,625 \frac{\text{kW}}{\text{h}}$, $P_6 = 243 \frac{\text{kW}}{\text{h}}$, $P_7 = 385,875 \frac{\text{kW}}{\text{h}}$, $P_8 = 576 \frac{\text{kW}}{\text{h}}$,
 $P_9 = 820 \frac{\text{kW}}{\text{h}}$, $E = \Sigma Pt = 1633783 \text{ kJ}$, $\bar{P} = 186,5 \text{ kW}$
18. $v = 1,28 \text{ m/s}$
- 19.
- 20.
21. $f = 1920 \text{ Hz}$
22. $\alpha = 65,6^\circ$
23. $\frac{F_W}{F_{W0}} = 4$, $\frac{P}{P_0} = 8$, $\frac{F_W}{F_{W0}} = 2,1$, $\frac{P}{P_0} = 3$
24. $v = 5 \text{ m/s}$ liefert $F_A = 136024 \text{ N}$ für Flettner und 1537.2 N für Druck; $v = 25 \text{ m/s}$ liefert
 $F_A = 680120 \text{ N}$ für Flettner und 38430 N für Druck
- 25.
26. $v_2 = 1200 \text{ km/h}$
27. $v_2 = 300 \text{ km/h}$, $v_2 = 5,16 \text{ km/h}$
28. Finger weg!!!
 $Re = \frac{Lv}{\nu}$ muss für das Original und ein Modell gleich sein. Also braucht so ein 1:3 Modell
Windstärke, die dreimal höher sind als für das Original. Und für eine Vitrine ist so ein Modell
immer noch zu groß.
29. $\Delta p = 3,7 \text{ Pa}$, $F_W = 1,96 \cdot 10^{-3} \text{ N}$
30. $\mu = 11,1 \text{ Pa s}$

A.4.11 Kapitel 11

1. $E = 0,8 \cdot 10^6 \text{ N/C}$
2. $Q = 6,4 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $N = 4$
3. $E_{kin} = 1,6 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 1 \text{ MeV}$, $v = 5,9 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $v = 1,38 \cdot 10^7 \text{ m/s}$
4. $F_{Coul} = 22,96 \cdot 10^{-9} \text{ N}$, $F_G = 1,01 \cdot 10^{-47} \text{ N}$, $k \frac{q_e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r}$
5. $W = QU = 3 \cdot 12 = 36 \text{ J}$
6. $N = 6,25 \cdot 10^{18}$
7. $F_{Coul} = 1,794 \cdot 10^{10} \text{ N}$ - Eine anziehende Kraft.
8. $E = 4,485 \cdot 10^9 \text{ N/C}$
9. $E = 5,1 \cdot 10^{11} \text{ N/C}$
10. $E = 2,15 \cdot 10^{13} \text{ N/C}$
11. $E = 0$
12. $F = 8 \cdot 10^{-16} \text{ N}$ $a = 4,8 \cdot 10^{11} \text{ m/s}^2$
13. $W = 27 \cdot 10^{-3} \text{ J} = 0,027 \text{ J}$
14. $d = 0,2 \text{ m}$
15. $U = 45 \text{ kV}$
16. $N = 6,25 \cdot 10^{12}$
17. $Q = 1,07 \cdot 10^6 \text{ C}$
18. $F = 2,296 \cdot 10^2 \text{ N}$, $F = 2,296 \cdot 10^{-8} \text{ N}$, Faktor 10^{10} größer.
19. $\frac{Q}{A} = 8,854 \cdot 10^{-5} \text{ C/m}^2$
20. $E = 10\,000 \text{ V/m}$, $Q = 8,854 \cdot 10^{-8} \text{ C}$
21. $C = 7,08 \cdot 10^{-7} \text{ F}$

22. $W = 3,54 \cdot 10^{-9} \text{ J}$
23. $F = 1,6 \cdot 10^{-14} \text{ N}$
24. $E = 5,69 \cdot 10^{-4} \text{ N/C}$
25. $U = 86 \text{ V}, W_{pot} = 86 \text{ eV}$
26. $Q = 3,264 \cdot 10^{-7} \text{ C}, W = 8 \cdot 10^{-12} \text{ W}$
27. $Q = 2,3 \cdot 10^{-3} \text{ C}, W = 0,2645 \text{ J}, P = 264,5 \text{ W}$
28. $n = 6$
29. $R = 150\Omega$
30. $R = 57,5\Omega$
31. $U = 3,6 \text{ V}$
32. $I = 8,33 \text{ A}$
33. $P = 920 \text{ W}$
34. $P = 1200 \text{ W}$
35. $R = 44\Omega$
36. $W = 432000 \text{ J} = 432 \text{ kJ}$
37. $R_{ges} = 200\Omega$
38. $R_{ges} = 200\Omega$
39. $R = 733\Omega$
40. $I = 0,33 \text{ A}$
41. $P = 11,5 \text{ W}$
42. $RC = t = 0,8 \text{ s}, R = 2 \cdot 10^6\Omega$
43. $R = 7,64G\Omega$
44. $I = 0,21 \text{ A}, R_{ges} = 1143\Omega, R = 45,7\Omega$
45. $U = 10 \text{ V}, U = 100 \text{ V}$
46. $F_{max} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ N}, a_{max} = 0,2 \text{ m/s}^2$
47. $Q = 49\mu\text{C}$
48. $F = 1,2 \cdot 10^{-21} \text{ N}, a = 1,3 \cdot 10^9 \text{ m/s}^2$
49. $F = 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ N}, a = 7,2 \cdot 10^{14} \text{ m/s}^2$
50. $N_2 = 30$
51. $\lambda = 1,25 \cdot 10^{-12} \text{ m}$
52. $\lambda = 0,122 \text{ m}$
53. $f_1 = 2,83 \cdot 10^{20} \text{ Hz}, f_2 = 3,2 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$
54. $f = 10^{15} \text{ Hz}$

Abbildungsverzeichnis

2.1	Ortsvektor und Verschiebungsvektor	15
2.2	Rechtssystem	18
2.3	Spatprodukt	20
2.4	Ebene Geometrie	23
2.5	Trigonometrische Funktionen	25
2.6	Grad- und Bogenmaß	26
2.7	Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus	27
3.1	Zufällige und systematische Fehler	36
3.2	Histogramm zur Darstellung von Meßwerten	36
3.3	Normalverteilung	38
3.4	Poisson-Verteilung	39
3.5	Funktion von zwei Variablen	42
4.1	Stroboskopaufnahme einer gradlinigen Bewegung	50
4.2	Weg-Zeit - und Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm zu Abb. 4.1	51
4.3	Gleichförmige und gleichförmig beschleunigte Bewegung	54
4.4	Unabhängigkeit der Bewegungen	57
4.5	Beschleunigung, Geschwindigkeit und Schnelligkeit	58
4.6	Affen-Schieß-Experiment	61
5.1	Schwere und träge Masse	66
5.2	Wechselwirkungsgesetz	69
5.3	Wechselwirkungsprinzip: Pferd und Wagen	72
5.4	Federpendel	75
5.5	Hangabtriebs- und Normalkraft	76
5.6	Skifahrer-Lawine	78
5.7	Zentrifugalkraft: radial oder tangential?	83
6.1	Schiefe Ebene und Hubarbeit	101
6.2	Arbeit beim Spannen einer Feder	102
6.3	Hebel, Wagenheber, Flaschenzug	103
6.4	Potentielle Energie und Bezugsniveau	104
6.5	Reflektion eines Tennisballs	107
6.6	Umwandlung verschiedener Energieformen	110
7.1	Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Abstand von der Drehachse	120
7.2	Rechtssystem	121
7.3	Drehmoment	122
7.4	Wippe als Beispiel fürs Drehmoment	124
7.5	Hebelarm und Abstand zur Drehachse	124
7.6	Baum als Hebel	125
7.7	Trägheitsmomente	127

7.8	Drehimpulserhaltung: Pirouette	128
7.9	Drehimpulserhaltung: Balanzierstange	128
8.1	Massenmittelpunkt als Schwerpunkt	135
8.2	Massenmittelpunkt bei zwei Punktmassen	136
8.3	Massenmittelpunkt und Unterstützung bei ausgedehnten Körpern	137
8.4	Bewegung Schwerpunkt	138
8.5	Impulserhaltung	138
8.6	Körpermodell – Trennstellen	139
8.7	Drehmoment Unterarm	140
8.8	Muskelmännchen	141
8.9	Skalierungsgesetze	143
8.10	Laufhaltung und Skalierung	143
8.11	Tetherball	145
8.12	Trägheitsmomente beim Turmspringer	145
8.13	Kräfte beim Laufen	146
8.14	Sprint	147
8.15	Weitsprung	147
8.16	Hochsprung	148
8.17	Skateboard	149
8.18	Fallende Katze	150
8.19	Fallende Katze – Modell	150
8.20	Leistungsfähigkeit Mensch	151
9.1	Pascal'sches Prinzip und Hebebühne	162
9.2	Herleitung hydrostatische Grundgleichung	163
9.3	Atmosphäre	164
9.4	Auftrieb	167
9.5	Stoned crocodile	168
9.6	Benetzung und Kapillarität	169
10.1	Bezugssysteme (Löwenzahnsamen)	174
10.2	Stromlinien in laminarer und turbulenter Strömung	175
10.3	Kontinuitätsgleichung	175
10.4	Kontinuitätsgleichung in verzweigten Röhren	176
10.5	Bernoulli-Gleichung	178
10.6	Verfahren zur Druckmessung	179
10.7	Natürliche Pitot-Rohre	180
10.8	Lüftung	181
10.9	Kräfte am Flügel	182
10.10	Segeln	183
10.11	Flügelprofil WEK	184
10.12	Gleitzahl	185
10.13	Windgeschwindigkeiten am WEK	186
10.14	Widerstandsläufer	187
10.15	Magnus-Effekt	188
10.16	Flettner-Rotor	188
10.17	Golfball (rotierend)	189
10.18	Frisbee	189
10.19	Turbulente und laminare Strömung (Toricelli)	190
10.20	Newton'sche Reibung	190
10.21	Wirbelbildung	193
10.22	Widerstandskraft	194
10.23	Widerstandsbeiwerte	195
10.24	Golfball (ingedellt)	196

10.25	Seeanemone	196
10.26	Ähnlichkeit	197
10.27	Reynoldszahl	198
10.28	kritische Reynoldszahlen	199
10.29	Flügel Schlag Möwe	200
11.1	Reibungselektrizität	210
11.2	Polarisierung	211
11.3	Influenz	212
11.4	Elektrische Felder	213
11.5	Potentielle Energie im elektrischen Feld	214
11.6	Schaltzeichen	216
11.7	Stromkreis, Analogie Wasserkreislauf	217
11.8	Serien- und Parallelschaltung Batterie	218
11.9	Magnetschwebbahn	219
11.10	Serienschaltung	220
11.11	Parallelschaltung	221
11.12	Kombination Serien- und Parallelschaltung	222
11.13	Potentialdifferenz und Strom im Körper	225
11.14	Magnetfeld Stabmagnet	226
11.15	Magnetfelder	227
11.16	Rechte-Hand Regel Magnetfeld	227
11.17	Magnetfelder um stromdurchflossene Drähte	228
11.18	Ferromagnetismus	229
11.19	Generator	230
11.20	Transformator	231
11.21	Elektromagnetische Welle	233
11.22	Lorentz-Kraft	235
12.1	Zutaten Schwingung	247
12.2	Fadenpendel	247
12.3	Federpendel	248
12.4	Unabhängigkeit von der Masse	250
12.5	Welle als gekoppelte Schwingungen	252
12.6	Welle als sich ausbreitende Störung	252
12.7	Harmonische Schwingung	253
12.8	Bewegung Seilelemente	253
12.9	Reflektion am festen Ende	254
12.10	Reflektion am losen Ende	255
12.11	Stehende Welle	256
12.12	Stehende Welle (offenen Enden)	257
12.13	Stehende Welle (offenes und geschlossenes Ende)	257
12.14	Chladn'sche Platte	258
12.15	Erdbebenwellen	259
12.16	Interferenz	260
12.17	Schwebung	261
12.18	Empfindlichkeit Ohr	262
12.19	Ruhender und bewegter Sender	263
12.20	Doppler-Effekt bei ruhendem Sender	264
12.21	Mach'scher Kegel	266
13.1	Elektromagnetische Welle	274
13.2	Felder in elektromagnetischer Welle	274
13.3	elektromagnetisches Spektrum	275
13.4	sichtbares Licht	275

13.5 Huyghens'sches Prinzip	276
13.6 Ebene Welle	277
13.7 Absorption	277
13.8 Bildkonstruktion am Spiegel	278
13.9 Reflektionsgesetz im Wellenbild	279
13.10 Brechungsgesetz und Fermat'sches Prinzip	280
13.11 Totalreflektion	280
13.12 Lichtleiter	281
13.13 Prismen und Feldstecher	281
13.14 Dispersion	282
13.15 Regenbogen	283
13.16 Linse aus Prismen	283
13.17 Linsen und Wellenfronten	284
13.18 Abbildungsgesetz Sammellinse	284
13.19 Linsenfehler	284
13.20 Sehwinkel	285
13.21 Bildkonstruktion Sammellinse	285
13.22 Bildkonstruktion Sammellinse	286
13.23 Bildkonstruktion Lupe	286
13.24 Kepler'sches Fernrohr	287
13.25 Mikroskop	288
13.26 Beugung	289
13.27 Beugung und Hindernisgröße	289
13.28 Auflösungsvermögen und Beugung	290
13.29 Interferenz	291
13.30 Interferenz am Doppelspalt	291
13.31 Interferenz am Gitter	292
13.32 Beugung am Einfachspalt	293
13.33 Newton'sche Ringe	294
13.34 Ölfilm	295
13.35 Polarisierung	296
13.36 Kombinierte Polarisationsfilter	296
13.37 Stereobilder mit polarisiertem Licht	297
13.38 Brewster'sches Gesetz	297
13.39 natürliches, monochromatisches und kohärentes Licht	298
13.40 Hologramm	299
13.41 Fresnel'sche Zonenplatte	299
13.42 Rekonstruktion Hologramm	300
13.43 Aufbau Hologramm	300
14.1 Atomspektren	307
14.2 Aufbau Photoeffekt	308
14.3 Photoeffekt und Wellenlänge	309
14.4 Beugungsmuster wenige Photonen	309
14.5 Orbitale	313
15.1 Zerfallsarten	319
15.2 Darstellung von Zerfallstypen in der Isotopenkarte	319
15.3 Energiespektrum beim β -Zerfall	321
15.4 Zerfallschema des ^{131}J	322
15.5 Zusammenhang zwischen Neutronen- und Protonenzahl für stabile und instabile Isotope	324
15.6 Zerfallsgesetz	325
15.7 Thorium-Zerfallskette	326
15.8 Wechselwirkung von Photonen mit Materie	328

15.9 Wirkungsquerschnitt	329
15.10Bethe-Bloch in Abhängigkeit von Energie und Teilchensorte	332
15.11Braggkurve eines α -Teilchens in Luft	333
15.12Energiedosis: auftreffende und absorbierte Strahlung	334
15.13Ionisationsdichte entlang der Teilchenspur	336
15.14RBW in Abhängigkeit vom LET	336
15.15Bildgebende Verfahren in verschiedenen Wellenlängenbereichen	347
15.16Schattenspiele	348
15.17Abtastverfahren bei der Computer-Tomographie	349
15.18Anatomische Studien	350
15.19Konfiguration einer PET-Kamera zur Aufnahme einer Einzelschicht	352

Tabellenverzeichnis

1.1	Vorsilben	6
1.2	Griechische Buchstaben	8
2.1	Wichtige Werte einiger Winkelfunktionen	25
2.2	Umwandlung einer Winkelfunktion in eine andere	26
2.3	Bogen- und Gradmaß	27
2.4	Wichtige Ableitungen	29
2.5	Wichtige Integrale	30
3.1	Irrtumswahrscheinlichkeit	41
4.1	Bewegung aus Abb. 4.1	51
5.1	Verschiedene Formen der Reibung	79
7.1	Zusammenhang Größen Translation und Rotation (skalar)	120
7.2	Zusammenhang Translation und Rotation (vektoriell)	130
8.1	Körpermodell	139
9.1	Druckabnahme in der Atmosphäre	165
11.1	Wirkung eines elektrischen Stroms im Körper	225
14.1	Quantenzahlen	314
15.1	Energiefreisetzung für verschiedene Zerfallsarten von ^{232}U	320
15.2	Beispiele für α -Strahler	320
15.3	Beispiele für β -Zerfall	322
15.4	Strahlungsarten, -eigenschaften, -abschirmung	323
15.5	Die vier Wechselwirkungen	324
15.6	Dosisbegriffe	334
15.7	Qualitätsfaktoren	335
15.8	LET in Standardgewebe in Abhängigkeit von Teilchenenergie und -sorte	337
15.9	Strahlungseffekte, die in Nachweis und Messung verwendet werden	338
15.10	Strahlenexposition in der BRD	340
15.11	Empfindlichkeit der Körperzellen gegenüber Strahlenschäden	346
15.12	Einfluss der Positronenreichweite auf das Auflösungsvermögen	350
15.13	Halbwertszeiten einiger Positronenemitter	351

Literaturverzeichnis

- [1] Allkofer, O.C., 1971: *Teilchendetektoren*, Thiemig, München [332](#)
- [2] Bendek, G.B., and F.M.H. Vilars, 1973: *Physics with illustrative examples from medicine and biology; vol. 1: mechanics*, Addison-Wesley, Reading, MA
- [3] Bendek, G.B., and F.M.H. Vilars, 1974: *Physics with illustrative examples from medicine and biology; vol. 2: statistical physics*, Addison-Wesley, Reading, MA
- [4] Bendek, G.B., and F.M.H. Vilars, 1979: *Physics with illustrative examples from medicine and biology; vol. 3: electricity and magnetism*, Addison-Wesley, Reading, MA
- [5] Bomford, C.K., I.H. Kunkler, and S.B. Sherriff, 1993: *Walter and Miller's Textbook of radiotherapy*, Churchill Livingstone, Edinburgh [336](#)
- [6] Bushong, S.C., *Magnetic resonance imaging - physical and biological principles*, Mosby [347](#), [350](#)
- [7] Cember, H., 1996: *Health Physics*, McGraw-Hill, New York [322](#), [338](#)
- [8] Coughlan, G.D., and J.E. Dodd, 1984: *The ideas of particle physics*, Cambridge University Press, Cambridge [319](#)
- [9] Damasio, H., 1995: *Human brain anatomy in computerized images*, Oxford University Press, Oxford [346](#)
- [10] Disput: Wieviele Tote durch Röntgenstrahlen?, *Bild der Wissenschaft 11/1995*, 112 [341](#)
- [11] Dörschel, B., V. Schuricht, and J. Steuer, 1992: *Praktische Strahlenschutzphysik*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg [336](#), [337](#)
- [12] Durey, A., 1997: *Physique pour les sciences du sport*, Masson, Paris [107](#), [139](#), [146](#), [147](#), [148](#)
- [13] Dyson, N., 1993: *Radiation physics with applications in medicine and biology*, Ellis Horwood, New York [333](#)
- [14] Faller, A., 1984: *Der Körper des Menschen*, dtv/Thieme, Stuttgart [140](#), [141](#)
- [15] Fercher, R.F., 1999: *Physik für Mediziner, Pharmazeuten und Biologen*, Springer, Wien
- [16] Glaser, R., 1996: *Biophysik*, UTB-G. Fischer, Jena [340](#)
- [17] Gonick, L., and A. Huffman, 1991: *The Cartoon Guide to Physics*, Harper Perennial, New York [58](#), [61](#), [69](#), [72](#), [210](#), [219](#), [235](#)
- [18] Goretzki, G., 1987: *Medizinische Strahlenkunde*, Urban & Schwarzenberg, München [328](#), [334](#), [349](#)
- [19] Grehn, J., and Krause, J., 1998: *Metzler Physik*, Schroedel, Hannover [290](#), [293](#), [296](#), [297](#), [299](#), [300](#), [313](#)

- [20] Gressmann, M., 2002: *Fahrradphysik und Biomechanik*, Moby Dick, Kiel 83
- [21] Hering, E., R. Martin, and M. Stohrer, 1995: *Physik für Ingenieure*, vdi, Stuttgart 169
- [22] Hewitt, P.G., 1998: *Conceptual Physics*, Addison Wesley, Reading NY 66, 89, 103, 110, 120, 122, 124, 127, 128, 164, 167, 168, 225, 227, 250, 252, 260, 275, 280, 281, 282, 283, 284, 294, 296, 297, 298, 308, 309
- [23] Heyde, K., 1994: *Basic ideas and concepts in nuclear physics*, Inst. of Physics Publishing, Bristol 319, 321
- [24] Hoffmann, M., 2002: *Sportklettern*, Panico 77
- [25] Kane, J.W., and M.M. Sternheim, 1978: *Life Science Physics*, Wiley, New York 137, 147, 148
- [26] Kirkpatrick, L.D., and G.F. Wheeler, 1998: *Physics – A world view*, Harcourt Brace, Fort Worth 138, 145, 150, 213
- [27] Krane, K.S., 1988: *Introductory nuclear physics*, J. Wiley, New York 320, 324, 325, 326
- [28] Krane, K.S., 1996: *Modern physics*, J. Wiley, New York 319, 321
- [29] Krauss, L.M., 1998: *Nehmen wir an, die Kuh ist eine Kugel ...*, dtv, München 50
- [30] Ladik, J., and W. Förner, 1994: *The beginnings of cancer in the cell*, Springer, Berlin 342
- [31] Lang, D.D., 1980: *The physics around you*, Wadsworth Publ., Belmont, CA
- [32] Leitgeb, N., 1990: *Strahlen, Wellen, Felder*, Thieme, Stuttgart 346
- [33] Lenné, H., 1995: Strahlenphysikalische Grundlagen, natürliche und künstliche Strahlenexposition, Messtechnik etc., *Unterlagen zum großen Strahlenschutzkurs IV*, Strahlenschutzseminar an der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel 340
- [34] Lindner, H., and P. Kneschaurek, 1996: *Radioonkologie*, Schattauer, Stuttgart 343
- [35] Marion, J.B., and W.F. Hornyek, 1985: *General physics with bioscience essays*, J. Wiley, New York
- [36] McMahan, T.A., and J.T. Bonner, 1985: *Form und Leben – Konstruktionen vom Reißbrett der Natur*, Spektrum der Wissenschaft, Heidelberg 143
- [37] Menschede, A., 2001: *Gerthsen Physik*, Springer, Berlin
- [38] Minnaert, M., 1986: *de natuurkunde van 't vrije veld*, Thieme, Zutphen
- [39] Munter, W., 2003: *3 mal 3 Lawinen*, Pohl und Schellhammer 78
- [40] Pitka, R., S. Bohrmann, H. Stöcker, und G. Terlecki, 2001: *Physik – der Grundkurs*, Harri Deutsch, Frankfurt/M.
- [41] Posner, M.I., and M.E. Raichle, 1996: *Bilder des Geistes - Hirnforscher auf den Spuren des Denkens*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 346, 350
- [42] PSSC – Physical Science Study Committee, 1975: *PSSC Physik*, Vieweg, Braunschweig 50, 57, 83, 143
- [43] Radon, J., 1917: Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Phys. Kl.* 69, 262 348

- [44] Schreiner, J., 1978: *Physik für die Sekundarstufe 2, Teil 2*, Diesterweg, Frankfurt/M [75](#)
- [45] Sternheim, M.M., and J.W. Kane, 1986: *General physics*, John Wiley, New York, 1986
- [46] Swartz, C.E., 1981: *Phenomenal physics*, J. Wiley, New York
- [47] Tait, W.H., 1980: *Radiation detection*, Butterworths, London [329](#)
- [48] Vogel, S., 1994: *Life in moving fluids*, Princeton University Press, Princeton NY [8](#), [86](#), [125](#)
- [49] Vogel, H., 1995: *Gerthsen Physik*, Springer, Berlin [324](#), [335](#)
- [50] von Krosigk, H., and H. Tscharn: *Absolut Beginners*, Monster Verlag/Tropen Verlag [149](#)
- [51] Ward-Smith, A.J., 1984: *Biophysical aerodynamics and the natural environment*, Wiley, Chichester [198](#), [199](#), [200](#)
- [52] Webb, S. (ed.), 1988: *The physics of medical imaging*, Institute of Physics Publishing, Bristol [350](#), [352](#)
- [53] Webb, S., 1993: *The physics of three-dimensional radiation therapy*, Institute of Physics Publishing, Bristol
- [54] Whitt, F.R., and D.G. Wilson, 1982: *Bicycling Science*, MIT Press, Cambridge MA [151](#), [152](#)
- [55] Willis, D., 1997: *Der Delphin im Schiffsbug*, Birkhäuser, Basel
- [56] Wüthrich, Franziska, 2001: *Lebenswelt Alpen*, Sauerländer, Aarau [137](#)
- [57] Zananiri, C., 2002: *Sport et physique*, Ellipses, Paris [150](#)

Index

- α -Strahler, 320
- α -Strahlung, 318
- α -Teilchen, 306, 319
- α -Zerfall, 318, 319
 - Linienspektrum, 321
- β -Strahler, 322
- β -Strahler, 321
- β -Strahlung, 318
- β -Zerfall, 319, 320
 - kontinuierliches Spektrum, 321
 - Neutrino, 321
- γ -Strahlung, 318
- γ -Zerfall, 322
- Ähnlichkeit
 - geometrische, 197
 - hydromechanische, 197
 - strömungsmechanische, 198
- Ähnlichkeitsbetrachtung, 197
- Ähnlichkeitszahl, 199
- Äquivalentdosis, 333, 335
- Ölfilm
 - Farben, 294
 - Fraben, 295
- Überlebenskurven, 345
- Überschallflugzeug, 266
- Überschallknall, 266
- äußeres Produkt, 18

- Abbildungsgesetz, 287, 290, 361
- Abbildungsgesetze, 284
- Aberration
 - chromatische, 285
 - sphärische, 285
- Ableitung, 30
 - partielle, 42
- Abschwächungsgesetz, 260, 277
- Abschwächungskoeffizient, 330
- Absorption, 260, 277, 361
- Absorptions-Linienspektrum, 307
- Absorptionsgesetz, 329, 362
- Absorptionskoeffizient, 277
- Abszisse, 25
- Abweichung
 - systematische, 35
 - zufällige, 35
- Adhäsion, 168

- Adsorption, 168
- aerodynamischer Audtrieb, 187
- aktinide, 315
- Aktionsgesetz, 67, 72, 85, 101, 126, 160, 356
- Aktionsgesetz, 209
- Aktivität, 326, 362
 - partielle, 326
- allgemeines Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz, 356
- allgemeines Weg-Zeit-Gesetz, 356
- Alpha-Strahler, 320
- Alpha-Strahlung, 318
- Alpha-Teilchen, 319
- Alpha-Zerfall, 318
- Alpha-Zerfall, 319
 - Linienspektrum, 321
- Altersbestimmung, 325
- Alterstumor, 342
- Am-Wind-Segeln, 182
- ame, 323
- Ampere, 208
 - SI-Einheit, 6
- Ampere'sche Gesetz, 233
- amu, 323
- Anfahrwirbel, 182
- Annahmen, 3
- Ansprechschwelle, 338
- Anstellwinkel, 184, 185
- Antenne, 233
- Antineutrino, 321
- Antreffwahrscheinlichkeit, 313
- Apoptose, 345
- Arbeit, 18, 224, 355, 357, 359
 - allgemeine Definition, 100
 - Definition, 99
 - Einheit, 99
 - elektrische, 359
 - elektrisches Feld, 208
 - gespeicherte, 100, 103
- Archimedisches Prinzip, 166, 167
- Argument, 24
- Arterie, 203
- Arteriosklerose, 176, 192
- astronomisches Fernrohr, 287
- Atmosphäre
 - Zusammensetzung, 165

- atomare Masseneinheit, 323
- Atomhülle, 307
- Atomkern, 310
- Auflösungsvermögen, 289, 351, 361
 - Mikroskop, 290
- aufloesungsvermoegen, 350
- Auftrieb, 166, 167
 - aerodynamischer, 187
 - hydrodynamischer, 180, 358
 - hydrostatischer, 358
- Auftriebsbeiwert, 184
- Auftriebskraft, 184
 - Definition, 184
- Auger Elektronen, 322
- Ausbreitungsgeschwindigkeit, 252
- Ausfallswinkel, 278
- Auslenkung, 247

- Bälle
 - rotierende, 189
- Bahndrehimpuls, 311
- Bahndrehimpulsquantenzahl, 314
- Bakterienpopulation, 33
 - Wachstum, 74
- Balanzierstange, 128
- barometrische Höhenformel, 164, 358
- Basis, 27
- Basiseinheiten, 5
- Basisgrößen
 - elektrische, 207
- Batterie, 217
- Benetzung
 - unvollkommene, 169
 - vollkommene, 169
- Bequerel, 318, 326
- Bernoulli Gleichung, 178
- Bernoulli Prinzip, 180
- Bernoulli-Gleichung, 358
- Beschleunigung, 52, 354, 356
 - instantane, 52
- Beschleunigungs-Zeit-Diagramm, 53
- Beschleunigungsarbeit, 104, 105, 357
 - Rotation, 129
- Beshcleunigungsarbeit, 355
- Beta-Strahler, 321, 322
- Beta-Strahlung, 318
- Beta-Zerfall, 319, 320
 - kontinuierliches Spektrum, 321
 - Neutrino, 321
- betaminus, 321
- betaplus, 321
- Bethe-Bloch-Beziehung, 331, 332, 336
- bethebloch, 331
- Betrag, 17
- Betrag eines Vektors, 15

- Beugung, 260, 288, 289
 - Auflösungsvermögen, 289
 - von Elektronen, 308
- Beugungsgitter, 292
 - CD als, 292
 - Reflektion, 292
- Beugungsmaximum, 292
- Beugungsminimum, 292
- Beugungsmuster, 288
- Bewegung
 - gleichförmig beschleunigt, 56
 - gleichförmig gradlinig, 55
 - gradlinig beschleunigt, 68
 - gradlinige, 54
- Bewegungsenergie, 105, 106, 129
- Bewegungsgleichung, 72, 73
- Bewegungsgröße, 66, 67, 356
- Bezugssystem, 173
- Bild
 - virtuelles, 278, 284, 286
- Bildgröße, 284
- Bildkonstruktion, 286
- Bildweite, 284, 354
- Bindungsenergie, 318, 319, 327
- Binominalkoeffizient, 21
- Binomische Formeln, 21
- Binomischer Satz, 21
- Blasenkammer, 318
- Blatt
 - Fallen eines, 202
- Bogenmaß, 26, 27, 119
- Bohr'sche Postulate, 310
- Bohr'sches Atommodell, 310
 - Probleme, 312
 - Vorteile, 312
- Brachytherapie, 323
- Bragg-Kurve, 333
- Braggkurve, 333
- braggkurve, 333
- branching-ratios, 326
- Brechkraft, 283
- Brechung, 260, 279
 - kritischer Winkel, 280
- Brechung., 297
- Brechungsgesetz, 279, 280, 361
- Brechungsindex, 279, 283, 285, 355, 360
 - Brewster'sches Gesetz, 298
 - Hologramm, 300
- Brennweite, 284, 354
- Brewster'scher Winkel, 298
- Brewster'sches Gesetz, 298
- Brewster-Winkel, 361

- caesium137, 322
- Candela

- SI-Einheit, 6
- Cavendish, 84
- charakteristische Röntgenstrahlung, 322
- Chladni'sche Klangfiguren, 258
- chromatische Aberration, 285
- Chromosomenmutation, 344
- Compton-Effekt, 327
- Compton-Streuung, 328
- Compton-Wellenlänge, 328
- Computer-Tomographie, 348
- Computersimulation, 4
- Coulomb, 207
- Coulomb-Abstoßung, 319
- Coulomb-Feld, 331
- Coulomb-Gesetz, 208, 212
 - Gravitationsgesetz, 209
- Coulomb-Kraft, 210, 213, 311, 359
- CT, 348
- CTabtabverfahren, 348, 349
- CTgeneration, 348, 349
- Curie, 326
- Cut-and-Catch Modell, 344

- de Broglie, 310
- de Broglie-Wellenlänge, 361
- de-Broglie Welle, 313
- Definitionsbereich, 24
- Delphinhaut, 196
- Dichte, 161, 174, 354, 358
 - Energied., 161
 - Kraftd., 161
 - Massend., 161
- Dichtefunktion, 37
 - Messwerte, 37
- Dielektrikum, 223
- Dielektrizitätszahl, 223
- Differential, 28
- Differentialgleichung, 74, 80, 81
 1. Ordnung, 74, 80
 2. Ordnung, 74
 - gekoppelte, 74
- Differentialquotient, 28
- Differenzenquotient, 28
- Dimensionsbetrachtung, 198
- Dioptrie, 283
- Dispersion, 282
- Domänen, 228
- Doppler-Effekt, 265
- Doppelbrechung, 298
- Doppelspalt, 292, 361
- Doppelstrangbruch, 335, 336, 343
- Doppler-Effekt, 263, 360
- Doppler-Effekts, 266
- Dosimeter, 339
- dosimeter, 339

- Dosis, 333
- Dosis-Effekt-Kurven, 345
- Dosis-Effektkurven, 342
- Dosisumrechnungsfaktor, 334
- Drehimpuls, 126, 311, 355, 357
- Drehmoment, 123, 126, 209, 357
- Drehung der Polarisationssebene, 298
- Drehwinkel, 354
- Dreieck, 23
- Druck, 161, 358
 - dynamischer, 178
 - statischer, 178
- Druckarbeit, 178
- Druckhöhe, 192
- Druckkraft, 191, 197
- Drucksonde, 179
- Druckwiderstandsbeiwert, 194
- Druckwiderstandskraft, 194
- dynamischer Druck, 178

- ebene Welle, 276
- Eindringtiefe, 323, 330
- Einfachspalt, 293, 294
- Einfallswinkel, 278
- einfallshuelle, 321
- Einheitsvektor, 15, 31, 354
- Einheitsvektor in Richtung \vec{v} , 354
- Einzelmessung
 - Genauigkeit, 40
 - mittlerer Fehler, 40
- Einzelphotonen-Emissions-Tomographie, 347
- Einzelstrangbruch, 335, 343
- Eisbär
 - Lichtleiter, 281
- elastische Streuung, 327, 328
- elastischer Stoß, 87, 106
- elektrische Feldstärke, 354, 359
- elektrische Ladung, 208
- elektrische Leistung, 224
- elektrische Spannung, 208
- elektrische Stromstärke, 207
- elektrischer Shock, 225
- elektrischer Strom, 208
- elektrischer Widerstand, 208
- elektrisches Feld, 207, 210, 213, 222
 - Gauß'sches Gesetz, 232
 - Gravitationsfeld, 209
 - Richtung, 208
- elektrisches Potential, 208, 215, 359
- Elektromagnet, 220, 228
- elektromagnetische Induktion, 230
- elektromagnetische Wechselwirkung, 322, 324
- elektromagnetische Welle, 233, 246, 274, 275
 - Ausbreitungsrichtung, 274
 - Felder, 274

- Transversalwelle, 252
- elektromagnetisches Spektrum, 275
- Elektromotor, 230
- elektromotorische Kraft, 230
- Elektron
 - stehende Welle, 313
- Elektronenvolt, 215
- Elektroskop, 212
- Elementarladung, 207, 354, 355
- Elementarwelle, 276–278, 289
- elkinderholung, 344
- Emission, 347
- Emissions-Linienspektrum, 307
- Endgeschwindigkeit, 355
- Energie, 100, 103, 307, 354
 - Eineht, 100
 - elektrische, 106, 231
 - Elektron, 311
 - Feder, 357
 - Frequenz, 309
 - Generator, 231
 - im Kondensator, 222
 - kinetische, 87, 105, 107, 129, 354, 357
 - mechanische, 107
 - Photon, 309, 361
 - potentielle, 104, 107, 208, 354, 357
 - Rotation, 105, 129, 358
 - Wellenlänge, 309
- Energie-Quanten, 308
- Energieabschwächungskoeffizient, 331
- Energieauflösung, 337
- Energiedichte, 161, 178, 185
- Energiedosis, 333, 334
- Energieerhaltung, 106, 178, 357
 - Pendel, 248
- Energiequantenzahl, 314
- Energieverlust, 331
- Energieverlustbeziehung, 331, 332
- energieverlustbeziehung, 331
- epsilon, 321
- Erdbebenwelle, 252
- Erdbebenwellen, 259
- Erdbeschleunigung, 355
- Erfahrungswissenschaft, 2
- Ergänzung
 - quadratische, 22
- Erhaltungssätze, 99
- Ersatzwiderstand, 221
- Euler'sche Zahl, 27
- Experiment, 4
- Exponent, 27
- Exponentialfunktion, 27, 80
- exponentielles Wachstum, 31
- Exzisions-Repair, 344
- Füllhalterdosimeter, 339
- Fadenpendel, 247, 250, 360
 - Frequenz, 250
 - Kreisfrequenz, 250
 - Periodendauer, 250
- Fahrrad
 - Kurvenfahren, 83
- Fahrraddynamo, 231
- Faktorregel, 28
- Fakultät, 21
- Farad, 209
- Faraday'sches Induktionsgesetz, 232
- Feder, 73
 - ideale, 73
- Federkonstante, 73, 355
- Federkraft, 73, 354, 356
- Federpendel, 248, 360
 - Frequenz, 249
 - Kreisfrequenz, 249
 - Periodendauer, 249
 - Schwingungsdauer, 76
- Federwaage, 73
- Fehler
 - statistische, 35
 - systematische, 35
 - zufällige, 35
- Fehlerfortpflanzung, 42
 - Multiplikation, 44
 - Multiplikation mit einer Konstanten, 44
 - Potenzgesetz, 44
 - Summe, 43
- Feld, 209
 - elektrisches, 207, 210, 213, 222
 - Richtung, 208
 - konservatives, 214
 - magnetisches, 209
- Feldstärke
 - elektrische, 359
 - Gravitationsfeld, 208
- Feldstecher, 282
- Fermat'sches Prinzip, 279
- Fermi's goldene Regel, 321
- Fermi-Thomas-Modell, 331
- Fermionen, 324
- Fernrohr, 285, 288
 - astronomisches, 287
 - galileisches, 287
 - holländisches, 287
 - Kepler'sches, 287
- Filmdosimeter, 339
- Fläche, 23, 354
- Flüssigkeitselement, 161
- Flüssigkeitsreibung, 79
- Flettner-Rotor, 188

- Fliehkraft, 82
 Fluidität, 191
 Flunder, 180
 Fluss
 magnetischer, 231
 Flussröhre, 175
 Fraktionierung, 344
 Frequenz, 76, 231, 354, 357, 360
 Energie, 309
 Fadenpendel, 250
 Federpendel, 249
 Frequenzbedingung, 311
 Fresnel'sche Zonenplatte, 299
 Frisbee, 189
 Froude'sche Vortriebs-Effizienz, 177
 Froudezahl, 199
 Funktion, 24
 analytische Darstellung, 24
 explizite Darstellung, 24
 implizite Darstellung, 24
 Parameterdarstellung, 24
 transzendente, 25, 27
 trigonometrische, 25
 Funktionsgleichung, 24
 Funktionswert, 24

 Galilei'sches Fernrohr, 287
 Gamma-Strahlung, 318
 Gamma-Zerfall, 322
 Gammastrahlung, 234, 275
 Gangunterschied, 291, 293, 294
 Ganzkörperbestrahlung, 335
 Gauß'sche Normalverteilung, 37
 Gauß'sches Gesetz
 elektrisches Feld, 232
 magnetisches Feld, 232
 Gegenstandsgröße, 284
 Gegenstandsweite, 284, 355
 Gegenvektor, 16
 Geiger-Nuttall, 320
 Geiger-Nuttall-Regel, 320
 Geiger-Zähler, 339
 Gelitreibungskoeffizient, 354
 gemischtes Produkt, 20
 Genauigkeit der Einzelmessung, 40
 Generator, 230
 geometrische Optik, 276
 Geopotential, 208
 Gesamtaktivität, 327
 Gesamtdosis, 339
 Gesamtdruck, 165, 178
 Messung, 179
 Gesamtenergie, 354
 Gesamtimpuls, 85
 Gesamtkapazität, 223

 Gesamtwiderstand, 220
 Gesamtzerfallswahrscheinlichkeit, 326
 Geschwindigkeit, 50, 174, 355, 356
 mittlere, 50
 Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm, 53
 Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz, 73
 gleichförmig gradlinige Bewegung, 55
 gradlinige Bewegung, 55
 Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz, 54
 Geschwindigkeitsgradient, 191
 Gewicht, 67
 Masse, 67
 Gewichtskraft, 67, 73, 83, 354
 Gitterkonstante, 292
 Glühlampe, 218
 Gleichspannung
 pulsierende, 231
 Gleichspannungsquelle, 217
 Gleitreibung, 77, 356
 Gleitreibungskoeffizient, 77, 78
 Gleitreibungskraft, 354
 Gleitwert, 185
 Gleitzahl, 184, 185
 Golfball
 Dellen, 195
 Größenordnung, 6
 Gradmaß, 26
 Gravitation, 324
 Gravitationsbeschleunigung, 73, 84, 355
 Gravitationsdrehwaage, 84
 Gravitationsfeld, 67, 208
 elektrisches Feld, 209
 Feldstärke, 208
 Gravitationsgesetz, 208, 212, 356
 Coulomb-Gesetz, 209
 Gravitationskonstante, 84
 universelle, 354
 Gravitationskraft, 209
 Gravitationskraft, 83, 101
 konservative Kraft, 101
 Gravitationspotential, 208
 Gravitationsgesetz
 allgemeines, 84
 Grenzflächeneffekt, 168
 Grundfrequenz, 259
 Grundgleichung
 hydrostatische, 358
 Grundgrößen, 5
 Grundschiwingung, 255
 Grundzustand, 322

 Höhenkrankheit, 166
 Höhenstrahlung, 340
 Hörschwelle, 262
 Hüllenelektron

- Einfang, 321
- Hadronen, 324
- Haftreibung, 77
- Haftreibungskoeffizient, 77, 78, 354
- Haftreibungskraft, 354
- Hagen–Poiseuille, 191
- Hagen–Pouseuille, 191
- Hai, 196
- Haischuppenüberzug, 196
- Halbwerttiefe, 330
- Halbwertszeit, 325, 326, 362
- Haltearbeit, 103
- Hangabtriebskraft, 76, 354, 356
- Hangneigung, 78
- harmonische Welle, 253
- Hauptquantenzahl, 314
- Hebelarm, 123
- Hebelgesetz, 124
- Heisenberg'sche Unschärferelation, 310, 320
- Herzschrittmacher, 223, 244
- Himmelslicht, 296
- Histogramm, 36, 37
- holländisches Fernrohr, 287
- Hologramm, 299, 300
 - Brechungsindex, 300
- Holographie, 298, 299
- Hooke'sches Gesetz, 73
- Hubarbeit, 99, 100, 104, 355, 357
- Hubschrauber, 202
- Huyghens'sches Prinzip, 276, 289
- hydrodynamische Ähnlichkeit, 197
- hydrodynamischer Auftrieb, 180, 358
- hydrodynamisches Paradoxon, 2, 180
 - Fliegen, 181
- hydrostatische Grundgleichung, 163, 179
- hydrostatischer Auftrieb, 358

- Impuls, 66, 67, 355, 356
- Impulsübertrag, 331
- Impulserhaltung, 85, 106
 - elastischer Stoß, 357
 - inelastischer Stoß, 357
- Induktion
 - elektromagnetische, 230
- inelastische Streuung, 327
- inelastischen Stoß, 107
- inelastischer Stoß, 86
- Influenz, 212
- Infrarot-Strahlung, 275
- inneres Produkt, 17
- Insektenflügel, 184
- Inteferenz
 - destruktive, 276
- Integral, 31
 - bestimmtes, 30
 - unbestimmtes, 30
- Integration
 - über eine Nullstelle, 30
- Integrationskonstante, 29
- Intensität, 361
- Interferenz, 260, 276, 290, 294
 - Ölfilm, 294, 295
 - dünne Schichten, 294
 - destruktive, 290
 - konstruktive, 276, 290
 - Seifenblase, 295
 - Seifenblasen, 294
- Interferenzmuster, 292, 300, 309
- interne Konversion, 322
- interner Photoeffekt, 322
- Interphase-Tod, 345
- Ionendosis, 333, 334
- Ionisation, 327
- Ionisationsdichte, 336
- Ionisationsenergie
 - mittlere, 331
- Ionisationskammer, 339
- Irrtumswahrscheinlichkeit, 41
- Isobare, 324
- Isodiophere, 324
- Isomere, 324
- isomere Übergänge, 322
- isomere Zustände, 322
- Isotone, 324
- Isotop, 324
- Isotope, 324
- Isotopenkarte, 318, 319

- Jäger–Beute–Modell, 74
- Joule, 99, 100

- Kapazität, 209, 222, 354, 359
 - Plattenkondensator, 223
- kapillare Steighöhe, 170
- Kapillarität, 169
- kartesische Koordinaten, 15
- Kelvin
 - SI-Einheit, 6
- Kepler'sches Fernrohr, 287
- KERMA, 334
- Kernspinresonanztomographie, 347
- Kettenregel, 29
- Killerbienen, 201
- Kilogramm
 - SI-Einheit, 6
- kinematische Viskosität, 191
- kinematische Zähigkeit, 191
- kohärentes Licht, 298
- Kohäsion, 168
- Kommutator, 231

- komplanar, 20
 Kondensator, 215, 222
 Kapazität, 209
 Parallelschaltung, 360
 Reihenschaltung, 359
 konservative Kraft, 101
 konservatives Feld, 214
 Kontinuitätsgleichung, 175, 358
 Aufspaltung d. Flussröhre, 176
 inkompressibles Medium, 176
 verzweigende Systeme, 176
 Konversionselektron, 322
 Konzepte, 3
 Koordinaten
 kartesische, 15
 Kosinus, 25
 Krümmungsradius, 355
 Kraft, 66, 354
 Definition, 65
 konservativ, 101
 rücktreibende, 247
 Kraftdichte, 161
 Kraftmesser, 73
 Kraftstoß, 69, 85, 356
 Kreis, 23
 Kreisbahn
 Elektron, 311
 Kreisfrequenz, 231, 249, 354
 Fadenpendel, 250
 Federpendel, 249
 Kreiskegel, 24
 Kreuzprodukt, 15, 18, 20, 31
 kartesische Koordinaten, 19
 kritischer Winkel, 280
 Kugel, 24
 Kugelfallviskosimeter, 80, 193
 Kurvenfahren, 83

 Länge, 355
 SI-Einheit, 5
 Labormodelle, 4
 Ladung, 209, 359
 Definition, 207
 elektrisch, 208
 Ladungen
 Speicher, 222
 Ladungsdichte, 232
 Ladungserhaltung, 211
 Lageenergie, 104, 105
 Lambert-Bouguer-Beer'schen Gesetz, 330
 laminare Strömung, 175
 lanthanide, 315
 Lawine
 Schneebrett, 78
 Lawineneffekt, 339

 Leistung
 Strömung, 358
 Leistung, 100, 110, 129, 177, 185, 194, 224,
 355, 357–359
 Einheit, 100
 elektrische, 224, 359
 Leistungsbeiwert, 185, 186
 maximaler, 186
 Lenz'sche Regel, 233
 Leptonen, 324
 LET, 331, 336, 337
 Licht, 234
 kohärentes, 298
 monochromatisch, 298
 natürliches, 298
 Lichtgeschwindigkeit, 279, 354, 355
 Lichtleiter, 281
 Eisbär, 281
 Lichtmaschine, 231
 Lichtstärke
 SI-Einheit, 6
 Lichtstrahl, 277
 Lichtwelle, 288
 Lichtwellen, 246
 linabschwächungskoeff, 330
 linear polarisiert, 295
 linearer Energie-Transfer LET, 336
 linearer Energietransfer LET, 331
 Linienspektrum, 307
 Linse, 283, 284
 achsenparalleler Strahl, 286
 bikonvex, 283
 Bildkonstruktion, 286
 Krümmungsradius, 283
 Mittellebene, 286
 optische Achse, 286
 Linsenmacherformel, 285
 Linsenmachergleichung, 283, 361
 Logarithmus, 27
 dekadischer, 27
 natürlicher, 27
 Longitudinalwellen, 252
 Lorentz-Kraft, 234, 360
 Lorentzkraft, 209
 Luftkerma, 334
 Luftwiderstand, 357
 Luftwiderstandskraft, 354
 Lupe, 284–286, 288

 Maßeinheit, 5
 Maßzahl, 5
 Mach'scher Kegel, 266, 360
 Magnetfeld, 209
 magnetisches Feld, 209
 Gauß'sches Gesetz, 232

- magnetisches Moment, 228
- Magnetschwebebahn, 220
- Magnus-Effekt, 182, 189
 - Pflanzensamen, 189
- Magnus-Effekt, 358
- Mass
 - schwere, 67
- Masse, 66, 87, 209, 355
 - Erde, 355
 - Gewicht, 67
 - schwere, 87
 - SI-Einheit, 6
 - Sonne, 355
 - träge, 67, 87
- Massenabschwächungskoeffizient, 330, 331
- Massenanziehung, 84
- Massenbedeckung, 330
- Massendichte, 161
- Massenerhaltung, 175
- Massenmittelpunkt, 49, 135, 358
- Massenpunkt, 49, 59
- Massenstrom, 175, 192
- Materiewelle, 246, 308, 361
- Matriewelle, 310
- Maxwell'sche Gesetze, 232
- Mehrtrefferprozesse, 343
- metastabile Zustände, 322
- Meter
 - SI-Einheit, 5
- Mikroskop, 288, 290
- Mikrowellen, 234, 275
- Mikroskop
 - Auflösungsvermögen, 290
- minimalionisierend, 332
- Mitose, 342
- Mittelwert, 36, 40
 - experimenteller, 36, 37, 40
 - Fehler des, 40
 - Gauß-Verteilung, 37
 - gemessener, 37
 - Standardabweichung des, 40
 - Vertrauensbereich, 41
 - wahrer, 37
- Mol
 - SI-Einheit, 6
- Moment
 - magnetisches, 228
- Momentangeschwindigkeit, 52
- monochromatisches Licht, 298
- Monotonie, 27
- Mutation, 344
- Mutternuklid, 327
- Myonen, 324
- Nachweiswahrscheinlichkeit, 338
- Nahpunkt, 287
- natürliches Licht, 298
- Nebenbogen, 282
- Nebenquantenzahl, 314
- Neigung, 354
- Neutrino, 321, 324
- neutrino, 321
- Neutron, 319, 323
- Newton
 - Einheit, 66
- Newton'sche Reibung, 79, 81
- Newton'sche Ringe, 294, 361
- Newton'sches Reibungsgesetz, 190, 191
- Newtonmeter, 99, 100
- Normalkraft, 76, 77, 355
- Nuklearmedizin, 323
- Nukleonen, 324
- Nuklid, 318
- Nuklidkarte, 324
- Nullstelle
 - und Integration, 30
- Nullvektor, 15, 16
- Oberfläche, 23, 355
- Oberflächenenergie, 168
 - spezifische, 168
- Oberflächenspannung, 168
- Oberschwingung, 256
- Oberwellen, 259
- Objektiv, 287
- Objektwelle, 299, 300
- Ohm, 208
- Ohm'sches Gesetz, 218
- Okular, 287
- optisch dünneres Material, 279
- optisch dichteres Material, 279
- optische Achse, 286
- optische Tiefe, 330
- Orbital, 313
- Ordinate, 25
- Orgelpfeife, 257
- Orientierungsquantenzahl, 314
- Orthogonalität, 17
- Ortsvektor, 14, 15, 355
- p53, 345
- Paarbildung, 328, 329
- Parallelepipet
 - Volumen, 20
- Parallelität, 19
- Parallelogramm, 23
 - Fläche, 19, 20
- Parallelschaltung, 221, 359
 - Kondensatoren, 223
- Parametergleichungen, 24

- Partialdruck, 165
 Pauli-Prinzip, 314
 pauliprinzip, 314
 Periode, 360
 Periodendauer
 Fadenpendel, 250
 Federpendel, 249
 Periodensystem, 314
 Permanentmagnet, 228
 Permittivitätszahl, 223
 PET, 352
 Pflanzensamen
 Magnus-Effekt, 189
 Phänomene, 3
 Phasenhologramm, 300
 Phasensprung, 254
 Photoabsorptionskoeffizient, 327
 Photoeffekt, 308, 327, 328
 interner, 322
 Photon, 307, 308
 Energie, 361
 Pirouette, 128
 Pitot-Rohr, 179
 Planck'sches Wirkungsquantum, 309
 Planetenbewegung, 84
 Plattenkondensator, 223, 359
 Poisson-Verteilung, 39
 Polardiagramm, 184
 Polarimeter, 298
 Polarisation, 260, 295, 297
 Brewster'sches Gesetz, 298
 Polarisationsebene
 Drehung, 298
 Polarisationsfilter, 296
 polarisiert
 linear, 295
 Polarisierung, 212
 Poly-Nukleotid-Ligase, 344
 Populationsdynamik, 74
 Positron, 321, 329
 positron, 329
 Positronen-Emissions-Tomographie, 350
 Positronen-Emissions-Tomographie (PET), 347
 Positronen-Emissions-Tomographie PET, 325
 Positronenemitter, 351
 positronenreichweite, 350
 Potential
 elektrisches, 208, 215, 359
 Potentialdifferenz, 208, 215, 224
 Potentialgefälle, 208
 Potentialtopf, 313, 320
 Prandtl'sches Staurohr, 179
 preiodsystem, 314
 Primärseite, 231
 Prisma, 282
 Produkt
 äußeres, 18
 gemischtes, 20
 inneres, 17
 Proportionalzähler, 339
 pulsierende Gleichspannung, 231
 Punktmutation, 344
 Pyramide, 24
 Pythagoras, 23

 Quader, 24
 Quadrat, 23
 quadratische Ergänzung, 22
 quadratische Gleichung
 pq-Formel, 22
 Qualitätsfaktor, 335, 336
 Quanten, 308
 Quantenbedingung, 311
 Quantenzahlen, 313, 314

 räumliche Auflösung, 337
 Röntgen, 334
 Röntgendiagnostik, 341, 346
 Strahlenexposition, 341
 Röntgenstrahlung, 234, 275, 318, 323
 charakteristische, 321, 322
 Rückstoßprinzip, 85, 86
 rücktreibende Kraft, 247
 rad, 26
 Radialkraft, 356
 Radiant, 26
 Radikalfänger, 343
 radioaktiver Zerfall, 318
 Radiologie, 333
 Radiowellen, 234, 246, 275
 Radius, 355
 radon, 341
 Randbedingungen, 3
 Randstrahlen, 293
 Raute, 23
 RBW, 335
 Reaktionswahrscheinlichkeit, 330
 Rechte-Hand Regel, 18
 Rechte-Hand-Regel, 228
 Rechteck, 23
 Rechtssystem, 15, 18
 Reduktionismus, 4
 Referenzwelle, 299, 300
 Reflexion, 278, 297, 347
 an dünnen Filmen, 295
 Beugungsgitter, 292
 Reflexionsgesetz, 278, 279
 Reflexion, 260
 Regenbogen, 282

- Reibung
 - innere, 79
 - Newton, 79, 81
 - Stokes, 79, 356
 - Stokes'sche, 80
- Reibungselektrizität, 209, 210
- Reibungsgesetz
 - Newton, 191
 - Stokes, 192
- Reibungskraft, 191, 194, 197
- Reichweite, 332
- Reihenschaltung, 220, 359
- relative biologische Wirksamkeit RBW, 335
- Reparaturmechanismen, 344
- Reparaturmechanismus, 345
- Residuen, 40
- Resonanz, 251
- Reynoldszahl, 197–199, 359
 - hydrodynamische Ähnlichkeit, 197
- Rotationsenergie, 105, 129, 358
- rotierende Bälle, 189
- Rutherford, 326
- Rutherford'scher Streuversuch, 306
- Rydberg-Konstante, 312

- Saite, 252, 253
- Sammellinse, 283, 286
- Sanddollar, 180
- Satellit, 84
- Sauerstoffpartialdruck, 166
- Sauerstoffsättigung, 343
- Schallgeschwindigkeit, 354, 355
- Schallpegel, 262, 360
- Schallwelle, 246, 252
- Scheinkraft, 82
- Schichtströmung, 175
- schiefe Ebene, 101
- Schleppkanal, 199
- Schneebrett-Lawine, 78
- Schnelligkeit, 52, 105
- Schrödinger'sches Atommodell, 313
- Schub, 177
- Schubspannung, 191
- schwache Wechselwirkung, 321, 322, 324
- Schwamm, 177
- Schwebung, 261
- Schwere, 67
- Schwerpunkt, 49, 83, 135
- Schwingung
 - Definition, 246
- Schwingungsbauch, 255
- Schwingungsdauer, 76, 355, 360
- Schwingungsebene, 295
- Schwingungsgleichung, 76
- Schwingungsknoten, 255

- Seeanemone, 196, 197
- Segelboot, 183
- Sehwinkel, 285, 287
- Seifenblase
 - Farben, 294, 295
- Seilwelle, 252
- Seismographie, 259
- Sekantensteigung, 28
- Sekundärelektronen, 339
- Sekundärseite, 231
- Sekunde
 - SI-Einheit, 5
- semi-empirische Massenformel, 318
- Serienschaltung, 220
 - Kondensatoren, 223
- Shock
 - elektrischer, 225
- SI-Einheiten, 5
 - Ampere, 6
 - Candela, 6
 - Kelvin, 6
 - Kilogramm, 6
 - Meter, 5
 - Mol, 6
 - Sekunde, 5
- sichtbares Spektrum, 275
- Sievert, 335
- Signalgeschwindigkeit, 252
- Single-Photon-Emission-Computer-Tomographie
 - SPECT, 323
- Single-Photon-Emissions-Computer-Tomographie
 - (SPECT), 351
- Sinus, 25
- Sinus-Schwingung, 253
- Skalarprodukt, 17, 31
 - Eigenschaften, 17
 - kartesische Koordinaten, 17
- Skalenhöhe, 164
- Snellius'sches Brechungsgesetz, 279
- Sonar, 262
- Sonnenlicht, 275
- Spannung, 208, 215, 220, 224, 355
 - elektrische, 208
- Spannungsdoppelbrechung, 298
- Spannungsquelle, 215
- Spatprodukt, 20
- SPECT, 351
- Spektrallinien, 307
- Spektralzerlegung, 282
- Spektrum, 282
 - elektromagnetisches, 275
 - kontinuierlich, 307
 - sichtbares, 275
- spezifischer Widerstand, 219

- sphärische Aberration, 285
 Spiegel, 278
 Spiegelkerne, 324
 Spinquantenzahl, 314
 Störung, 247
 Stammfunktion, 29
 Standardabweichung, 40, 41
 des Mittelwerts, 40
 Gauß'sche Normalverteilung, 37
 Genauigkeit der Einzelmessung, 40
 Poisson-Verteilung, 39
 Standardgewebe, 336
 Standardnormalverteilung, 42
 starke Wechselwirkung, 322–324
 stationäre Strömung, 174
 statischer Druck, 178
 Messung, 179
 statistische Fehler, 35
 Staudruck, 178
 Messung, 179
 stehende Welle, 255
 Elektron, 313
 Steighöhe
 Kapillare, 170
 Stoß
 elastischer, 87, 106
 Energieerhaltung, 357
 Impulserhaltung, 357
 inelastisch, 107
 inelastischer, 86
 Impulserhaltung, 357
 schiefer, 85
 Stoffmenge
 SI-Einheit, 6
 Stokes'sche Reibung, 79, 80, 192, 356
 Stokes'sche Reibungskraft, 355
 Strömung
 laminar, 175, 190, 191
 Leistung, 358
 stationäre, 174
 turbulent, 175, 190
 Strömungsdruck, 178
 Strömungsfeld, 174
 Strömungsgeschwindigkeit
 Messung im Gefäßsystem, 265
 Strömungswiderstand, 79, 81
 Strahlantrieb, 177
 Strahlenchemie des Wassers, 343
 Strahlenempfindlichkeit, 345
 Strahlenempfindlichkeit der Basen, 343
 Strahlenexposition, 340
 künstliche, 341
 natürliche, 340
 Röntgendisgnostik, 341
 Strahlentherapie, 323, 341
 Strahlenwirkung
 biochemische Phase, 342
 biologische Phase, 342
 indirekte, 343
 physikalisch-chemische Phase, 341
 physikalische Phase, 341
 Strahlteiler, 300
 Streukoeffizient, 331
 Streuung, 297
 elastische, 327
 Streuversuch
 Rutherford, 306
 Streuwinkel, 328
 Strom, 220, 359
 elektrischer, 208, 224
 Stromfaden, 174
 Stromkreis
 elektrischer, 215
 Stromlinie, 174
 Definition, 174
 Stromlinienkörper, 195
 Stromröhre, 174
 Stromstärke
 elektrische, 207
 SI-Einheit, 6
 Summenregel, 29
 Summenvektor, 16
 Supraleiter, 219
 systematische Abweichung, 35
 systematische Fehler, 35
 t-Verteilung, 41
 Tangens, 25
 Tangentensteigung, 28
 Teilkörperbestrahlung, 334
 Temperatur
 SI-Einheit, 6
 Tesla, 209
 Thermographie, 347
 thorium, 326
 Thorium-Kette, 327
 Tochternuklid, 327
 Toricelli, 190
 Gesetz von, 179
 Totalreflektion, 280–282
 Totzeit, 337
 Trägheit, 67, 87
 Trägheitsgesetz, 67, 82, 88, 101
 Trägheitskraft, 197
 Trägheitsmoment, 126
 Tragfläche, 181
 Transformator, 230, 231
 Übersetzungsverhältnis, 231
 Transmission, 347

- Transversalwelle, 252, 274, 295
 Trapez, 23
 Tunneleffekt, 320
 turbulente Strömung, 175

 Ultraschall, 262
 Reflektion, 360
 Ultraschalldiagnostik, 262
 Umfang, 355
 universelle Gravitationskonstante, 354, 355
 Unschärferelation, 361
 Ur-Meter, 5
 Urkilogramm, 66
 UV-Strahlung, 275

 van der Waal'sche Kräfte, 168
 Variable
 abhängige, 24
 unabhängige, 24
 Varianz, 36, 40
 experimentelle, 36
 Poisson-Verteilung, 39
 Vektor, 14
 Addition, 16
 Betrag, 15, 17
 Definition, 14
 komplanar, 20
 Multiplikation mit einem Skalar, 17
 Orthogonalität, 17
 Parallelität, 19
 physikalisch-technisch, 14
 Subtraktion, 16
 Vektoraddition, 16
 graphisch, 16
 komponentenweise, 16
 Vektoralgebra
 kartesisch, 16
 Vektorprodukt, 18
 Verformungsarbeit, 87, 106, 107, 355
 Vergütung, 295
 vernichtungsstrahlung, 329
 Verschiebung, 14, 15
 Verschiebungsvektor, 14, 31
 Verteilung, 36, 37
 erstes Moment, 40
 Messwerte, 36, 37
 Verteilungsdichtefunktion
 Messwerte, 37
 Verteilungsfunktion
 Messwerte, 37
 Vertrauensintervall, 37, 41
 Verzweigungsverhältnisse, 326
 Vielfachstreuung, 332
 virtuelles Bild, 278, 286
 Viskosität, 80
 dynamische, 191
 kinematische, 191
 Volta'sche Säule, 217
 Volta-Zelle, 217
 Volumen, 23, 355
 Volumenelement, 161
 Volumenstrom, 176, 185, 192, 358
 Vortriebs-Effizienz, 177

 Wärmeenergie, 105, 106
 Würfel, 24
 Wachstumsfraktion, 342
 Wasserwelle, 3, 251
 Watt, 100
 Wechselspannung, 231
 Wechselwirkung, 324
 elektromagnetische, 322, 324
 schwache, 321, 322, 324
 starke, 322–324
 Wechselwirkungsgesetz, 68, 69, 82, 85
 Wechselwirkungszeit, 331
 Weg-Zeit-Diagramm, 52, 53
 Weg-Zeit-Gesetz, 53, 73
 gleichförmig gradlinige Bewegung, 55
 gradlinige Bewegung, 54
 Weißlichthologramm, 299, 300
 WEK, 183–185
 Welle, 3, 251, 252
 Definition, 253
 ebene, 276
 elektromagnetische, 233, 246, 274
 Geschwindigkeit, 360
 harmonische, 253
 longitudinale, 252
 stehende, 255
 transversale, 252
 Welle-Teilchen-Dualismus, 310
 Wellenfront, 277, 278, 283, 289
 Wellenlänge, 252, 307
 Energie, 309
 Wellenoptik, 288
 Wellenwanne, 288
 Wertebereich, 24
 Widerstand, 215, 218, 359
 elektrischer, 208
 Parallelschaltung, 359
 Reihenschaltung, 359
 spezifischer, 219
 Widerstandsbeiwert, 81, 184, 187, 194–196,
 354
 Widerstandskraft, 184, 186, 194
 Widerstandsläufer, 186
 Widerstandsläufers, 187
 Windenergiekonverter, 183, 204
 Winkelbeschleunigung, 122, 354, 357

- Winkelfunktion
 - Kosinus, 25
 - Sinus, 25
 - Tangens, 25
 - Umwandlungen, 26
- Winkelgeschwindigkeit, 354, 357
- Winkelvergrößerung, 285, 287
- Wirbel, 81, 175, 193
- Wirbelbildung, 193, 195
- Wirbelstraße, 193
- Wirkungsgrad, 105
 - Strahlantrieb bei Tieren, 177
- Wirkungsquerschnitt, 329, 330

- Zähigkeit, 191, 354
 - kinematische, 191
- Zähigkeitskoeffizient, 354
- Zeit
 - SI-Einheit, 5
- zeitliche Auflösung, 337
- Zelltod, 342
 - programmierter, 345
 - reproduktiver, 345
- Zentrifugalkraft, 82, 355
- Zentrifuge, 82
- Zentripetalkraft, 82, 311
- Zerfall
 - α , 318, 319
 - Linienspektrum, 321
 - β , 319, 320
 - kontinuierliches Spektrum, 321
 - γ , 322
 - radioaktiver, 74, 318, 325
- Zerfallsgesetz, 325, 326, 362
- Zerfallskonstante, 319, 320, 325, 326
- Zerfallzeit, 325
- Zerstreuungslinse, 283
- Zirkulationswirbel, 182
- zufällige Abweichung, 35
- zufällige Fehler, 35
- Zuordnungsvorschrift, 24
- Zustand
 - angeregter, 322
- Zuverlässigkeit der Einzelmessung, 40
- Zylinder, 24